Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019
Zborník príspevkov

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava
26. apríl 2019

Proceedings of the Student Science Conference 2019

Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University, Bratislava
April 26, 2019

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019: Zborník príspevkov
Proceedings of the Student Science Conference 2019
Editori: Broňa Brejová, Jaroslav Guričan, Tomáš Vinař
Autor loga: Matej Novotný
Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava
Vydanie: prvé
Rok vydania: 2019

ISBN 978-8081470936

Zborník obsahuje príspevky účastníkov Študentskej vedeckej konferencie, ktorá sa konala 26. apríla 2019 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Príspevky označené v obsahu ako "recenzované" boli pred publikovaním recenzované najmenej dvoma anonymnými recenzentami. Všetky príspevky boli posudzované aspoň trojčlennou odbornou komisiou.

http://svk.fmph.uniba.sk/

Zborník © 2019 Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava
Články © 2019 autori jednotlivých článkov

Predhovor

Tento zborník obsahuje príspevky zo Študentskej vedeckej konferencie, ktorá sa konala 26. apríla 2019 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Študentská vedecká konferencia má na fakulte dlhoročnú tradíciu a je príležitosťou pre študentov bakalárskeho, magisterského a doktorandského štúdia prezentovať vlastné vedecké a odborné práce z rozličných odborov matematiky, fyziky, informatiky a didaktiky týchto disciplín.

V roku 2019 bolo na konferenciu prihlásených 48 príspevkov v šiestich tematických sekciách. Každý článok bol recenzovaný najmenej dvoma recenzentami a ďalej posudzovaný odbornou komisiou. Na základe tohto procesu boli do zborníka vybrané recenzované články, zvyšné príspevky sú v zborníku zastúpené formou jednostranového abstraktu. Príspevky boli prezentované 26. apríla 2019 na celodennej konferencii v priestoroch fakulty a odborné komisie udelili v rámci jednotlivých sekcií ocenenia 18 víťazom, najlepším doktorandským prácam v oblastiach matematiky a informatiky, fyziky a didaktiky, ako aj 10 laureátom ŠVK. Komisie navrhli udeliť tri ceny Literárneho fondu, tri ceny prof. Tillmana Märka za príspevky v oblasti fyziky plazmy, cenu prof. Petra Lukáča za vynikajúcu prácu v oblasti experimentálnej fyziky, cenu Slovenskej informatickej spoločnosti za vynikajúcu prácu v oblasti informatiky a cenu FINAMIS za najlepšiu prácu v oblasti aplikovanej matematiky.

Chceme poďakovať predovšetkým zúčastneným študentom a ich školiteľom, predsedom a členom jednotlivých odborných komisií, organizátorom a sponzorom. Ďakujeme za úspešný priebeh konferencie a tešíme sa na Študentskú vedeckú konferenciu 2020.

Broňa Brejová, Jaroslav Guričan, Tomáš Vinař
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Sponzori: Literárny fond, Slovenská informatická spoločnosť, prof. Tillman D. Märk, prof. Peter Lukáč, FINAMIS, Slovenská nukleárna spoločnosť, Photoneo

Zloženie komisií

Organizačný výbor: Mgr. Katarína Boďová, PhD.; doc. Mgr. Broňa Brejová, PhD.; doc. RNDr. Jaroslav Guričan, CSc.; doc. RNDr. Juraj Tóth, PhD.; doc. Mgr. Tomáš Vinař, PhD.

Predsedovia odborných komisií:

Matematika: doc. Mgr. Richard Kollár, PhD.
Informatika: RNDr. Zuzana Černeková, PhD.
Jadrová a teoretická fyzika: doc. RNDr. Ivan Sýkora, PhD.
Experimentálna fyzika a biofyzika: RNDr. Veronika Medvecká, PhD.
Didaktika matematiky: PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Didaktika fyziky a informatiky: doc. PaedDr. Klára Velmovská, PhD.

Recenzenti: Stanislav Antalic, Martina Babinská, Pavol Bartoš, Katarína Boďová, Vladimír Boža, Bronislava Brejová, Martin Bulko, Zuzana Černeková, Michal Demetrian, Peter Demkanin, Monika Dillingerová, Rastislav Dvornický, Marek Fila, Ján Filo, Lenka Filová, Milan Ftáčnik, Zuzana Garaiová, Maroš Gregor, Peter Guba, Jaroslav Guričan, Margaréta Halická, Radoslav Harman, Karol Hensel, Karol Holý, Andrea Hrušecká, Roman Hrušecký, Róbert Jajcay, Ľudmila Jašková, Pavol Jurča, Jozef Kačur, Ivan Kalaš, Soňa Kilianová, Tünde Kiss, Jozef Klačka, Richard Kollár, Michal Kovaľ, Zbyněk Kubáček, Zuzana Kubincová, František Kundracík, Martin Máčaj, Edita Máčajová, Zdenko Machala, Martin Madaras, Karolína Mayerová, Ján Mazák, Marián Mikula, Hana Mizerová, Silvia Mošovská, Juraj Országh, Peter Papp, Dana Pardubská, Theodor Pribulla, Pavol Quittner, Marianna Remešíková, Adam Riečický, Branislav Rovan, Mária Slavíčková, Štefan Solčan, Ján Somorčík, Michal Stano, Mária Šubjaková, Ivan Sýkora, Juraj Tekel, Monika Tomcsányiová, Juliána Tomeková, Mária Trnovská, Peter Vankúš, Michaela Vargová, Klára Velmovská, Michaela Veselovská, Michal Winczer

Obsah

Matematika

Recenzované články

Andrej Badík: Vplyv vládnych výdavkov na dynamiku 2D modelu ekonomiky . . . 1
Petra Macková: Self-similar solutions of the super-fast diffusion equation 9
Radoslav Hurtiš: Stabilita prúdenia v reaktívnych pórovitých prostrediach 21
Patrik Mihala: Riešenie priamych a inverzných úloh transportu vody a tepla v pórovitých prostrediach 31

Abstrakty

Ľudovít Horváth: Viacrozmerné neparametrické testy nezávislosti 41
Terézia Fulová: Lokalizácia mobilných telefónov pomocou semidefinitného programovania 42
Jana Valigurská: Súvislosť medzi binárnymi kódmi a regulárnymi grafmi 43

Jadrová a teoretická fyzika

Recenzované články

Erik Benovič: Hermitian random matrix models with asymmetric quartic potential . 44
Adam Broniš: Conversion electron-gamma spectroscopy of $^{254}\mathrm{Md}$ 51
Alžbeta Brisudová: Radon potential of the soils—approaches and applications . . 59
Markus Helej: Krátkožijúce rozpadové produkty radónu v atmosfére a ich správanie sa 64
Emil Puha: Secular changes of orbits in the hierarchical quadruple VW LMi 71

Abstrakty

Dominik Babál: Measurement of the differential cross section of $t\bar{t}$ production in association with Z boson 83
Pavol Mošať: Study of K-isomers in ^{255}Rf 84
Zuzana Bardačová: Neutrino Induced Cascade Reconstruction in the Neutrino Telescope Baikal GVD 85
Eliška Eckerová: Double Pulse Detection with Boosted Decision Trees in the Baikal GVD 86
Zdenko Híveš: Štúdium časového rozlíšenia detektora STRAW v experimente NA62 87

Experimentálna fyzika a biofyzika

Recenzované články

Adam Kerdík: Vplyv nízkoteplotnej plazmy na vlastnosti sójových bôbov 88

Viktor Šroba: Supertvrdé TaB_x vrstvy pripravené pomocou technológie HiTUS . . . 95
Tomáš Fiantok: Teslova cievka so statickým iskrišťom 100

Abstrakty

Robin Menthéour, Barbora Tarabová: Enhancement of antibacterial effect of plasma activated water with pulsed electric field 105
Ondrej Mráz, Dominik Michálek: Štúdium oxidu grafénu modifikovaného aptamérmi s potenciálom využitia pre biomedicínske aplikácie 106
Barbora Stachová: Emission of molecular hydrogen induced by electron impact . . 107
Mostafa Elsayed Hassan: Investigation of the Electro-Sprayed Water Micro-Droplets Using Optical Methods 108
Richard Cimerman, Emanuel Maťaš: Generovanie výboja v štruktúrach podobných automobilovým katalyzátorom 109

Informatika

Recenzované články

Lukáš Gajdošech: Inspection and Editing of 3D Reconstructions in VR 110
Róbert Sarvaš: Sledovanie rozostrených objektov spôsobené rýchlym pohybom . 122
Matúš Juran: Supplementary Information and Transducers 127

Abstrakty

Mário Lipovský: Solving the Maximum Clique Problem Using Neural Networks . . 136
Anna Kompišová: Flows and circular flows on signed cubic graphs 137
Radoslav Chládek: Algorithms for Isometric Gene Tree Reconciliation 138

Didaktika matematiky

Recenzované články

Patrícia Bartschová: Využitie kocky GeoBender na hodinách matematiky 139
Petra Javorková: Spôsoby rozvoja priestorovej predstavivosti pri vyučovaní na druhom stupni základnej školy 148
Barbora Kubinová: Propedeutika záporných čísel formou didaktických hier 155
Mária Mihalová: Využitie modelu 5E vo vyučovaní matematiky na ZŠ 164
Ivona Demčáková: Kritický pohľad na kritické myslenie 171

Abstrakty

Matej Uher: Tvorba databázy úloh z matematických súťaží s cieľom aplikácie vo vyučovacom procese 174
Mária Čujdíková: Hranie videohier a vnímanie matematiky 175
Barbora Matušková: Flipped Classroom a tematický celok Štatistika na strednej škole176

Didaktika fyziky a informatiky

Recenzované články

Simona Gorčáková: Možnosti využitia tichého videa v príprave študentov učiteľstva fyziky 177
Klára Horváthová: Téma digitálnej bezpečnosti v modernom kurikule informatiky . 186
Lucia Makasová: Aktivity s robotickou stavebnicou LEGO WeDo 2.0 191
Iveta Csicsolová: Nemusíš byť na to vždy sám 197

Samuel Spišák: Starčekova záhradka—prostredie na precvičovanie FOR cyklu v Pythone 206

Abstrakty

Karolína Šromeková: HÍbka a šírka optimálnych fyzikálnych vedomostí gymnaziálneho učiteľa fyziky 210

Mária Stankovičová: Informatika bez bariér 211

Lucia Budinská: Ako študenti FMFI riešili súťaž iBobor 212

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 1–8
ISBN 978-8081470936, © 2019 Andrej Badík

Vplyv vládnych výdavkov na dynamiku 2D modelu ekonomiky

Andrej Badík*

Školiteľ: Michal Demetrian†

Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: Cieľom práce je sformulovať vlastnú variantu dvojrozmernej monetárnej politiky ako dynamický systém a preskúmať v ňom jav Hopfovej-Andronovovej bifurkácie. Význam práce spočíva v tvorbe a následnom skúmaní tohto modelu a súčasne jeho modifikácií a uvádza konkrétny príklad využívajúc reálne hodnoty ekonomických ukazovateľov na Slovensku. Práca obsahuje modifikáciu sformulovaného modelu, ktorá spočíva v zavedením variabilných vládnych výdavkov, inak v modeli uvažovaných ako konštantných, čo dovoľuje skúmať zmeny vlastností daného modelu v závislosti od zmeny ich výšky.

Kľúčové slová: Hopfova-Andronovova bifurkácia, monetárna politika, vládne výdavky

1 Dynamický model

1.1 Phillipsova krivka

Phillipsova krivka sa stala nevyhnutnou pre transformáciu vzťahu zmeny miezd na zmenu cien, aby bola užitočnejšia pre tvorcov politiky.

Pôvodná Phillipsova krivka viedla k formulácii verzie rozšírenej o očakávania. Využitie Okunovho zákona [Okun, 1963] a zavedenie cenových očakávaní do analýzy Phillipsovej krivky predstavuje inováciu, ktorá má za následok rovnicu rozšírenú o očakávania

$$\pi = \varepsilon(Y - \bar{Y}) + \pi^e, \qquad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

kde $\pi^e = \dot{p}/p$ predstavuje očakávanú mieru inflácie, kde p označuje cenovú hladinu, Y reálny hrubý národný produkt, $\bar{Y}$ potenciálny hrubý národný produkt a ε reprezentuje reakciu inflácie na zmenu rozdielu reálneho a potenciálneho hrubého domáceho produktu. Premenná očakávanej inflácie vstupuje do rovnice s jednotkovým koeficientom, čo odráža predpoklad, že cenové očakávania sú úplne začlenené do skutočných cenových zmien.

Rovnica

$$\dot{\pi}^e = \gamma\big[\theta(\bar{\pi} - \pi^e) + (1-\theta)(\pi - \pi^e)\big], \quad \gamma > 0,\ 0 \le \theta \le 1, \tag{2}$$

kde $\dot{}$ označuje deriváciu podľa času t, $\bar{\pi}$ predstavuje cieľovú mieru inflácie, ktorú stanovuje centrálna banka a γ predstavuje koeficient rýchlosti prispôsobenia sa inflačným očakávaniam, je zmiešaný typ hypotézy očakávanej inflácie. Je tvorený z predpovedných („forward looking“) a spätných („backward looking“) adaptívnych inflačných očakávaní. Pre $\theta = 0$ je (2) zredukovaná na $\dot{\pi}^e = \gamma(\pi - \pi^e)$, čo je čisto predpovedná adaptívna hypotéza očakávania. Na druhej strane pre $\theta = 1$ je (2) zredukovaná na $\dot{\pi}^e = \gamma(\bar{\pi} - \pi^e)$, čo znamená, že očakávaná miera inflácie verejnosti sa približuje k cieľovej inflácii, ktorú stanovila a oznámila centrálna banka. Môžeme usúdiť, že hodnota parametra θ je akousi mierou dôveryhodnosti inflačného cielenia centrálnej banky a budeme ho nazývať parameter dôveryhodnosti

1.2 Monetárna politika

Veľmi dôležitým nástrojom hospodárskej politiky štátu je monetárna, čiže peňažná politika. Prostredníctvom nej hospodárske centrum (vláda, centrálna banka) riadi peňažné a úverové zabezpečenie ekonomiky a snaží sa o splnenie základných cieľov hospodárskej politiky, ktorými sú ekonomický rast, stabilita cien, rast nezamestnanosti a rovnováha vonkajších finančných tokov. Peniaze, ako hlavný nástroj menovej politiky, možno aktívne využívať len vtedy, ak existuje dobre fungujúci systém bánk a finančný trh [Vincúr, 1997].

John B. Taylor [Taylor, 1993] ukázal, že skutočná menová politika by mohla byť užitočne opísaná z hľadiska jednoduchého pravidla, ktoré sa ukázalo sľubným na základe experimentov hodnotenia politiky. Najdôležitejšie je, že opísal proces menovej politiky z hľadiska krátkodobej nominálnej úrokovej miery a opisoval politiku priamo z hľadiska dvoch hlavných operačných cieľov menovej politiky, inflácie a hospodárskeho rastu. Jeden z variantov Taylorovho pravidla, ktorý uvádza A. Orphanides

*badik2@uniba.sk
†Michal.Demetrian@fmph.uniba.sk

[Orphanides, 2003], opisuje rovnica

$$\dot{r} = \beta_1(\pi - \bar{\pi}) + \beta_2(Y - \bar{Y}), \qquad \beta_1,\ \beta_2 > 0, \quad (3)$$

kde $\dot{}$ označuje deriváciu podľa času t, r nominálnu úrokovú mieru a koeficienty β_1 a β_2 hovoria, ako by mala menová politika reagovať na zmenu miery inflácie od cieľovej inflácie a produkčnú medzeru.

Čerpajúc z [Lipsey, 2015], produkčnou medzerou máme na mysli rozdiel medzi aktuálnym (reálnym) hrubým národným produktom a potenciálnym hrubým národným produktom $(Y - \bar{Y})$.

1.3 Model

Dosadením (1) do (3) a (2) dostávame autonómny systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \beta_1\Big\{\varepsilon\big[Y\big(\mu(r-\pi^e)\big) - \bar{Y}\big] + \\ &\quad \pi^e - \bar{\pi}\Big\} + \beta_2\big[Y\big(\mu(r-\pi^e)\big) - \bar{Y}\big] \equiv f(r,\pi^e), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^e &= \gamma\Big\{\theta(\bar{\pi} - \pi^e) + \\ &\quad (1-\theta)\varepsilon\big[Y\big(\mu(r-\pi^e)\big) - \bar{Y}\big]\Big\} \equiv g(r,\pi^e). \end{aligned} \quad (5)$$

1.3.1 Normálne ekvilibrium

Normálne ekvilibrium (r^*, π^{e*}) systému (4)-(5) je dané vzťahmi $\dot{r} = 0$, $\dot{\pi}^e = 0$. Zo štruktúry funkcií $f(r,\pi^e)$ a $g(r,\pi^e)$ dostávame

$$Y = \bar{Y}, \quad (6)$$

$$\pi^{e*} = \pi^* = \bar{\pi}. \quad (7)$$

Teda v ekvilibriu je reálny hrubý národný produkt rovný potenciálnemu a očakávaná miera inflácie sa rovná tak skutočnej miere inflácie ako aj cieľovej miere inflácie stanovenej centrálnou bankou.

Hodnota nominálnej úrokovej miery v normálnom ekvilibriu r^* je daná rovnosťou (6). Funkcia Y závislá od reálnej úrokovej miery $\rho = r - \pi^e$ je ohraničená a klesajúca, ktorá však môže byť aj nelineárna. Pre $r^* < 0$ však neexistuje normálne ekuilibrium, ktoré by malo ekonomický význam. Normálne ekvilibrium je hodnoverné za podmienky $r^* > 0$.

Jednou z otázok je, či normále ekvilibrium je jediné ekvilibrium v našom systéme. Pre ekvilibrium musí platiť ekvivalent podmienky $g(r,\pi^e) = 0$ a to

$$\bar{\pi} - \pi^e = \frac{\theta - 1}{\theta}\varepsilon(Y - \bar{Y}).$$

Táto rovnica je ekvivalentná s

$$(Y - \bar{Y})\left(\beta_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon\frac{1-\theta}{\theta} + \beta_2\right) = 0,$$

čo znamená, že $Y = \bar{Y}$. Avšak to je normálne ekvilibrium a tak môžeme usúdiť, že normálne ekvilibrium je jediné ekvilibrium v našom modeli.

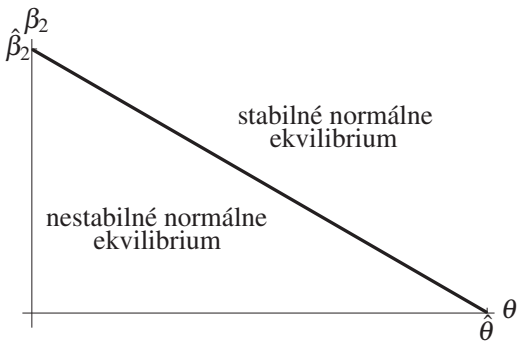
1.3.2 Stabilita normálneho ekvilibria

Vyšetrovaním stability normálneho ekvilibria chceme zistiť, aký dopad má zmena parametra dôveryhodnosti θ na správanie riešení systému (4)-(5) v okolí bodu (r^*, π^{e*}).

Z podmienok $\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} = 0$ a $\det\mathbf{J} > 0$ pre rýdzo imaginárne vlastné čísla Jacobiho matice systému (4)-(5) v ekvilibriu dostávame vzťah

$$\beta_2 = \gamma\left(\frac{1}{\mu\dot{Y}(E_0)} - \varepsilon\right)\theta + \varepsilon(\gamma - \beta_1), \quad (8)$$

kde $E_0 = \mu(r^* - \pi^{e*})$. Tento výraz je rovnicou priamky vzhľadom na premenné β_2 a θ.



Obr. 1: Časť priamky (8) v (θ, β_2)-rovine (kladný kvadrant) pre $\gamma > \beta_1$.

1.4 Voľba investičnej funkcie

Hrubý národný produkt sa v makroekonómii používa na odhad celkovej ekonomickej aktivity danej krajiny. Typický rozklad hrubého národného produktu vyjadruje rovnica

$$Y = C + I + G, \quad (9)$$

kde C označuje spotrebu, I investície a G vládne výdavky a platí

$$C = c(Y - T) + C_0, \qquad T = \tau Y + T_0,$$

kde c je hraničná náchylnosť k spotrebe, C_0 označuje to, čo by ľudia spotrebovali, keby ich disponibilný príjem bol nulový, T označuje daň, τ hraničnú daňovú sadzbu a T_0 predstavuje úroveň všetkých daní, ktoré nie sú príjmové, napr. majetkové dane [Blanchard, 2012].

Na prvý pohľad sa môže zdať, že investície I sú konštantné, avšak v skutočnosti je takýto pohľad veľmi vzdialený od skutočnosti. Podľa Blancharda (viď [Blanchard, 2012]) výška investícii závisí predovšetkým od dvoch faktorov:

- Úroveň predaja. Uvažujme firmu, ktorá čelí nárastu predaja a potrebuje zvýšiť produkciu. K tomu však môže potrebovať kúpiť stroje alebo vybudovať ďalšie zariadenie. Inými slovami, musí investovať. Firma, ktorá čelí nízkemu predaju, nebude cítiť takúto potrebu a bude investovať len málo, resp. vôbec.
- Úroková miera. Uvažujme firmu rozhodujúcu sa, či kúpiť nový stroj alebo nie. Predpokladajme, že na kúpu nového stroja si spoločnosť musí požičať finančné prostriedky. Čím vyššia je úroková miera, tým menej atraktívne je požičiavať si finančné prostriedky a kúpiť stroj. V skutočnosti si mnohé firmy požičiavajú tieto prostriedky pravdepodobne s inou sadzbou, avšak pre jednoduchosť predpokladáme, že všetky firmy si môžu požičať za rovnakú úrokovú sadzbu.

  Pri vysokej úrokovej miere dodatočné výnosy z nového stroja nepokryjú úrokové náklady a kúpa nového stroja nebude výhodná.

Teda investičná funkcia je kladne závislá od celkovej produkcie a negatívne závislá od úrokovej miery.

V modeli (4)-(5) budeme uvažovať investičnú funkciu závislú, pre jednoduchosť, len od reálnej úrokovej miery ρ v tvare

$$I(\rho) = \frac{\kappa}{1+e^{\rho}},$$

kde κ je kladná konštanta.

Vzhľadom na uvedené možno rovnicu (9) písať v tvare

$$Y(\rho) = \frac{1}{1-c(1-\tau)}\frac{\kappa}{1+e^{\rho}} + \frac{G+C_0-cT_0}{1-c(1-\tau)}. \quad (10)$$

Takto definovaná funkcia Y je klesajúca s najmenším horným ohraničením

$$\frac{\kappa+G+C_0-cT_0}{1-c(1-\tau)}$$

a s najväčším dolným ohraničením

$$\frac{G+C_0-cT_0}{1-c(1-\tau)}.$$

Podobne by sme mohli pracovať s ľubovoľnou nerastúcou spojitou kladnou investičnou funkciou (napr. po častiach lineárnou lomenou funkciou) alebo s modelovými vzťahmi spomenutými v [Richardson, 2008].

Pomocou (6) a (10) možno hodnotu nominálnej úrokovej miery v normálnom ekvilibriu r^* vyjadriť explicitne ako

$$r^* = \bar{\pi} + \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{\kappa A}{\bar{Y}-B} - 1\right], \quad (11)$$

kde

$$A = \frac{1}{1-c(1-\tau)}, \qquad B = \frac{G+C_0-cT_0}{1-c(1-\tau)}.$$

Všimnime si, že normálne ekvilibrium nezávisí od parametrov $\beta_1, \beta_2, \gamma, \varepsilon$ a θ nášho modelu.

1.5 Dynamika modelu za neprítomnosti ekvilibria

Ako sme prv spomenuli, normálne ekvilibrium je hodnoverné a má ekonomický význam za podmienky $r^* > 0$, čo nastane, len ak

$$B < \bar{Y} < B + \frac{\kappa}{e^{-\bar{\pi}\mu}+1}A.$$

V prípade, že

$$\bar{Y} > B + \frac{\kappa}{e^{-\bar{\pi}\mu}+1}A,$$

ekvilibrium síce existuje, avšak hodnota nominálnej úrokovej miery v tomto ekvilibriu je záporná ($r^* < 0$), čo v ekonomike znamená, že by bolo výhodnejšie držať peniaze v hotovosti než ich vkladať do banky.

Normálne ekvilibrium však absentuje, ak

$$\bar{Y} < B.$$

Keďže B je najväčším dolným ohraničením produkčnej funkcie Y, tak dostávame inflačnú produkčnú medzeru, čo má za následok zvyšovanie inflácie, teda znehodnocovanie peňazí v ekonomike. V takomto prípade sa zvyšuje nominálna úroková miera, čo možno vidieť aj vo fázovom priestore systému (4)-(5).

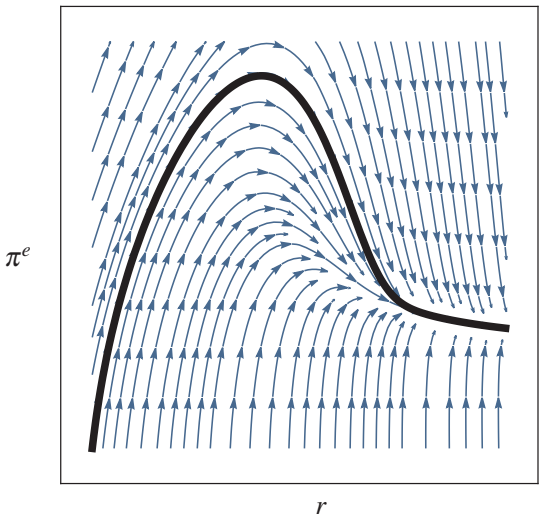
V takomto prípade sú trajektórie neohraničené, totiž

$$r(t) = r_0 t(1+o(1)), \qquad \pi^e(t) = \pi_0(1+o(1)), \quad t \to +\infty,$$

kde konštanty r_0 a π_0 sú dané rovnicami

$$r_0 = (B-\bar{Y})\left(\beta_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon\frac{1-\theta}{\theta} + \beta_2\right),$$
$$\pi_0 = \bar{\pi} + \frac{1-\theta}{\theta}\varepsilon(B-\bar{Y}).$$

Môžeme vidieť, že tempo rastu r je úmerné rozdielu $B-\bar{Y}$, čo je kladné v našom prípade.



Obr. 2: Typický fázový portrét a jedna vybraná trajektória systému (4)-(5) s absentujúcim normálnym ekvilibriom v dôsledku nerovnosti $\bar{Y} < B$.

Zvýšenie hraničnej daňovej sadzby τ spôsobí zúženie intervalu pre $\bar{Y}$, kedy existuje normálne ekvilibrium s ekonomickým významom.

2 Model monetárnej politiky na Slovensku

Vychádzajúc najmä z makroekonomických prognóz Inštitútu finančnej politiky MF SR sme odhadli niektoré parametre tak, aby model zodpovedal skutočnej ekonomike na Slovensku. Teda

$$G = 14,7, \quad C_0 = 2,5, \quad T_0 = 2, \quad \tau = 0,25, \quad c = 0,5, \quad \bar{Y} = 100, \quad \mu = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \gamma = 1 \quad \text{a} \quad \beta_1 = 1/6. \tag{12}$$

Podľa Zmluvy o fungovaní Európskej únie je hlavným cieľom Európskeho systému centrálnych bánk udržať cenovú stabilitu, čo je zároveň aj cieľom Európskej únie ako celku. Na čele Európskeho systému centrálnych bánk stojí Európska centrálna banka, ktorá sa vo svojej monetárnej politike zameriava na mieru inflácie nižšiu, ale blízku 2% v strednodobom horizonte. Teda dostávame $\pi^{e*} = \bar{\pi} = 0,02$.

Pre $r^* = 0,05$ dostávame

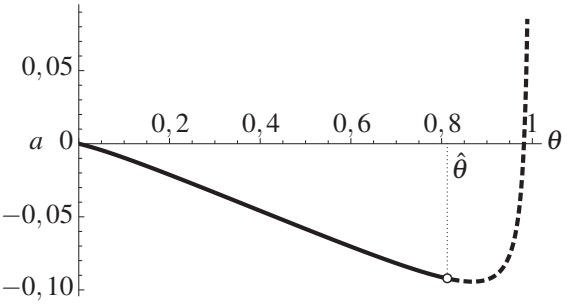
$$\kappa = 46,3\left(e^{0,03}+1\right). \tag{13}$$

Voľbou takýchto hodnôt parametrov nadobúda Ľapunova funkcia tvar

$$a(\theta) \approx \Big[\theta(-0,0120455 + \theta(-0,106019 + (0,254096 - 0,136093\theta)\theta))\Big] \Big/ \big[(\theta-1)(-0,162348 + \theta(\theta - 0,811742))\big] \tag{14}$$

a maximálna hodnota parametra θ, pre ktorú $\beta_2 > 0$ je

$$\hat{\theta} \approx 0,812.$$



Obr. 3: Graf Ľapunovej funkcie (14) na intervale $(0,1)$.

Z priebehu prvej Ľapunovej funkcie (14) (viď Obr. 3) môžeme vidieť, že prvý Ľapunov koeficient a je pre voľbu parametra dôveryhodnosti θ z intervalu $(0,\hat{\theta})$ záporný, to značí, že nastáva superkritická Hopfova-Andronovova bifurkácia.

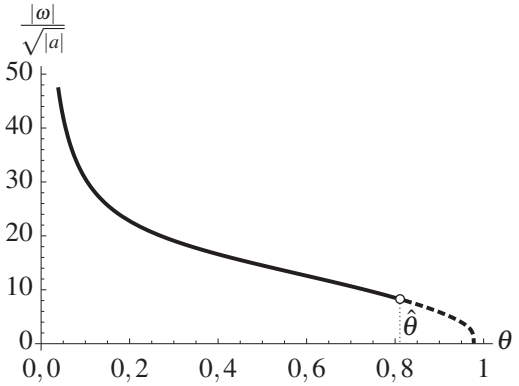
Všimnime si, že počnúc nejakou hodnotou $\hat{\theta} < \theta < 1$ je prvá Ľapunova funkcia kladná, čo by znamenalo, že nastáva subkritická Hopfova-Andronovova bifurkácia, avšak pre takéto hodnoty (presnejšie povedané, pre hodnoty väčšie alebo rovné $\hat{\theta}$) parametra θ dostávame $\beta_2 \leq 0$, čo nemá žiaden ekonomický význam. Preto sa budeme v ďalších

úvahách zameriavať len na také hodnoty tohto parametra, pre ktoré $\beta_2 > 0$.

Podľa [Kuznetsov, 2013] možno pre superkritickú Hopfovu-Andronovovu bifurkáciu určiť efektívnu veľkosť (polomer) limitného cyklu danú ako

$$\theta \mapsto \frac{|\omega|}{\sqrt{|a|}}, \tag{15}$$

kde ω je imaginárna časť vlastných čísel Jacobiho matice systému (4)-(5).



Obr. 4: Graf funkcie efektívnej veľkosti (polomeru) Hopfovho limitného cyklu na intervale $(0,1)$.

Hodnoty zobrazenia (15) možno pomerne presne aproximovať na intervale $(0,3;\hat{\theta})$ priamkou

$$\frac{|\omega|}{\sqrt{|a|}} \approx 24,5 - 20\theta.$$

Zároveň toto zobrazenie v okolí nuly klesá približne ako funkcia

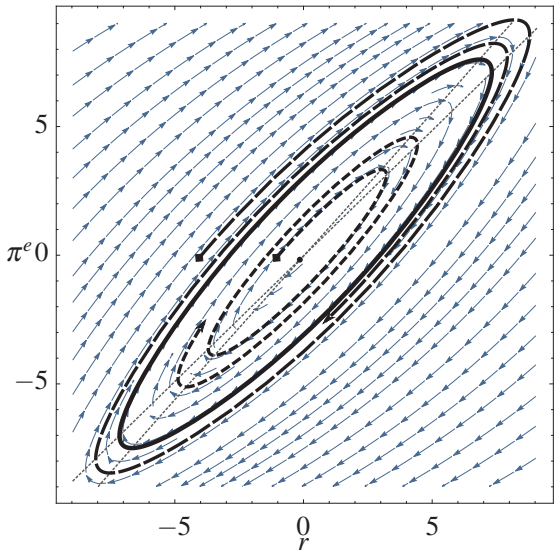
$$\frac{|\omega|}{\sqrt{|a|}} \approx \frac{9,19}{\sqrt{\theta}}.$$

Všimnime si, že čím je kritická hodnota (Hopfov bod) θ_0 parametra dôveryhodnosti menšia (v rámci svojich ohraničení), tým je pre voľbu parametra $\theta < \theta_0$ limitný cyklus väčší v porovnaní s cyklom s rovnako vzdialenou hodnotou tohto parametra (zľava) od väčšej kritickej hodnoty. V tomto zmysle možno hovoriť o akejsi citlivosti ekonomiky opísanej naším modelom vzhľadom na zmenu dôvery v centrálnu banku.

Teda ekonomika, opísaná naším modelom, s menšou kritickou hodnotou dôvery v centrálnu banku (Hopfovým bodom), kedy sa mení stabilita jediného normálneho stacionárneho bodu, je citlivejšia na zníženie tejto dôvery, čo môže viezť, už pri jej veľmi malom znížení, k takým osciláciám hodnôt nominálnej úrokovej miery a očakávanej miery inflácie, že ekonomika bude smerovať k záhube.

Konkrétny príklad so zvolenou hodnotou parametra dôveryhodnosti θ môžeme vidieť na Obr. 5.

Cyklus zobrazený na Obr. 5 je len informatívny, pretože ako môžeme vidieť, hodnoty dynamických premenných zodpovedajúcich cyklu sú mimo ekonomicky akceptovateľného rozsahu. Ak chceme dostať cyklus s ekonomicky akceptovateľným rozsahom hodnôt týchto premenných, je potrebné, aby bol cyklus veľmi malý. Zostrojenie takéhoto cyklu si vyžaduje voľbu parametra θ dostatočne blízko kritickej hodnoty (zľava), avšak takýto cyklus má natoľko slabú príťažlivosť, že pri jeho vykreslení a trajektórií v jeho okolí vo fázovom portréte by spôsobilo jeho neprehľadnosť.



Obr. 5: Fázový portrét systému (4)-(5) s (12), (13), Hopfovým bodom $\theta_0 = 0,8$ a parametrom dôveryhodnosti $\theta = 0,79$.

Ekonomicky však nezáleží na sile príťažlivosti cyklu, ale hlavnou myšlienkou je, že existuje také jeho okolie, ktoré reprezentuje stabilný súbor stavov ekonomiky a to bez jediného príťažlivého bodu – ekvilibria.

3 Vplyv zmeny vládnych výdavkov na vlastnosti modelu monetárnej politiky na Slovensku

Vo vyššie opísanom modeli sme vynechajúc nominálnu úrokovú mieru a očakávanú mieru inflácie uvažovali konštantné ekonomické ukazovatele, ako napríklad potenciálny hrubý národný produkt $\bar{Y}$, hraničnú daňovú sadzbu τ, cieľovú mieru inflácie centrálnej banky $\bar{\pi}$, či dokonca vládne výdavky G, ktoré v skutočnosti nemusia byť z dlhodobého hľadiska konštantnými.

V tejto časti sa zameriame na skúmanie zmeny vlastností modelu monetárnej politiky na Slovensku vzhľadom na meniacu sa výšku vládnych výdavkov.

Veľkosť vládnych výdavkov je, okrem iného, veľmi častou témou politických hádok. Ľudia, ktorí sa podieľajú na vedení štátu, majú rozdielne názory na to, či v konkrétnej ekonomickej situácií je potrebné znížiť, zachovať, prípadne zvýšiť tieto výdavky.

Vládne výdavky Slovenska možno rozdeliť na transferové platby a výdavky na nákup tovarov a služieb tvoria. Medzi transferové platby, teda prevody peňazí, patria najmä sociálne dávky, dôchodky (starobné, vdovské, invalidné), dávky v nezamestnanosti, štipendiá, rodinné prídavky, a iné. Výdavkami na tovary a služby môžeme rozumieť výdavky štátu na diaľnice, majetok štátu a pod.

Modifikáciou modelu, kde uvažujeme variabilné vládne výdavky, môžeme zistiť aký vplyv má ich zmena na vlastnosti dynamiky nášho modelu poblíž bifurkačného bodu.

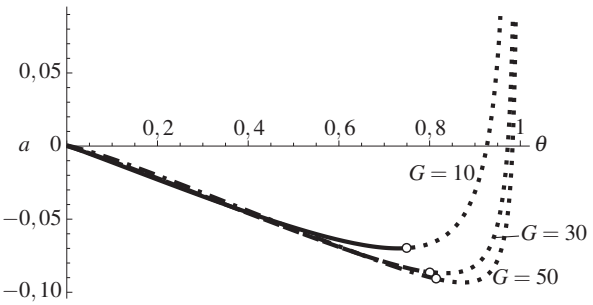
Budeme uvažovať dva prípady: 1. s fixovaným ekvilibriom a 2. bez akéhokoľvek fixovania ekvilibria.

3.1 Fixované ekvilibrium

Dôsledkom fixácie ekvilibria (presnejšie povedané, hodnoty nominálnej úrokovej miery r v ekvilibriu) je prepočítavanie – inak konštantného – disponibilného množstva financií κ pre investovanie. Teda

$$\kappa(G) \approx 123,86 - 2,03G.$$

Rezy grafu Ľjapunovej funkcie znázornené na Obr. 6 sú len informatívne, pretože pomer hodnôt vládnych výdavkov G zodpovedajúcich jednotlivým rezom tejto funkcie je príliš veľký na to, aby



Obr. 6: Rezy grafu Ľjapunovej funkcie pre rôzne hodnoty vládnych výdavkov G a hodnoty parametra θ v intervale $(0,1)$ s fixovaným ekvilibriom.

bola takáto zmena vo veľkosti vládnych výdavkov splniteľná[1].

Napriek tomu však možno usúdiť, že pre hodnoty parametra θ, pre ktoré má model ekonomický význam, nastáva superkritická Hopfova-Andronovova bifurkácia a teda vzniká stabilný limitný cyklus.

Rovnako ako v sekcii 2, aj pre takúto modifikáciu modelu existuje také okolie cyklu, ktoré reprezentuje stabilný súbor stavov ekonomiky a to bez jediného príťažlivého bodu – ekvilibria.

Všimnime si, že pri znížení, resp. zvýšení vládnych výdavkov dostávame menšiu, resp. väčšiu oblasť, na ktorej môžeme uvažovať o Hopfovej-Andronovovej bifurkácií.

Na rozdiel od výšky vládnych výdavkov, veľkosť disponibilného množstva financií na spotrebu domácností a podnikov, nie je v úplnej kompetencii ľudí podieľajúcich sa na vedení štátu, regulovať jeho objem. Teda z pohľadu týchto ľudí nemusí byť možné zaručiť fixáciu ekvilibria zmenou disponibilného množstva financií na spotrebu (pri zmene výšky vládnych výdavkov). Priamy vplyv však majú na výšku daní. Teda v našom modeli môžu ovplyvniť hraničnú daňovú sadzbu τ. Keďže chceme zachovať hodnotu nominálnej úrokovej miery v ekvilibriu, tak dostávame

$$\tau(G) = 0,02G - 0,044, \tag{16}$$

čo v skutočnosti znamená, že pre fixáciu ekvilibria, je potrebné zmenu vládnych výdavkov o jednu jednotku (miliardu), zmeniť (rovnakým „smerom“) hraničnú daňovú sadzbu o 2 percentá.

Vzhľadom na ekonomický význam hodnoty τ do-

[1] Samozrejme, netvrdíme, že takáto zmena je vo všeobecnosti vo všetkých krajinách sveta neuskutočniteľná, ale minimálne pre slovenskú ekonomiku áno.

stávame ohraničenia pre vládne výdavky

$$2,2 \leq G \leq 52,2. \tag{17}$$

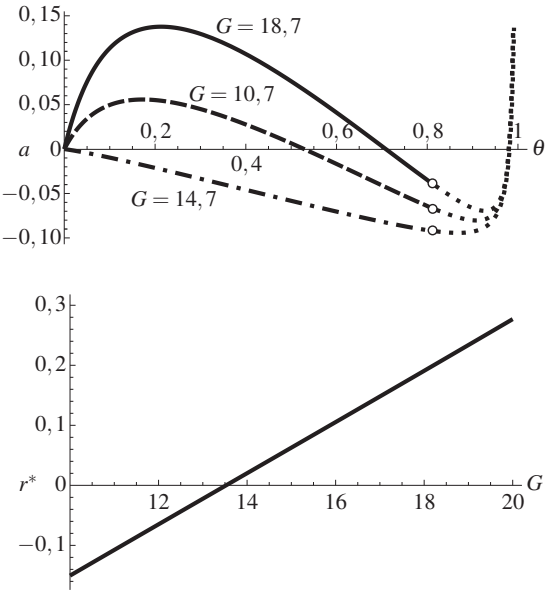
Rezy grafu Ľapunovej funkcie pre hodnoty G spĺňajúce (17) sú takmer totožné s grafom Ľapunovej funkcie (14) zobrazeným na Obr. 3.

Teda zmena výšky vládnych výdavkov a zároveň zmena hraničnej daňovej sadzby podľa (16) spôsobia len nepatrné zmeny vlastností dynamiky modelu poblíž bifurkačného bodu.

3.2 Bez fixácie ekvilibria

Zvýšením, ale aj znížením, vládnych výdavkov môže nastať situácia, v ktorej v závislosti od kritickej hodnoty parametra dôveryhodnosti, nastane subkritická Hopfova-Andronovova bifurkácia, teda vzniká nestabilný limitný cyklus.

Pre výšku vládnych výdavkov G v intervale (12,9;15,1) vieme povedať, že môže nastať len superkritická Hopfova-Andronovova bifurkácia. Pre výšku vládnych výdavkov mimo tohto intervalu existuje taká hodnota parametra dôveryhodnosti θ, pre ktorú vzniká nestabilný limitný cyklus.



Obr. 7: Hore rez grafu Ľapunovej funkcie pre rôzne hodnoty vládnych výdavkov G a hodnoty parametra θ v intervale $(0,1)$ bez fixácie ekvilibria a dole graf funkcie pre hodnotu nominálnej úrokovej miery r^* v ekvilibriu v závislosti od vládnych výdavkov G na intervale $(10,20)$.

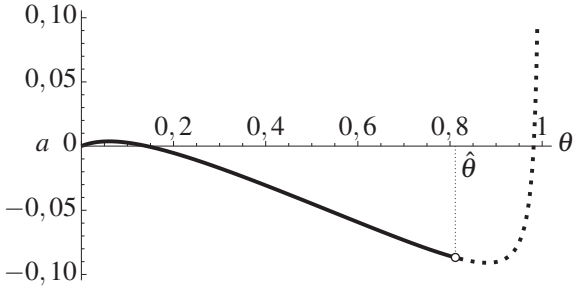
Rezy grafu Ľapunovej funkcie znázornené na Obr. 7 hore sú opäť len informatívne a to z rovnakého dôvodu, ako sme uviedli v predchádzajúcej podsekcii 3.1.

Pre hodnotu nominálnej úrokovej miery v ekvilibriu r^* dostávame

$$r^*(G) = 0,02 + \ln\left(\frac{94,01}{61-G} - 1\right). \tag{18}$$

Dolná hranica vládnych výdavkov, pre ktorú má normálne ekvilibrium ekonomický význam ($r^* > 0$) je približne $13,52$. Ak by vládne výdavky klesli pod túto hranicu, znamenalo by to, že by sa museli znížiť o viac než 8% z pôvodných $14,7$. Ak by došlo k zvýšeniu o približne $2,75\%$ a viac, vládne výdavky by sa dostali na takú úroveň, kedy môžeme uvažovať subkritickú Hopfovu-Andronovovu bifurkáciu.

Podľa prognóz Inštitútu finančnej politiky Ministerstva financií Slovenskej republiky by mala zmena vo vládnych výdavkoch dosiahnuť v roku 2019 úroveň takmer $6,3\%$, čo predstavuje zmenu na $15,62$.



Obr. 8: Rez grafu Ľapunovej funkcie pre $G = 15.62$ na intervale $(0,1)$.

Takouto zmenou využijúc (18) nastane posun ekvilibra do bodu (0,0892;0,02).

Vyššie uvedené značí, že ak sa ľudia podieľajúci sa na vedení štátu rozhodnú znižovať, resp. zvyšovať vládne výdavky, je potrebná opatrnosť pre veľkosť ich zmeny. V inom prípade môže dôjsť k stavu ekonomiky[2], z ktorého existuje jediná cesta, a to cesta k jej záhube.

Literatúra

[Blanchard, 2012] Blanchard, O. a Johnson, D. R. (2012). *Macroeconomics*. Prentice Hall PTR.

[Chow, 2012] Chow, S. N. a Hale, J. K. (2012). *Methods of bifurcation theory*, volume 251. Springer Science & Business Media.

[2]Máme na mysli ekonomiku opísanú naším modelom.

[Guckenheimer, 2013] Guckenheimer, J. a Holmes, P. (2013). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media.

[Keynes, 2016] Keynes, J. M. (2016). *General theory of employment, interest and money*. Atlantic Publishers & Dist.

[Kuznetsov, 2013] Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media.

[Lipsey, 2015] Lipsey, R. a Chrystal, A. (2015). *Economics*. Oxford University Press.

[Lynch, 2007] Lynch, S. (2007). *Dynamical Systems with Applications Using Mathematica*. Birkhöuser Basel, 1st edition.

[Matsumoto et al., 2016] Matsumoto, A., Szidarovszky, F., and Asada (eds.), T. (2016). *Essays in Economic Dynamics: Theory, Simulation Analysis, and Methodological Study*. Springer Singapore, 1 edition.

[Minsky, 1982] Minsky, H. P. (1982). *Can "it" Happen Again?: Essays on Instability and Finance*. M. E. Sharpe.

[Okun, 1963] Okun, A. M. (1963). *Potential GNP: Its Measurement and Significance*. Cowles foundation paper. Yale University, Cowles Foundation for Research in Economics.

[Orphanides, 2003] Orphanides, A. (2003). Historical monetary policy analysis and the taylor rule. *Journal of Monetary Economics*, 50(5):983 – 1022.

[Perko, 2008] Perko, L. (2008). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York.

[Richardson, 2008] Richardson, C. a Romilly, P. (2008). Investment functions and the profitability gap. *Journal of Post Keynesian Economics*, 31(1):35–56.

[Taylor, 1993] Taylor, J. B. (1993). Discretion versus policy rules in pratice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 39:195–214.

[Vincúr, 1997] Vincúr, P. a. k. (1997). *Hospodárska politika*. KON-Press. 128 s.

[Wiggins, 1990] Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 9–20
ISBN 978-8081470936, © 2019 Petra Macková

Self-similar solutions of the super-fast diffusion equation

Petra Macková*

Supervisor: Marek Fila†

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstract: We study non-negative radially symmetric solutions of the super-fast diffusion equation in the whole n-dimensional space. Due to the scaling property of the equation we derive two new autonomous systems of two ordinary differential equations and perform a phase-plane analysis. Self-similar solutions correspond then to suitable trajectories of this system. From the properties of these trajectories, we deduce various conclusions on the behavior of the self-similar solutions.

Keywords: nonlinear diffusion equation, super-fast diffusion, self-similar solutions, ordinary differential equations, phase-plane analysis

1 Introduction

In this paper we investigate self-similar solutions to the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(u^{m-1}\nabla u) & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{P1}$$

where $m<0$, $\Omega\in\{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\}$, and u_0 is non-negative. Moreover, we say that a solution u to problem (P1) attains the initial data u_0 when these are attained in the pointwise sense.

The diffusion is very fast for small u but very slow where u is large. Due to this property, the super-fast diffusion equation arises in several applications. One of them is the diffusion in plasma, which appeared for example in the article [Lonngren and Hirose, 1976] on the expansion of a thermalized electron cloud. It also arises in the study of cellular automata and interacting particle systems with self-organized criticality, see for example [Chayes et al., 1993]. The authors of this article assumed a flux boundary condition $u(x,t)\to 1$ as $x\to\infty$ and $u(x,t)^{m-1}\nabla u(x,t)\to\lambda>0$ as $x\to-\infty$ and obtained a unique solution in the form a traveling wave. Non-uniqueness of solutions of this equation with non-trivial, non-negative and locally integrable initial data was studied more closely in [Rodriguez and Vázquez, 1995]. It arises from the singular character of the equation when $u(x,t)$ tends to zero.

1.1 Transformation of the problem

Along with the authors of the article [Fila and Winkler, 2017], we use the substitution

$$v(x,t)=u^m(x,t),\quad \forall(x,t)\in\Omega\times(0,\infty). \tag{1}$$

This transforms our problem into an equivalent one so that the new function v is now a solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} v_t = v^p\Delta v & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{P2}$$

with non-negative initial data $v_0(x)=u_0^m(x)$. The parameter p is defined as

$$p=1-\tfrac{1}{m}=\tfrac{|m|+1}{|m|}\geq 1.$$

In the following we assume $1<p<\infty$ so that $-\infty<m<0$. We investigate non-negative radially symmetric self-similar solutions of problem (P2) of the form

$$v(x,t)=t^{-\alpha}f(\xi),\quad \xi=|x|t^{-\beta}, \tag{2}$$

where f is called the *self-similar profile* and α,β are the *self-similar exponents* such that

$$\beta=\frac{1-p\alpha}{2}. \tag{3}$$

The self-similar profile $f: D_f\to(0,\infty)$ solves the equation

$$f^p(\xi)\Big(\ddot f(\xi)+\frac{n-1}{\xi}\dot f(\xi)\Big)+\beta\xi\dot f(\xi)+\alpha f(\xi)=0. \tag{4}$$

Since we look for solutions of the super-fast diffusion equation defined in the whole n-dimensional space, we are interested in finding profiles with $D_f\in\{(0,\infty),[0,\infty)\}$.

Note that in view of equation (4), for a function of one-dimensional variable ξ we can, in general, assume that n also takes non-integer values. In the following two sections we will assume that n is a positive real number.

*pmackova225@gmail.com
†fila@fmph.uniba.sk

1.2 Phase-plane analysis of the XY-plane

In order to perform the phase-plane analysis, we introduce new variables

$$X(r)=\frac{\xi \dot{f}}{f},\quad Y(r)=\xi^2 f^{-p},\quad \xi=e^r. \tag{5}$$

We obtain an autonomous system for $X(r)$ and $Y(r)$ in the form

$$\begin{cases} \dot{X}=(2-n)X-X^2-(\alpha+\beta X)Y,\\ \dot{Y}=(2-pX)Y. \end{cases} \tag{S1}$$

A similar system with different coefficients was obtained in [Vázquez, 2006, Subsection 3.2.2]. Since we look for positive solutions, we will study the upper half of the phase-plane. We define the following three regions

$$\begin{aligned} &Q=\{Y\geq 0\},\quad Q^-=\{X\leq 0\}\cap Q,\\ &Q^+=\{X\geq 0\}\cap Q, \end{aligned} \tag{6}$$

to which we restrict our analysis. Trajectories matching positive, monotone decreasing profiles f are situated in region Q^-, i.e.,

$$f(\xi)\geq 0,\quad \dot{f}(\xi)\leq 0,\quad \forall \xi\geq 0. \tag{7}$$

On the other hand, in region Q^+ trajectories match positive, monotone increasing profiles

$$f(\xi)\geq 0,\quad \dot{f}(\xi)\geq 0,\quad \forall \xi\geq 0. \tag{8}$$

System (S1) has at most three critical points

$$\begin{aligned} &P_0=(0,0),\quad P_1=(2-n,0),\\ &P_2=\left(\frac{2}{p},\frac{2}{p}\big(p(2-n)-2\big)\right). \end{aligned}$$

When $n=2$, the two points P_0 and P_1 coincide. Defining the critical exponent p_c as

$$p_c=\frac{2}{2-n}, \tag{9}$$

we see that P_2 differs from P_1 when $p\neq p_c$. Both of the critical points P_0 and P_1 always lie in Q, while P_2 occurs in this region only when $n\in(0,2)$ and $p>p_c$. Note that in the physical case $n=1$ this condition is $p>2$, which is equivalent to $m>-1$.

In the sequel we perform a linearization around these points in order to investigate the local behavior of the trajectories near them.

Proposition 1.1. *The linearization of system* (S1) *around P_0 has the matrix*

$$\begin{pmatrix} 2-n & -\alpha\\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

with eigenvalues $\lambda_1=2-n$, $\lambda_2=2$ and corresponding eigenvectors $e_1=(1,0)$ and $e_2=(-\alpha,n)$. Therefore, the point P_0 is

(i) a saddle when $n>2$,

(ii) a repeller when $n\in(0,2)$,

(iii) and a saddle-node when $n=2$.

Remark 1.1. *There is always a solution branch in the region Q (only one solution for $n>2$) starting from the point P_0 in the direction of the line $Y=-\frac{n}{\alpha}X$. When $n\neq 2$, it corresponds to the self-similar profiles starting from $\xi=0$ with*

$$\dot{f}(0)=0,\quad f(0)=A_0>0, \tag{10}$$

where $A_0=A_0(n,p,\alpha)$ is a positive constant.

We proceed with the linearization around P_1.

Proposition 1.2. *If $n\neq 2$, the linearization of system* (S1) *around P_1 has the matrix*

$$\begin{pmatrix} n-2 & \beta(n-2)-\alpha\\ 0 & 2+p(n-2) \end{pmatrix},$$

with eigenvalues $\lambda_1=n-2$, $\lambda_2=(n-2)(p-p_c)$ and corresponding eigenvectors $e_1=(1,0)$ and $e_2=\left(-\frac{\alpha}{\beta}+(n-2),\frac{n-2}{\beta}\big(p-1-p_c\big)\right)$. Thus, the point P_1 is

(i) a repeller when $n>2$,

(ii) an attractor when $n\in(0,2)$ and $p>p_c$,

(iii) a saddle when $n\in(0,2)$ and $p<p_c$,

(iv) and a saddle-node when $n\in(0,2)$ and $p=p_c$ (a saddle in Q).

Remark 1.2. *If $n\neq 2$ and $p\neq p_c$, the trajectories starting/ending at P_1 correspond to the profiles with the behavior of the form*

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi\to 0/+\infty}\xi^{n-2}f(\xi)=A_1,\\ &\lim_{\xi\to 0/+\infty}\xi^{n-1}\dot{f}(\xi)=(2-n)A_1, \end{aligned} \tag{11}$$

where $A_1=A_1(n,p,\alpha)$ is a positive constant.

Remark 1.3. *When $n = 2$, there is only one critical point in the XY-plane and it is a saddle-node. Remarks 1.1 and 1.2 suggest that f corresponding to the trajectories at this point has a constant behavior. However, in [Quirós and Vázquez, 1999] it was proved that for $\alpha = 0$ the behavior is not constant but has a logarithmic correction, i.e.,*

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{f(\xi)}{|\ln \xi|} = A_2, \tag{12}$$

where $A_2 = A_2(n,p,\alpha)$ is a positive constant. Formula (12) *also holds for $\alpha \neq 0$. To prove it we transform system* (S1) *into the normal form with the new variables $\tilde{X} = X + \frac{\alpha}{2}Y$, $\tilde{Y} = \frac{1}{2}Y$, Using the same arguments as in [Quirós and Vázquez, 1999], the center manifold can be locally expressed as $\tilde{Y} = h(\tilde{X})$ and that near the saddle-node $(\tilde{X},\tilde{Y}) = (0,0)$, $\tilde{Y}$ is exponentially small compared with $\tilde{X}$. Neglecting terms of a higher order near this point, from the equations for $\dot{\tilde{X}}$ and $\dot{\tilde{Y}}$ we obtain* (12)*.*

We proceed now with the linearization around the point $P_2 = \left(\frac{2}{p}, 4\left(\frac{1}{p_c} - \frac{1}{p}\right)\right)$ lying in Q^+, that is when $Y_{P_2} > 0$. The notation X_{P_i} and Y_{P_i} represents the X- and Y-component of the point P_i where $i = 0,1,2$.

Proposition 1.3. *Let $n \in (0,2)$ and $p > p_c$. The linearization of system* (S1) *around P_2 has the matrix*

$$\begin{pmatrix} 2B & -\frac{1}{p} \\ -pY_{P_2} & 0 \end{pmatrix},$$

with two real eigenvalues of the opposite sign $\lambda_{1,2} = B \pm \sqrt{B^2 + Y_{P_2}}$ and corresponding eigenvectors $e_1 = \left(\frac{1}{p}, \lambda_1\right)$ and $e_2 = \left(\frac{1}{p}, \lambda_2\right)$, with $B = \frac{\alpha(p-p_c)}{p_c} - \frac{1}{p}$. Thus, the point P_2 is a saddle.

Remark 1.4. *When $p \neq p_c$, the trajectories beginning/ending at P_2 characterize profiles of the form*

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi\to 0/+\infty} \xi^{-\frac{2}{p}} f(\xi) = \left[4\left(\frac{1}{p_c} - \frac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}, \\ &\lim_{\xi\to 0/+\infty} \xi^{1-\frac{2}{p}} \dot{f}(\xi) = \frac{2}{p}\left[4\left(\frac{1}{p_c} - \frac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Taking a closer look at the system (S1), we see that Y grows everywhere in Q^-, in Q^+ it grows when $X < X_{P_2}$. On the axis $Y = 0$ we have

$$\begin{cases} \dot{X} = X(2-n-X), \\ \dot{Y} = 0. \end{cases}$$

Therefore, Q is an invariant region. On the border $X = 0$ system (S1) takes the form

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha Y, \\ \dot{Y} = 2Y > 0, \end{cases} \tag{14}$$

hence, Q^- is an invariant region when $\alpha \geq 0$, and Q^+ is an invariant region when $\alpha \leq 0$. The growth of X is determined by the curve

$$Y_l(X) = \frac{X(2-n-X)}{\alpha + \beta X}, \tag{15}$$

which has a vertical asymptote $X = -\frac{\alpha}{\beta}$ when $\beta \neq 0$. Assuming both α and β are non-zero, Y_l can in general have three different shapes. If $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + 2 - n\right) > 0$, it has a local minimum and a local maximum at

$$X_{1,2} = -\frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + 2 - n\right)}. \tag{16}$$

One of these local extremes is located to the left of the asymptote, the second one to the right of it. If $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + 2 - n\right) < 0$, curve Y_l is either an increasing or a decreasing function of X with no local extremes, and range $\mathbb{R}$. In both of these cases, Y_l passes through all the critical points. If $X_{P_1} = -\frac{\alpha}{\beta}$, Y_l is a line defined as

$$Y_l = -\frac{X}{\beta}, \tag{17}$$

which passes through the critical points P_0 and P_2.

The XY-plane for different values of parameters is illustrated in Figure 1 and Figure 2. The green line corresponds to asymptote $X = -\frac{\alpha}{\beta}$ and the red dotted line corresponds to the curve Y_l defined in (15).

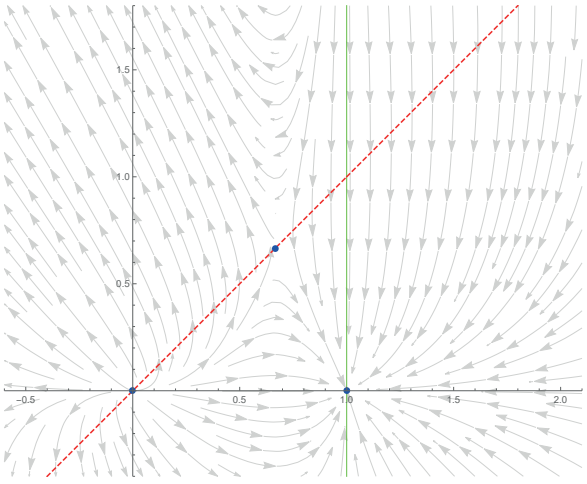


Figure 1: XY-plane: $n = 1$, $p = 3$, $\alpha = 1$

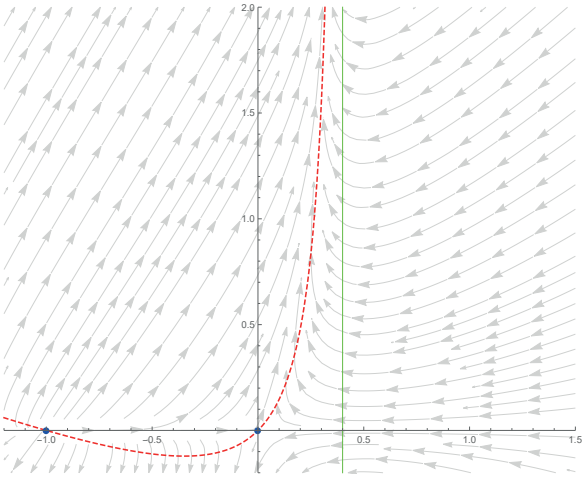


Figure 2: XY-plane: $n=3$, $p=4$, $\alpha=-1$

Similarly to [Vázquez, 2006], using formula (2) for the self-similarity of v and formula (1) for the dependence of v on u we conclude that the time derivatives of these functions satisfy

$$v_t(x,t) = -\beta t^{-\alpha-1} f(\xi)\left(X+\frac{\alpha}{\beta}\right), \tag{18}$$

and

$$u_t(x,t) = -\frac{\beta}{m}\left(X+\frac{\alpha}{\beta}\right) f^{1-p}(\xi) t^{\alpha(p-1)-1}. \tag{19}$$

Since we assume that m is negative, u_t and v_t have opposite signs. We assume now that $\beta \neq 0$. On the line $X=-\frac{\alpha}{\beta}$ we have

$$\begin{cases} \dot{X} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+2-n\right), \\ \dot{Y} = \left(2+p\frac{\alpha}{\beta}\right)Y. \end{cases} \tag{20}$$

When either $X_{P_1}=-\frac{\alpha}{\beta}$ or $\alpha=0$, there is no flow in the direction of the X-axis. Considering $\alpha\neq 0$, we notice that X grows in two cases. Either when α and β have the same sign and $X_{P_1}<-\frac{\alpha}{\beta}$, or when $\frac{\alpha}{\beta}<0$ and $X_{P_1}>-\frac{\alpha}{\beta}$. Therefore, we can decide the invariance of the regions $\{X\geq -\frac{\alpha}{\beta}, Y\geq 0\}$ and $\{X\leq -\frac{\alpha}{\beta}, Y\geq 0\}$ in order to determine the sign of u_t. Also, we infer that a trajectory can cross the asymptote $X=-\frac{\alpha}{\beta}$ at most once. Hence, in this case there exists a unique ξ_0 such that $u_t(x,t)=0$ at the traveling point $|x|=\xi_0 t^{\beta}$. Note that the condition $X_{P_1}=-\frac{\alpha}{\beta}$ can also be formulated as $\alpha=\frac{1}{p-p_c}$.

Using formulae (2) and (1), for a radially symmetric solution $u(|x|,t)=u(r,t)$ we obtain

$$u_r(r,t) = \tfrac{1}{m}t^{\frac{\alpha}{m}-\beta} f^{-p}(\xi)\dot{f}(\xi) = \tfrac{1}{m}t^{\frac{\alpha}{m}} r^{-1} f^{1-p}(\xi) X. \tag{21}$$

We see that $u_r(r,t)$ is positive when $X<0$ and negative when $X>0$. If a trajectory crosses the line $X=0$ at some $0<\xi_1<\infty$, the partial derivative $u_r(r,t)$ equals to zero at the traveling point $r=\xi_1 t^{\beta}$. From the definition of Y in (5), it results that for a finite $\xi_1>0$ we obtain $f(\xi_1)>0$ and hence, for fixed $t>0$ the value of $u(r,t)$ at the point $r=\xi_1 t^{\beta}$ is finite. From the analysis of the flow of system (S1) on the line $X=0$ in (14), we deduce that when $\alpha\neq 0$, such ξ_1 is unique. Moreover, if we fix $t>0$ when $\alpha>0$ this traveling point corresponds to a global minimum of the function $u(\cdot,t)$, and when $\alpha<0$ it corresponds to its global maximum.

1.3 Phase-plane analysis of the $\Phi\Psi$-plane

To verify the behavior of X and Y at infinity, similarly as in [Quirós and Vázquez, 1999] we introduce new variables

$$Y(r) = \frac{1}{p}\frac{1}{\Phi(r)}, \quad X(r) = \frac{1}{p}\left(\frac{\Psi(r)}{\Phi(r)}+2\right). \tag{22}$$

The new system for $\dot{\Phi}$ and $\dot{\Psi}$ is singular at $\Phi=0$, therefore we make the non-linear change of variable $\tau=\varphi(r)$,

$$\frac{d\tau}{dr} = \dot{\varphi}(r) = \frac{1}{\Phi(r)}, \tag{23}$$

so that $\Phi(\tau)$ and $\Psi(\tau)$ satisfy the system

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \Psi\Phi, \\ \dot{\Psi} = \frac{\Psi}{p}\left[(p-1)\Psi-\beta\right] + \frac{\Psi\Phi}{p}\left[p(2-n)-4\right] \\ \qquad + \frac{\Phi^2}{p}\left[2p(2-n)-4\right] - \frac{\Phi}{p}. \end{cases} \tag{S2}$$

This change of variable reverses the flow in the part of the $\Phi\Psi$-plane where $\Phi<0$, which is not the case of our interest. Positive solutions are now located in the region

$$R = \{\Phi \geq 0\},$$

which is equivalent to region Q of the XY-plane defined in (6). The system (S2) has at most three critical points

$$O_0 = (0,0), \quad O_1 = \left(0, \frac{\beta}{p-1}\right),$$
$$O_2 = \left(\frac{p_c}{4(p-p_c)}, 0\right).$$

The point O_1 exists in case $\beta\neq 0$, while the critical point O_2 exists provided that $p\neq p_c$. From the definitions of Φ, Ψ in (22) we infer that the point O_0 stands

for a constant value of X at infinity. We assume now that $\beta \neq 0$.

Proposition 1.4. *The linearization of system* (S2) *around O_0 has the matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{p} & -\frac{\beta}{p} \end{pmatrix},$$

with eigenvalues $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{\beta}{p}$ and corresponding eigenvectors $e_1 = (-\beta, 1)$ and $e_2 = (0,1)$. The point O_0 is a saddle-node (a saddle in the region $\{\Phi \leq 0\}$ and a node in the region R, i.e., an attractor when $\beta > 0$ and a repeller when $\beta < 0$).

Remark 1.5. *We see that the trajectories going to (starting from) the point O_0 in the direction of the line $\Phi = -\beta\Psi$ represent trajectories of the XY-plane, which go to (start from) the infinity "point" $(X,Y) = \big(-\frac{\alpha}{\beta}, +\infty\big)$. Consequently, all the corresponding self-similar profiles f behave like*

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi \to +\infty/0} \xi^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\xi) = C, \\ &\lim_{\xi \to +\infty/0} \xi^{-\frac{\alpha(p-2)-1}{1-p\alpha}} \dot{f}(\xi) = -\frac{\alpha}{\beta} C, \end{aligned} \tag{24}$$

with $C = C(n,p,\alpha)$ being a positive constant.

Investigating the sign of the exponent $-\frac{\alpha}{\beta} - 1 = \frac{\alpha(p-2)-1}{1-p\alpha}$ we see that when $\alpha \in \big(0, \frac{1}{p}\big)$, it is always negative. When $p \leq 2$ or when $p > 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$, the exponent $\frac{\alpha(p-2)-1}{1-p\alpha}$ is positive, when $p > 2$ and $\alpha = \frac{1}{p-2}$, it is equal to zero and when $p > 2$ and $\alpha > \frac{1}{p-2}$, it is negative. Considering now $\alpha < 0$, the exponent $\frac{\alpha(p-2)-1}{1-p\alpha}$ is negative when $p \geq 2$ or when $p < 2$ and $\alpha > \frac{1}{p-2}$, it is positive when $p < 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$, it is equal to zero when $\alpha = \frac{1}{p-2}$.

Proposition 1.5. *The linearization of system* (S2) *around O_1 has the matrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{p-1} & 0 \\ \frac{1}{p}\Big(\frac{\beta}{p-1}\big(p(2-n)-4\big)-1\Big) & \frac{\beta}{p} \end{pmatrix},$$

with eigenvalues $\lambda_1 = \frac{\beta}{p-1}$, $\lambda_2 = \frac{\beta}{p}$ and corresponding eigenvectors $e_1 = \big(-\beta, \frac{\beta}{p-1}(p(2-n)-4)-1\big)$ and $e_2 = (0,1)$. Thus, the point O_1 is a repeller when $\beta > 0$ and an attractor when $\beta < 0$.

Using the implicit formula (23) for the variable τ it holds that

$$\Phi(r)X(r) = \frac{\dot{f}(\tau)}{f(\tau)}.$$

From the definitions (22) of Φ, Ψ and (5) of X, Y we conclude that the equation for $f(\tau)$ in the limit case $\big(\Phi(\tau), \Psi(\tau)\big) = \big(0, \frac{\beta}{p-1}\big)$ is

$$\frac{\dot{f}(\tau)}{f(\tau)} = \frac{\beta}{p(p-1)},$$

and a general solution of this equation can be obtained straightforward, i.e.

$$f(\tau) = c_1 e^{\frac{\beta}{p(p-1)}\tau}, \quad c_1 > 0. \tag{25}$$

When $\beta < 0$, the point O_1 matches the "point" $(X,Y) = (-\infty, +\infty)$ and when $\beta > 0$, the point O_1 matches the "point" $(X,Y) = (+\infty, +\infty)$. Passing to the limit in the formula (25) we obtain

$$\lim_{\tau \to -\infty/+\infty} f(\tau) = 0.$$

We want to know whether the limit $\tau \to -\infty/+\infty$ is equivalent to $r \to -\infty/+\infty$ or $r \to r_*$ for some finite r_*. We prove the latter. Looking at the system (S1) and assuming $(X,Y) \to (-\infty, +\infty)$ when $\beta < 0$ and $(X,Y) \to (+\infty, +\infty)$ when $\beta > 0$, consequently $(\beta X, Y) \to (+\infty, +\infty)$, we see that the equation for $\dot{X}$ contains two quadratic terms, both of which have a negative sign in the limit case. It is well known that a solution of the equation $\dot{X}(r) = -X^2(r)$ has a blow-up at a finite time and it can not be extended beyond this point. We infer that a solution of the equation for $\dot{X}$ of system (S1) blows up for some finite r_* and hence, $f(\xi_*) = 0$ for the corresponding finite ξ_*. Since we look for profiles $f(\xi)$ which are positive for all ξ from the domain $[0, \infty)$ or at least $(0, \infty)$, the trajectories ending at the critical point O_1 are not of our interest.

The point O_2 is equivalent to the critical point P_2 of the XY-plane and belongs to region R when $n \in (0,2)$ and $p > p_c$. From Proposition 1.3 we know that in region Q the point P_2 is a saddle. A linearization around O_2 confirms that this critical point is a saddle in R. Since this linearization is very similar to the linearization around P_2, we omit it in this text.

The $\Phi\Psi$-plane corresponding to the XY-plane illustrated in Figures 1 and 2 is shown in Figure 3 and Figure 4. The green line displays the eigenvector

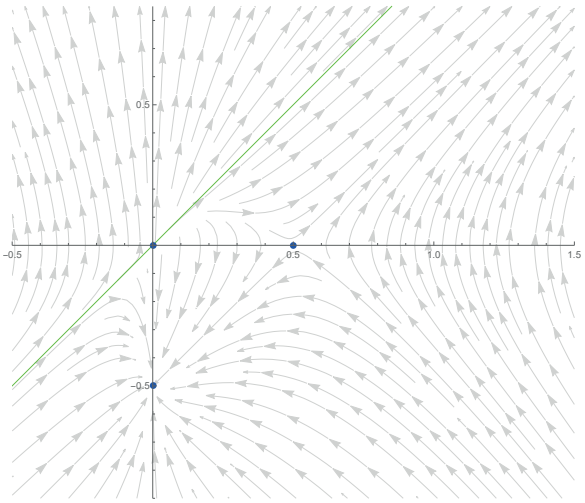


Figure 3: ΦΨ-plane: $n = 1$, $p = 3$, $\alpha = 1$

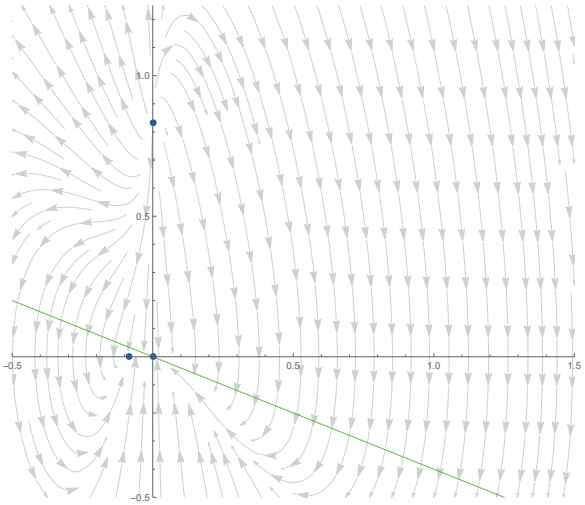


Figure 4: ΦΨ-plane: $n = 3$, $p = 4$, $\alpha = -1$

$e_1 = (-\beta, 1)$ from Proposition 1.4, which is equivalent to the asymptote $X = -\frac{\alpha}{\beta}$.

In the following two sections we summarize the results for $\alpha < 0$ and some results for $\alpha > \frac{1}{p}$. The case when $\alpha \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$ was studied in [Fila and Winkler, 2017] using different methods, so we exclude this case in this paper. The cases $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{p}$, and $p = p_c$ are also excluded, but a similar analysis could be performed here as well.

2 Results in the case $\alpha < 0$

We assume now that α is negative and hence, $\beta > \frac{1}{2}$. From the analysis of the line $X = 0$ in (14) in Section 1.2, we know that Q^+ is now invariant, whereas Q^- is not. Besides that, the point P_2 lies to the right of the asymptote $X = -\frac{\alpha}{\beta}$, which is located in region Q^+.

From the study of the invariance of the regions divided by the asymptote in (20), we notice that that the region $\{X \geq -\frac{\alpha}{\beta}, Y \geq 0\}$ is invariant when the point P_1 lies to the right of the asymptote. Also, the curve Y_l defined in (15) determining the growth of X is a decreasing function of X with no local extremes and range $\mathbb{R}$. This situation occurs either when $n \in (0,2)$ and $p \geq p_c$ or when $n \in (0,2)$, $p < p_c$ and simultaneously $\alpha \in \left(\frac{1}{p-p_c}, 0\right)$. The region $\{X \leq -\frac{\alpha}{\beta}, Y \geq 0\}$ is invariant when the point P_1 lies to the left of the asymptote, that is when $n \geq 2$ or when $n \in (0,2)$, $p < p_c$, and $\alpha < \frac{1}{p-p_c}$. The curve Y_l turns in this case into a degenerated hyperbola with two local extremes defined in (16), a local minimum to the left and a local maximum to the right of the asymptote. In case of equality $X_{P_1} = -\frac{\alpha}{\beta}$ (i.e., $\alpha = \frac{1}{p-p_c}$), which arises only when $n \in (0,2)$ and $p < p_c$, we obtain three invariant regions dividing Q. The line $X_{P_1} = -\frac{\alpha}{\beta}$ and the regions $\{X \geq -\frac{\alpha}{\beta}, Y \geq 0\}$ and $\{X \leq -\frac{\alpha}{\beta}, Y \geq 0\}$. In addition to that, the curve Y_l is a decreasing line of the form (17). In any of these cases, parts of trajectories lying in the region $\{X > -\frac{\alpha}{\beta}, Y \geq 0\}$ (in the region $\{X < -\frac{\alpha}{\beta}, Y \geq 0\}$) correspond to solutions of problem (P1) with a positive (negative) time derivative.

We formulate now theorems describing solutions, which correspond to the self-similar profiles $f(\xi)$ defined for all $\xi > 0$ when $\alpha < 0$. In these theorems we assume $n \in \mathbb{N}$. The trajectories matching some of these solutions, (i.e., when $n = 3$) are portrayed in Figures 2 and 4.

Lemma 1. *Let $n \neq 2$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exists a non-negative solution $f(\xi)$ of equation* (4) *with initial data* (10)*. As $\xi \to \infty$, it has the asymptotic behavior* (24)*, i.e., $f(\xi) \to +\infty$ and $\dot{f}(\xi) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $p \geq 2$ or when $p > 2$ and $\alpha > \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to C$ when $p > 2$ and $\alpha = \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $p > 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$). Moreover, when $n > 2$, it satisfies* (8) *and the inequality*

$$f(\xi) \geq A_0 \quad \text{for all} \quad \xi \geq 0. \tag{26}$$

Proof. These solutions correspond to the trajectories coming from the critical point P_0 and ending at O_0. These trajectories were described in the previous text and they start in the direction of the line $Y = -\frac{n}{\alpha}X$, which lies now in the invariant region Q^+,

from which follows property (8) and the inequality (26) when $n > 2$. From Proposition 1.1 we know that the point P_0 is a saddle when $n > 2$ and hence, the corresponding solution is unique. When $n \in (0,2)$, it is a repeller and so there exist infinitely many solutions of this form. The behavior of the corresponding profiles as $\xi \to 0$ and $\xi \to \infty$ was summarized in Remarks 1.1 and 1.5, respectively. □

The details of the proofs of all other lemmata in this paper are very similar to the proof of Lemma 1, hence, we omit them in the following text.

The next corollary refers to the corresponding solution u of problem (P1). From the behavior of f as $\xi \to 0$ and $\xi \to \infty$ we deduce the behavior of u for fixed $t > 0$ as $|x| \to 0$, $|x| \to \infty$ and for fixed $|x| > 0$ as $t \to 0$, $t \to \infty$, i.e., the initial data and properties (i), (ii), (iii). The properties of the time derivative of u were commented in Section 1.2. Different intervals for α determining the sign of u_t are derived from property (iii), from (19), (20) and from the analysis of the growth of X, which was performed at the beginning of this section. Thus, property (vi) follows. In the case when $n > 2$ or when $n = 1$, $p < 2$ and $\alpha \le \frac{1}{p-2}$, property (vii) results from (i), (ii), and from the negativity of the time derivative. When $n = 1$, $p > 2$ and $\alpha < \frac{1}{2-p}$, we notice the observation about the derivative of u with respect to $r = |x|$ in Section 1.2. From this follows that for fixed $t > 0$ there exists a finite global maximum of the function $u(\cdot,t)$ at the point $|x| = \xi_1 t^\beta$, where $0 < \xi_1 < \infty$. Combining this with (i) and (ii), property (vii) follows. The case $n = 1$, $p > 2$, and $\alpha = \frac{1}{2-p}$ is excluded, since the initial function takes the form $u_0(x) = C^{\frac{1}{m}}|x|^{-1}$.

Corollary 1. *Let $n \neq 2$, $\alpha < 0$ such that $\alpha \neq \frac{1}{2-p}$ when $n = 1$, and β satisfy formula* (3)*. Let C and A_0 be positive constants defined in Remark 1.5 and Remark 1.1, respectively. Then there exists a solution u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with f from Lemma 1 and $\Omega = \mathbb{R}^n$ when $n > 2$, when $n = 1$ and $p \le 2$ or when $n = 1$, $p > 2$, and $\alpha \in \left(\frac{1}{2-p}, 0\right)$ (or $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ when $n = 1$, $p > 2$ and, $\alpha < \frac{1}{2-p}$). This solution attains the initial data*

$$u_0(x) = C^{\frac{1}{m}}|x|^{-\frac{\alpha}{m\beta}},$$

and it has the following properties:

(i) For fixed $t > 0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{\alpha}{m\beta}} u(x,t) = C^{\frac{1}{m}}.$$

(ii) For fixed $t > 0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0} u(x,t) = A_0^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(iii) For fixed $|x| > 0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{m}} u(x,t) = A_0^{\frac{1}{m}}.$$

(iv) When $n > 2$, this solution is unique, when $n \in (0,2)$, there exist infinitely many solutions of this form.

(v) When $n > 2$, for fixed $t > 0$ this solution satisfies the inequality

$$u(x,t) \le A_0^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(vi) When $n > 2$ or when $n = 1$, $p < 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$, for fixed $|x| > 0$ the time derivative is negative for all $0 < t < \infty$ and $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to 0$ and $t \to \infty$. When either $n = 1$ and $p \ge 2$ or when $n = 1$, $p < 2$, and $\alpha \in \left(\frac{1}{p-2}, 0\right)$, for any solution of this form there exists a unique $\xi_0 > 0$ such that $u_t(x,t) = 0$ at the traveling point $|x| = \xi_0 t^\beta$. For fixed $|x| > 0$ it holds that $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to \infty$, the time derivative is negative for $t > \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$, it is positive for all $0 < t < \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$, and $u_t(x,t) \to 0^+$ as $t \to 0$.

(vii) Moreover, when $n > 2$, when $n = 1$ and $p \le 2$ or when $n = 1$, $p > 2$, and $\alpha \in \left(\frac{1}{2-p}, 0\right)$, at all fixed times $t \ge 0$ any solution of this form is locally integrable in $\mathbb{R}^n$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. When $n = 1$, $p > 2$ and $\alpha < \frac{1}{2-p}$, at all fixed times $t > 0$ any solution of this form is integrable in $\mathbb{R}$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Lemma 2. *Let $n = 2$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exist infinitely many solutions $f(\xi)$ of equation* (4)*. As $\xi \to 0$, these profiles have a singularity of the form* (12) *with $\dot{f}(\xi) \to -\infty$. As $\xi \to \infty$, they have the asymptotic behavior* (24)*, i.e., $f(\xi) \to 0^+$ and $\dot{f}(\xi) \to 0^-$.*

Proof. These solutions correspond to the trajectories coming from the critical point P_0 and ending at O_0 described in the previous text. □

Corollary 2. *Let $n = 2$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Let C and A_2 be positive constants defined in Remark 1.5 and Remark 1.3, respectively. Then there exist infinitely many solutions u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with $\Omega = \mathbb{R}^2$ and f from Lemma 2. These solutions attain the initial data*

$$u_0(x) = C^{\frac{1}{m}} |x|^{-\frac{\alpha}{m\beta}},$$

and they have the following properties:

(i) For fixed $t > 0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{\alpha}{m\beta}} u(x,t) = C^{\frac{1}{m}}.$$

(ii) For fixed $t > 0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{u(x,t)}{\ln^{\frac{1}{m}}(|x|^{-1}t^{\beta})} = A_2^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(iii) For fixed $|x| > 0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{\alpha}{m}} u(x,t)}{\ln^{\frac{1}{m}}(|x|^{-1}t^{\beta})} = A_2^{\frac{1}{m}}.$$

(iv) For fixed $|x| > 0$ the time derivative is negative for all $0 < t < \infty$ and $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to 0$. When $p \geq 2$ or when $p \in (1,2)$ and $\alpha \in \left[\frac{1}{p-2}, 0\right)$, $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to \infty$, when $p \in (1,2)$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$, $u_t(x,t) \to -\infty$ as $t \to \infty$.

(v) Moreover, at all fixed times $t \geq 0$ any solution of this form is locally integrable in $\mathbb{R}^2$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Lemma 3. *Let $n > 2$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exist infinitely many non-negative solutions $f(\xi)$ of equation* (4)*, which have a singularity of the form* (11) *with $\dot{f}(\xi) \to -\infty$ as $\xi \to 0$. As $\xi \to \infty$, they have the asymptotic behavior* (24)*, i.e., $f(\xi) \to +\infty$ and $\dot{f}(\xi) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $p \geq 2$ or when $p < 2$ and $\alpha > \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to C$ when $p < 2$ and $\alpha = \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $p < 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$).*

Proof. These solutions correspond to the trajectories coming from the critical point P_1 and ending at O_0 described in the previous text. □

Corollary 3. *Let $n > 2$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Let C and A_1 be positive constants defined in Remark 1.5 and Remark 1.2, respectively. Then there exist infinitely many solutions u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with $\Omega = \mathbb{R}^n$ and f from Lemma 3. These solutions attain the initial data*

$$u_0(x) = C^{\frac{1}{m}} |x|^{-\frac{\alpha}{m\beta}},$$

and they have the following properties:

(i) For fixed $t > 0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{\alpha}{m\beta}} u(x,t) = C^{\frac{1}{m}}.$$

(ii) For fixed $t > 0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0} |x|^{\frac{n-2}{m}} u(x,t) = A_1^{\frac{1}{m}} t^{\frac{\alpha(p-p_c)-1}{p_c m}}.$$

(iii) For fixed $|x| > 0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{\alpha(p-p_c)-1}{p_c m}} u(x,t) = A_1^{\frac{1}{m}} |x|^{\frac{2-n}{m}}.$$

(iv) For fixed $|x| > 0$ the time derivative is negative for all $0 < t < \infty$ and $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to 0$ and $t \to \infty$.

(v) Moreover, at all fixed times $t \geq 0$ any solution of this form is locally integrable in $\mathbb{R}^n$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 4. *Let $n \in (0,2)$, $p < p_c$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exists a unique solution $f(\xi)$ of equation* (4)*, which satisfies* (8)*. It behaves like* (11) *as $\xi \to 0$, i.e., $f(0) = 0$ and $\dot{f}(0) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $n \in (0,1)$, $\dot{f}(0) = A_1$ when $n = 1$, and $\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $n \in (1,2)$). As $\xi \to \infty$, it has the asymptotic behavior* (24)*, i.e., $f(\xi) \to +\infty$ and $\dot{f}(\xi) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $p \geq 2$ or when $p < 2$ and $\alpha > \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to C$ when $p < 2$ and $\alpha = \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $p < 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$).*

Proof. This solution corresponds to the unique trajectory in region Q^+ starting at the critical point P_1 and ending at O_0 described in the previous text. □

The trajectories of the XY-plane matching these solutions with $\alpha = \frac{1}{p-2}$ are portrayed in Figure 5.

Corollary 4. *Let $n = 1$, $p < 2$ ($m < -1$), $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Let C and A_1 be positive constants defined in Remark 1.5 and Remark 1.2, respectively. Then there exists a unique solution u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with $\Omega = \mathbb{R}$ and f from Lemma 4. This solution attains the initial data*

$$u_0(x) = C^{\frac{1}{m}} |x|^{-\frac{\alpha}{m\beta}}, \tag{27}$$

and it has the following properties:

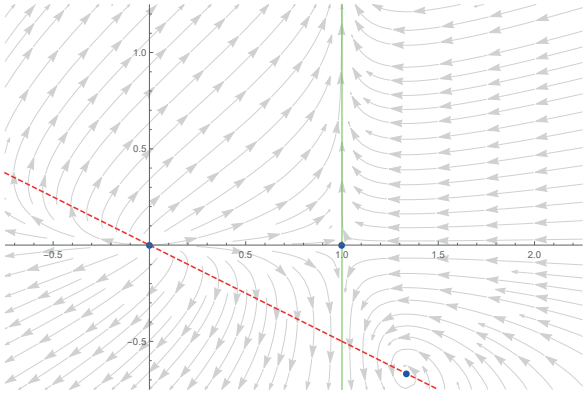


Figure 5: XY-plane: $n=1$, $p=\frac{3}{2}$, $\alpha=-2$

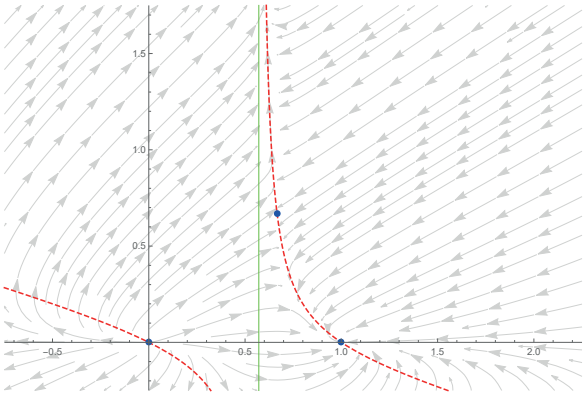


Figure 6: XY-plane: $n=1$, $p=3$, $\alpha=-2$

(i) For fixed $t>0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{\frac{\alpha}{m\beta}}u(x,t)=C^{\frac{1}{m}}.$$

(ii) For fixed $t>0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0}|x|^{-\frac{1}{m}}u(x,t)=A_1^{\frac{1}{m}}t^{\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}}.$$

(iii) For fixed $|x|>0$ we have

$$\lim_{t\to\infty}t^{-\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}}u(x,t)=A_1^{\frac{1}{m}}|x|^{\frac{1}{m}}.$$

(iv) When $\alpha>\frac{1}{p-2}$, for fixed $|x|>0$ the time derivative is negative for all $0<t<\infty$ and $u_t(x,t)\to 0^-$ as $t\to 0$ and $t\to\infty$. When $\alpha\in\left(\frac{1}{p-2},0\right)$, for fixed $|x|>0$ the time derivative is positive for all $0<t<\infty$ and $u_t(x,t)\to 0^+$ as $t\to 0$ and $t\to\infty$. In the case of equality $\alpha=\frac{1}{p-2}$, this solution is stationary and of the form (27).

(v) Moreover, at all fixed times $t\geq 0$ this solution is locally integrable in $\mathbb{R}$, i.e., $u(\cdot,t)\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

The next theorems describe solutions in the case $n\in(0,2)$ and $p>p_c$. Note that in this case we always have $X_{P_1}>-\frac{\alpha}{\beta}$. The trajectories of the XY-plane are illustrated in Figure 6.

Lemma 5. *Let $n\in(0,2)$, $p>p_c$, $\alpha<0$ and β satisfy formula* (3). *Then there exist infinitely many non-negative solutions $f(\xi)$ of equation* (4) *with initial data* (10). *As $\xi\to\infty$, they behave like* (11), *i.e., $f(\xi)\to+\infty$ and $\dot f(\xi)\geq 0$ ($\dot f(\xi)\to+\infty$ when $n\in(0,1)$, $\dot f(\xi)\to A_1$ when $n=1$, and $\dot f(\xi)\to 0^+$ when $n\in(1,2)$). Moreover,*

$$f(\xi)\geq\left[4\left(\frac{1}{p_c}-\frac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\xi^{\frac{2}{p}}\quad\text{for all}\quad\xi\geq 0. \tag{28}$$

Proof. These solutions correspond to the trajectories coming from the critical point P_0 and ending at P_1 described in the previous text. □

Corollary 5. *Let $n=1$, $p>2$ ($m\in(-1,0)$), $\alpha<0$ and β satisfy formula* (3). *Let A_0 and A_1 be positive constants defined in Remark 1.1 and Remark 1.2, respectively. Then there exist infinitely many solutions u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ and f from Lemma 5. These solutions attain the initial data $u_0(x)=0$, so that for fixed $|x|>0$ it holds that*

$$\lim_{t\to 0}t^{-\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}}u(x,t)=A_1^{\frac{1}{m}}|x|^{\frac{1}{m}}.$$

They have the following properties:

(i) For fixed $t>0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{-\frac{1}{m}}u(x,t)=A_1^{\frac{1}{m}}t^{\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}}.$$

(ii) For fixed $t>0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0}u(x,t)=A_0^{\frac{1}{m}}t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(iii) For fixed $|x|>0$ we have

$$\lim_{t\to\infty}t^{\frac{\alpha}{m}}u(x,t)=A_0^{\frac{1}{m}}.$$

(iv) For fixed $t>0$ these solutions satisfy the inequality

$$u(x,t)\leq\left[4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}}|x|^{\frac{2}{m-1}}t^{\frac{1}{1-m}}.$$

(v) For any solution of this form, there exists a unique $\xi_0 > 0$ such that $u_t(x,t) = 0$ at the traveling point $|x| = \xi_0 t^\beta$. For fixed $|x| > 0$ we have $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to \infty$, the time derivative is negative for all $t > \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$, and it is positive for all $0 < t < \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$. As $t \to 0$, $u_t(x,t) \to 0^+$ when $p \geq 3$ or when $p \in (2,3)$ and $\alpha < \alpha^*$, $u_t(x,t) \to A_1^{\frac{1}{m}}|x|^{\frac{1}{m}}$ when $p \in (2,3)$ and $\alpha = \alpha^*$, and $u_t(x,t) \to +\infty$ when $p \in (2,3)$ and $\alpha \in (\alpha^*, 0)$, where $\alpha^* = \frac{p-3}{(p-1)(p-2)}$.

(vi) Moreover, at all fixed times $t > 0$ any solution of this form is integrable in $\mathbb{R}$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Lemma 6. *Let $n \in (0,2)$, $p > p_c$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exists a unique non-negative solution $f(\xi)$ of equation* (4) *with initial data* (10)*. As $\xi \to \infty$, it behaves like* (13)*, i.e., $f(\xi) \to +\infty$ and $\dot{f}(\xi) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $p \in (1,2)$, $\dot{f}(\xi) \to \left[4\left(\frac{1}{p_c} - \frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ when $p = 2$, and $\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $p > 2$). Moreover,*

$$f(\xi) \geq \left[4\left(\frac{1}{p_c} - \frac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} \xi^{\frac{2}{p}} \quad \text{for all} \quad \xi \geq 0. \quad (29)$$

Proof. This solution corresponds to the unique trajectory starting at P_0 and ending at P_2 described in the previous text. □

Corollary 6. *Let $n = 1$, $p > 2$ ($m \in (-1,0)$), $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Let A_0 be a positive constant defined in Remark 1.1. Then there exists a unique solution u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with $\Omega = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ and f from Lemma 6. This solution attains the initial data $u_0(x) = 0$, so that for fixed $|x| > 0$ it holds that*

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{1-m}} u(x,t) = \left[4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} |x|^{\frac{2}{m-1}}.$$

It has the following properties:

(i) For fixed $t > 0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-\frac{2}{m-1}} u(x,t) = \left[4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} t^{\frac{1}{1-m}}.$$

(ii) For fixed $t > 0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0} u(x,t) = A_0^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(iii) For fixed $|x| > 0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{m}} u(x,t) = A_0^{\frac{1}{m}}.$$

(iv) For fixed $t > 0$ this solution satisfies the inequality

$$u(x,t) \leq \left[4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} |x|^{\frac{2}{m-1}} t^{\frac{1}{1-m}}.$$

(v) For any solution of this form, there exists a unique $\xi_0 > 0$ such that $u_t(x,t) = 0$ at the traveling point $|x| = \xi_0 t^\beta$. For fixed $|x| > 0$ it holds that $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to \infty$, the time derivative is negative for all $t > \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$, it is positive for all $0 < t < \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$, and $u_t(x,t) \to +\infty$ as $t \to 0$.

(vi) Moreover, at all fixed times $t > 0$ this solution is integrable in $\mathbb{R}$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Lemma 7. *Let $n \in (0,2)$, $p > p_c$, $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exists a unique solution $f(\xi)$ of equation* (4)*, which satisfies* (8)*. As $\xi \to 0$, it behaves like* (13)*, i.e., $f(0) = 0$ and $\dot{f}(0) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $p \in (1,2)$, $\dot{f}(0) = \left[4\left(\frac{1}{p_c} - \frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ when $p = 2$, and $\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $p > 2$). As $\xi \to \infty$, it has the asymptotic behavior* (24)*, i.e., $f(\xi) \to +\infty$ and $\dot{f}(\xi) \geq 0$ ($\dot{f}(\xi) \to 0^+$ when $p \geq 2$ or when $p > 2$ and $\alpha > \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to C$ when $p > 2$ and $\alpha = \frac{1}{p-2}$, $\dot{f}(\xi) \to +\infty$ when $p > 2$ and $\alpha < \frac{1}{p-2}$).*

Proof. This solution corresponds to the unique trajectory coming from P_2 and ending at O_0 described in the previous text. □

Corollary 7. *Let $n = 1$, $p > 2$ ($m \in (-1,0)$), $\alpha < 0$ and β satisfy formula* (3)*. Let C be a positive constant defined in Remark 1.5. Then there exists a unique non-negative solution u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with f from Lemma 7 and $\Omega = \mathbb{R}$ when $\alpha \in \left(\frac{1}{2-p}, 0\right)$ (or with $\Omega = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ when $\alpha < \frac{1}{2-p}$). This solution attains the initial data*

$$u_0(x) = C^{\frac{1}{m}} |x|^{-\frac{\alpha}{m\beta}},$$

and it has the following properties:

(i) For fixed $t > 0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{\alpha}{m\beta}} u(x,t) = C^{\frac{1}{m}}.$$

(ii) For fixed $t > 0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0} |x|^{-\frac{2}{m-1}} u(x,t) = \left[4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} t^{\frac{1}{1-m}}.$$

(iii) For fixed $|x|>0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{1-m}} u(x,t) = \left[4\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} |x|^{\frac{2}{m-1}}.$$

(iv) Moreover, for fixed $|x|>0$ the time derivative is positive for all $0<t<\infty$ and $u_t(x,t)\to 0^+$ as $t\to 0$ and $t\to\infty$.

Lemma 8. *Let $n\in(0,2)$, $p>p_c$, $\alpha<0$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exists a unique solution $f(\xi)$ of equation* (4)*, which satisfies* (8)*. As $\xi\to 0$, it behaves like* (13)*, i.e., $f(0)=0$ and $\dot f(0)\geq 0$ ($\dot f(\xi)\to 0^+$ when $p\in(1,2)$, $\dot f(0)=\left[4\left(\frac{1}{p_c}-\frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ when $p=2$, and $\dot f(\xi)\to+\infty$ when $p>2$). As $\xi\to\infty$, it behaves like* (11)*, i.e., $f(\xi)\to+\infty$ and $\dot f(\xi)\geq 0$ ($\dot f(\xi)\to+\infty$ when $n\in(0,1)$, $\dot f(\xi)\to A_1$ when $n=1$ and $\dot f(\xi)\to 0^+$ when $n\in(1,2)$). Moreover,*

$$f(\xi)\geq\left[4\left(\tfrac{1}{p_c}-\tfrac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\xi^{\frac{2}{p}} \quad \text{for all} \quad \xi\geq 0. \tag{30}$$

Proof. This solution corresponds to a unique trajectory in region Q^+ starting at the point P_2 and ending at P_1 described in the previous text. □

Corollary 8. *Let $n=1$, $p>2$ ($m\in(-1,0)$), $\alpha<0$ and β satisfy formula* (3)*. Let A_1 be a positive constant defined in Remark 1.2. Then there exists a unique solution u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with $\Omega=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ and f from Lemma 8. This solution attains the initial data $u_0(x)=0$, so that for fixed $|x|>0$ it holds that*

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}} u(x,t) = A_1^{\frac{1}{m}}|x|^{\frac{1}{m}}.$$

It has the following properties:

(i) For fixed $t>0$ we have

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-\frac{1}{m}} u(x,t) = A_1^{\frac{1}{m}} t^{\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}}.$$

(ii) For fixed $t>0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to 0} |x|^{-\frac{2}{m-1}} u(x,t) = \left[4\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} t^{\frac{1}{1-m}}.$$

(iii) For fixed $|x|>0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{1-m}} u(x,t) = \left[4\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} |x|^{\frac{2}{m-1}}.$$

(iv) For fixed $t>0$ this solution satisfies the inequality

$$u(x,t)\leq\left[4\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{1-m}} |x|^{\frac{2}{m-1}} t^{\frac{1}{1-m}}.$$

(v) For fixed $|x|>0$ the time derivative is positive for all $0<t<\infty$ and $u_t(x,t)\to 0^+$ as $t\to\infty$. As $t\to 0$, $u_t(x,t)\to 0^+$ when $p\geq 3$ or when $p\in(2,3)$ and $\alpha<\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}$, $u_t(x,t)\to A_1^{\frac{1}{m}}|x|^{\frac{1}{m}}$ when $p\in(2,3)$ and $\alpha=\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}$, and $u_t(x,t)\to+\infty$ when $p\in(2,3)$ and $\alpha\in\left(\frac{p-3}{(p-1)(p-2)},0\right)$.

(vi) Moreover, at all fixed times $t\geq 0$ this solution is integrable in $\mathbb{R}\backslash B_\varepsilon$, i.e., $u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R}\backslash B_\varepsilon)$, where $B_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}:|x|<\varepsilon\}$ for any $\varepsilon>0$.

3 Some results in the case $\alpha>\frac{1}{p}$

In case $\alpha>\frac{1}{p}$, from formula (3) we see that β takes negative values. It still holds that Q^- is an invariant region, the asymptote $X=-\frac{\alpha}{\beta}$ lies in region Q^+, and the point P_2 lies to the left of this asymptote.

From the study of (20), we infer that the region $\{X\geq-\frac{\alpha}{\beta},Y\geq 0\}$ is invariant when the point P_1 lies to the right of the asymptote, i.e., when $X_{P_1}>-\frac{\alpha}{\beta}$. That can only happen in the case $n\in(0,2)$, $p>p_c$ and simultaneously $\alpha>\frac{1}{p-p_c}$. When $X_{P_1}<-\frac{\alpha}{\beta}$, there is another invariant region $\{X\leq-\frac{\alpha}{\beta},Y\geq 0\}$. This situation occurs when one of the three following conditions is fulfilled: $n\geq 2$; $n\in(0,2)$ and $p\leq p_c$; $n\in(0,2)$, $p>p_c$, and $\alpha\in\left(\frac{1}{p},\frac{1}{p-p_c}\right)$. In case of equality $X_{P_1}=-\frac{\alpha}{\beta}$, equivalently $\alpha=\frac{1}{p-p_c}$, three invariant regions are dividing the half-plane Q. The line $X_{P_1}=-\frac{\alpha}{\beta}$ and the regions $\{X\geq-\frac{\alpha}{\beta},Y\geq 0\}$, and $\{X\leq-\frac{\alpha}{\beta},Y\geq 0\}$. This case occurs when $n\in(0,2)$ and $p>p_c$. Moreover, parts of trajectories lying in the region $\{X>-\frac{\alpha}{\beta},Y\geq 0\}$ (in the region $\{X<-\frac{\alpha}{\beta},Y\geq 0\}$) correspond to solutions of problem (P1) with a negative (positive) time derivative.

Lemma 9. *Let $n\in(0,2)$, $p>p_c$, $\alpha>\frac{1}{p}$ and β satisfy formula* (3)*. Then there exist infinitely many solutions $f(\xi)$ of equation* (4) *with initial data* (10)*, which satisfy* (8) *and moreover, $f(\xi)\geq A_0$ for all $\xi\geq 0$. As $\xi\to\infty$, they behave like* (11)*, i.e., $f(\xi)\to+\infty$ and $\dot f(\xi)\geq 0$ ($\dot f(\xi)\to+\infty$ when $n\in(0,1)$, $\dot f(\xi)\to A_1$ when $n=1$, and $\dot f(\xi)\to 0^+$ when $n\in(1,2)$).*

Proof. These solutions correspond to the trajectories in region Q^+ starting at the critical point P_0 and ending at P_1 described in the previous text. □

Corollary 9. *Let $n = 1$, $p > 2$ ($m \in (-1,0)$), $\alpha > \frac{1}{p}$ and β satisfy formula* (3)*. Let A_0 and A_1 be positive constants defined in Remark 1.1 and Remark 1.2, respectively. Then there exist infinitely many solutions u of problem* (P1) *of the form* (1)-(2) *with f from Lemma 9 and $\Omega = \mathbb{R}$. These solutions attain the initial data $u_0(x) = 0$, so that for fixed $|x| > 0$ it holds that*

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\alpha}{m}} u(x,t) = A_0^{\frac{1}{m}}.$$

They have the following properties:

(i) For fixed $t > 0$ we have

$$\lim_{|x|\to 0} u(x,t) = A_0^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(ii) For fixed $t > 0$ it also holds that

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-\frac{1}{m}} u(x,t) = A_1^{\frac{1}{m}} t^{\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}}.$$

(iii) For fixed $|x| > 0$ we have

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{\alpha(p-2)-1}{2m}} u(x,t) = A_1^{\frac{1}{m}} |x|^{\frac{1}{m}}.$$

(iv) For fixed $t > 0$ these solutions satisfy the inequality

$$u(x,t) \le A_0^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

(v) When $\alpha \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p-2}\right]$, for fixed $|x| > 0$ the time derivative is positive for all $0 < t < \infty$ and $u_t(x,t) \to 0^+$ as $t \to \infty$. For fixed $|x| > 0$ as $t \to 0$ we have $u_t(x,t) \to +\infty$ when $\alpha \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}\right)$, $u_t(x,t) \to A_0^{1-p}$ when $\alpha = \frac{1}{p-1}$, and $u_t(x,t) \to 0^+$ when $\alpha \in \left(\frac{1}{p-1}, \frac{1}{p-2}\right]$.

When $\alpha > \frac{1}{p-2}$, for any solution of this form there exists a unique $\xi_0 > 0$ such that $u_t(x,t) = 0$ at the traveling point $|x| = \xi_0 t^\beta$. For fixed $|x| > 0$ we have $u_t(x,t) \to 0^-$ as $t \to \infty$, the time derivative is negative for all $t > \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$, and it is positive for all $t < \left(\xi_0^{-1}|x|\right)^{1/\beta}$ with $u_t(x,t) \to 0^+$ as $t \to 0$.

(vi) Moreover, at all fixed times $t \ge 0$ any solution of this form is integrable in $\mathbb{R}$, i.e., $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

References

[Chayes et al., 1993] Chayes, J. T., Osher, S. J., and Ralston, J. V. (1993). On singular diffusion equations with applications to self-organized criticality. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(10):1363–1377.

[Fila and Winkler, 2017] Fila, M. and Winkler, M. (2017). Slow growth of solutions of superfast diffusion equations with unbounded initial data. *Journal of the London Mathematical Society*, 95(2):659–683.

[Hui and Kim, 2017] Hui, K. M. and Kim, S. (2017). Asymptotic large time behavior of singular solutions of the fast diffusion equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 37(11):5943–5977.

[Logan, 2004] Logan, J. D. (2004). *Applied Partial Differential Equations*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer New York.

[Lonngren and Hirose, 1976] Lonngren, K. E. and Hirose, A. (1976). Expansion of an electron cloud. *Physics Letters A*, 59:285–286.

[Quirós and Vázquez, 1999] Quirós, F. and Vázquez, J. L. (1999). Asymptotic behaviour of the porous media equation in an exterior domain. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 28(2):183–227.

[Rodriguez and Vázquez, 1995] Rodriguez, A. and Vázquez, J. L. (1995). Non-uniqueness of solutions of nonlinear heat equations of fast diffusion type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 12(2):173 – 200.

[Vázquez, 2006] Vázquez, J. L. (2006). *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations Equations of Porous Medium Type*. Oxford Lecture Notes in Mathematics and Its Applications 33. Oxford University Press, Oxford.

[Vázquez, 2006] Vázquez, J. L. (2006). *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 21–30
ISBN 978-8081470936, © 2019 Radoslav Hurtiš

Stabilita prúdenia v reaktívnych pórovitých prostrediach

Radoslav Hurtiš*

Školiteľ: Peter Guba[1†]

[1] Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: V práci sa zaoberáme stabilitou reaktívneho prúdenia v pórovitých médiách a využitím moderného numerického nástroja COMSOL Multiphysics analyzujeme podmienky, pri ktorých dochádza k prechodu do nelineárnej nestability reakčného frontu. Analýza linearizovanej stability postupujúceho frontu je založená na aplikácii Čebyševovej a Hermitovej spektrálnej kolokačnej metódy pre odlišné triedy permeabilitných vzťahov. Hlavným výsledkom práce je numerická simulácia postupujúceho frontu s plne nelineárnymi poruchami implementáciou metódy konečných prvkov.

Kľúčové slová: lineárna stabilita prúdenia, Čebyševova spektrálna kolokačná metóda, Hermitova spektrálna kolokačná metóda, metóda konečných prvkov, COMSOL Multiphysics

1 Úvod

Pri prúdení rozpúšťadla cez pórovité prostredie dochádza spravidla k chemickej reakcii medzi rozpúšťadlom a povrchovými vrstvami rozpustiteľnej látky pórovitého média. Reaktívne prúdenie leptá štruktúru pórovitého média a to spôsobuje zvyšovanie jeho permeability. Postupujúci reakčný front niekedy trpí nestabilitou, pri ktorej sa rozpúšťadlo koncentruje do vysoko priepustných kanálikov. Takáto nestabilita je často označovaná pojmom fingering pre jej vizuálny efekt pripomínajúci tvar prstov.

V práci skúmame stabilitu prúdenia v pórovitom prostredí. Uvažujeme zjednodušený model reaktívneho prúdenia, v ktorom je pórovitosť média a dynamická viskozita kvapalnej fázy konštantná. Rýchlosť chemickej reakcie je úmerná produktom koncentrácie rozpúšťadla a prímesi pri štandardnej reakčnej rýchlostnej miere. Prúdene kvapalnej fázy v kontinuu sa riadi Darcyho zákonom. Funkcia permeability vyjadrujúca vzťah medzi priepustnosťou a koncentráciou rozpustiteľnej látky je reprezentovaná konštantnou a exponenciálne klesajúcou funkciou. Pre exponenciálny vzťah permeability tento model simuluje reaktívne prúdenie v pieskovcoch, keďže pieskovcová hornina sa nerozpúšťa, a teda pórovitosť sa takmer nemení pri výrazne rastúcej permeabilite.

Numerickými metódami analyzujeme stabilitu postupujúceho frontu pre linearizované poruchy laminárneho prúdenia. Implementáciou Čebyševovej a Hermitovej kolokačnej metódy prevedieme problém lineárnej stability na zovšeobecnený vlastnohodnotový problém. V závislosti od funkcie permeability a módov porúch dostaneme príslušné spektrum vlastných hodnôt, ktoré charakterizuje lineárnu stabilitu prúdenia.

Numerické simulácie postupujúceho reakčného frontu vykonáme aj použitím metódy konečných prvkov v COMSOL Multiphysics s lineárnymi bázovými funkciami pre koncentrácie rozpúšťadla a prímesi a tlakové pole. Výsledkom pre jednotlivé triedy permeabilitných vzťahov je zachytenie plne nelineárnych porúch laminárneho prúdenia v prípade jeho nestability.

2 Formulácia

Model dvojrozmerného reaktívneho prúdenia v pórovitých prostrediach uvedený v [6] možno zapísať v tvare

$$\phi\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{\nabla}^* \cdot (\boldsymbol{u}^* c^*) = -k^* c^* w^*, \tag{1a}$$

$$\nu(1-\phi)\frac{\partial w^*}{\partial t^*} = -k^* c^* w^*, \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{u}^* = -\frac{\kappa^*(w^*)}{\mu^*}\boldsymbol{\nabla}^* p^*, \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^* \cdot \boldsymbol{u}^* = 0, \tag{1d}$$

kde premenná $c^*(\boldsymbol{x}^*, t^*)$ je koncentrácia rozpúšťadla na jednotku objemu pórovitého priestoru, premenná $w^*(\boldsymbol{x}^*, t^*)$ je koncentrácia rozpustiteľnej prímesi na jednotku objemu priestoru tuhej fázy, $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}^*, t^*)$ je objemový tok rozpúšťadla na jednotku plochy pórovitého prostredia (tzv.

*rado.hurtis@gmail.com
†peter.guba@fmph.uniba.sk

Darcyho rýchlosť) a $p^*(\boldsymbol{x}^*,t^*)$ predstavuje tlak v kvapalnej fáze.[1] Bezrozmerný parameter ϕ vyjadruje pórovitosť prostredia. Reakčná rýchlostná konštanta k^* a stechiometrická konštanta ν charakterizujú chemickú reakciu medzi rozpúšťadlom a prímesou. Parameter μ^* určuje dynamickú viskozitu kvapalnej fázy a permeabilita $\kappa^*(w^*)$ je funkcia koncentrácie rozpustiteľnej prímesi.

Poloha v pórovitom prostredí $\boldsymbol{x}^* = (x^*,y^*)^T$ sa uvažuje na oblasti

$$-\infty \le x^* \le \infty, \quad -\infty \le y^* \le \infty \quad \text{pre} \quad t^* \ge 0.$$

Koncentrácia rozpúšťadla c^* a prímesi w^* spĺňa nasledovné hraničné podmienky. Ďaleko proti prúdu charakterizovaného rýchlostným poľom $\boldsymbol{u}^*$ ide koncentrácia rozpúšťadla k predpísanej konštante $c^*_{-\infty}$ a prímes je úplne rozpustená, t. j.

$$c^* \to c^*_{-\infty}, \quad w^* \to 0 \quad \text{pre} \quad x^* \to -\infty. \quad \text{(2a,b)}$$

Ďaleko po prúde je rozpúšťadlo úplne spotrebované a koncentrácia prímesi ide k predpísanej konštante w^*_∞, t. j.

$$c^* \to 0, \quad w^* \to w^*_\infty \quad \text{pre} \quad x^* \to \infty. \quad \text{(2c,d)}$$

2.1 Základný stav

Pre základný stav v modeli reaktívneho prúdenia predpokladáme homogénny jednosmerný tok riadený rýchlostným poľom

$$\bar{\boldsymbol{u}}^* = (\bar{u}^*,\bar{v}^*)^T = (U^*,0)^T, \quad (3)$$

kde U^* je daná konštanta.[2] Inými slovami, uvedené rýchlostné pole má prúdočiary rovnobežné s osou x^* a profil rýchlostného poľa nezávisí od y^* a t^*. V základnom stave ďalej uvažujeme, že funkcie $\bar{c}^*, \bar{w}^*$ a $\bar{p}^*$ sú závislé len od súradnice x^* a času t^*.

Na získanie riešenia pre základný stav zavedieme podobnostnú premennú ξ^* definovanú ako $\xi^*(x^*,t^*) = x^* - V^*t^*$, kde neznáma konštanta V^* predstavuje fázovú rýchlosť. Ide o tzv. sebepodobné riešenie vo forme postupujúcej vlny. Koncentráciu rozpúšťadla a prímesi a tlak definujeme ďalej ako funkcie premennej ξ^*, t. j. $\bar{c}^*(\xi^*) = \bar{c}^*(x^*,t^*)$, $\bar{w}^*(\xi^*) = \bar{w}^*(x^*,t^*)$ a $\bar{p}^*(\xi^*) = \bar{p}^*(x^*,t^*)$.

Po vyriešení systému obyčajných diferenciálnych rovníc dostávame profily laminárneho prúdenia v tvare

$$\bar{c}^*(\xi^*) = c^*_{-\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta^*\xi^*}}, \quad \text{(4a)}$$

$$\bar{w}^*(\xi^*) = w^*_\infty\frac{\mathrm{e}^{\beta^*\xi^*}}{1+\mathrm{e}^{\beta^*\xi^*}}, \quad \text{(4b)}$$

$$\bar{p}^*(\xi^*) = \bar{p}^*_{-\infty} - \mu^*U^*\int_{-\infty}^{\xi^*}\frac{\mathrm{d}s^*}{\kappa^*(\bar{w}^*(s^*))}, \quad \text{(4c)}$$

kde $\beta^{*-1} \equiv V^*/(k^*w^*_\infty\alpha)$, $\alpha \equiv c^*_{-\infty}/[\nu(1-\phi)w^*_\infty]$ a $V^* \equiv U^*/(\phi+\alpha^{-1})$. Parameter β^{*-1} sa nazýva Damköhlerova dĺžka reakčného frontu, α vyjadruje kapacitné číslo rozpúšťadla a $\bar{p}^*_{-\infty}$ je taká predpísaná konštanta, ktorá spĺňa hraničnú podmienku $\bar{p}^*(\xi^*) \to \bar{p}^*_{-\infty}$ pre $\xi^* \to -\infty$.

2.2 Zbezrozmernenie

Rovnice reaktívneho prúdenia (1a–d) možno zbezrozmerniť vhodným výberom rozmerných škál [6] pre bezrozmerné premenné $c(\boldsymbol{x},t)$, $w(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ a $p(\boldsymbol{x},t)$ na tvar

$$\alpha\left[\phi\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{u}c)\right] = -cw, \quad \text{(5a)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -cw, \quad \text{(5b)}$$

$$\boldsymbol{u} = -\kappa(w)\boldsymbol{\nabla}p, \quad \text{(5c)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0. \quad \text{(5d)}$$

Prislúchajúce bezrozmerné hraničné podmienky sú

$$c \to 1, \quad w \to 0 \quad \text{pre} \quad x \to -\infty, \quad \text{(6a,b)}$$

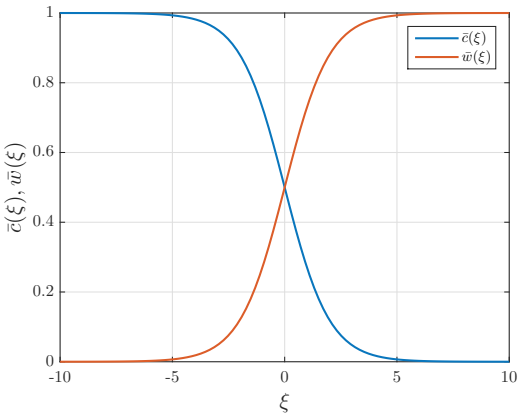
$$c \to 0, \quad w \to 1 \quad \text{pre} \quad x \to \infty. \quad \text{(6c,d)}$$

Analogicky aplikáciou rozmerných škál vyjadríme bezrozmerný tvar profilov základného stavu (3) a (4a–c) pre bezrozmernú premennú $\xi(x,t)$:

$$\bar{c}(\xi) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\xi}}, \quad \text{(7a)}$$

[1] Symbolom * sú označené rozmerné veličiny a operátory.

[2] Symbolom $^-$ sú označené veličiny charakterizujúce základný stav.



Obr. 1: Priebeh profilov základného stavu $\bar{c}(\xi)$ a $\bar{w}(\xi)$ bezrozmerného modelu reaktívneho prúdenia (5) a (6) na intervale $[-10, 10]$.

$$\bar{w}(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{1+\mathrm{e}^{\xi}}, \tag{7b}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}} = (\phi + \alpha^{-1}, 0)^T, \tag{7c}$$

$$\bar{p}(\xi) = \bar{p}_{-\infty} - (\phi + \alpha^{-1}) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\mathrm{d}s}{\kappa(\bar{w}(s))}. \tag{7d}$$

3 Poruchy základného stavu

Vo všeobecnosti poruchy predstavujú odchýlky $\hat{f}(\xi, y, t)$ od základného stavu, ktoré okrem premennej ξ závisia aj od polohovej premennej y a času t.[3] Uvažujme riešenie bezrozmerného modelu (5), ktoré je superpozíciou stacionárneho riešenia pre základný stav (premenné $\bar{f}$) a poruchy základného stavu (premenné $\epsilon\hat{f}$) v tvare

$$c = \bar{c}(\xi) + \epsilon\hat{c}(\xi, y, t), \tag{8a}$$

$$w = \bar{w}(\xi) + \epsilon\hat{w}(\xi, y, t), \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}(\xi) + \epsilon\hat{\boldsymbol{u}}(\xi, y, t), \tag{8c}$$

$$p = \bar{p}(\xi) + \epsilon\hat{p}(\xi, y, t), \tag{8d}$$

kde $0 < \epsilon \ll 1$ meria amplitúdu poruchy. Vzťah (8c) môžeme ekvivalentne zapísať po zložkách

$$u = \bar{u}(\xi) + \epsilon\hat{u}(\xi, y, t),$$

$$v = \bar{v}(\xi) + \epsilon\hat{v}(\xi, y, t).$$

Po substitúcii vzťahov (8a–c) do reakčných rovníc (5a) a (5b) a vzťahov (8c) a (8d) do Darcyho rovníc (5c) a (5d), linearizácii a zjednodušení dostávame systém pre poruchy $\hat{c}$, $\hat{w}$ a $\hat{p}$ v tvare

$$\alpha\left[\phi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\hat{c} + \bar{u}\frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \hat{u}\frac{\mathrm{d}\bar{c}}{\mathrm{d}\xi}\right] = -\bar{c}\hat{w} - \hat{c}\bar{w}, \tag{9a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\hat{w} = -\bar{c}\hat{w} - \hat{c}\bar{w}, \tag{9b}$$

$$\kappa(\bar{w})\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\kappa(\bar{w})}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = -\left.\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}w}\right|_{w=\bar{w}} \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2}, \tag{9c}$$

kde deriváciu $\mathrm{d}\bar{p}/\mathrm{d}\xi$ možno vyjadriť zo vzťahu (7d) pre tlak základného stavu.

Poruchové premenné $\hat{c}$ a $\hat{w}$ spĺňajú nasledovné hraničné podmienky, ktoré dostávame z podmienok (6) a tvaru riešení (8a) a (8b):

$$\hat{c} \to 0, \quad \hat{w} \to 0 \quad \text{pre} \quad \xi \to -\infty, \tag{10a,b}$$

$$\hat{c} \to 0, \quad \hat{w} \to 0 \quad \text{pre} \quad \xi \to \infty. \tag{10c,d}$$

3.1 Normálne módy porúch

Predpokladajme rovnako ako v [3, 6], že poruchy sa dajú rozložiť na nezávislé komponenty a módy meniace sa v čase t. Potom rozklad poruchovej funkcie $\hat{f}(\xi, y, t)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\hat{f}(\xi, y, t) = \tilde{f}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} + \text{c.c.}, \tag{11}$$

kde funkcia $\tilde{f}(\xi) \in \mathbb{C}$ reprezentuje amplitúdovú funkciu a funkcia $\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} \in \mathbb{C}$ komplexnú fázu poruchy $\hat{f}(\xi, y, t)$.[4] Pre parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ platí $\lambda = \lambda_R + \mathrm{i}\lambda_I$, kde reálna časť λ_R parametra λ je časová rýchlosť rastu ($\lambda_R > 0$) alebo poklesu ($\lambda_R < 0$) poruchy a imaginárna časť λ_I parametra λ vyjadruje frekvenciu poruchy. Parameter k je vlnové číslo v smere y a c.c. (complex conjugate)

[3] Symbolom $\hat{}$ sú označené veličiny charakterizujúce poruchu základného stavu.

[4] Symbolom $\tilde{}$ sú označené veličiny charakterizujúce amplitúdu poruchy základného stavu.

predstavuje komplexne združenú funkciu k funkcii $\tilde{f}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}$.

Uvažovaním rozkladu poruchových funkcií na normálne módy (11) sformulujeme z rovníc (9a–c) problém pre amplitúdové funkcie linearizovaných porúch základného stavu v tvare

$$\alpha[\phi(\lambda-D)\tilde{c}+\bar{u}D\tilde{c}+\tilde{u}D\bar{c}] = -\bar{c}\tilde{w}-\tilde{c}\bar{w}, \quad (12a)$$

$$(\lambda-D)\tilde{w} = -\bar{c}\tilde{w}-\tilde{c}\bar{w}, \quad (12b)$$

$$\kappa(\bar{w})D\left(\frac{1}{\kappa(\bar{w})}D\tilde{u}\right)-k^2\tilde{u} = -k^2\bar{u}\frac{1}{\kappa(\bar{w})}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}w}\bigg|_{w=\bar{w}}\tilde{w}, \quad (12c)$$

kde operátor derivácie $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$. Premenné $\tilde{c}$ a $\tilde{w}$ spĺňajú hraničné podmienky

$$\tilde{c}\to 0, \quad \tilde{w}\to 0 \quad \text{pre} \quad \xi\to-\infty, \quad (13a,b)$$

$$\tilde{c}\to 0, \quad \tilde{w}\to 0 \quad \text{pre} \quad \xi\to\infty. \quad (13c,d)$$

Máme odvodený systém rovníc (12a–c) s podmienkami (13) pre amplitúdové funkcie $\tilde{c}$, $\tilde{w}$ a $\tilde{u}$ a parametre λ a k. Z riešenia tohto problému možno popísať lineárnu stabilitu modelu reaktívneho prúdenia (1) a (2). Uvedený parameter λ ovplyvňuje časovú lineárnu stabilitu a parameter k polohovú lineárnu stabilitu vzhľadom na smer y. Z pohľadu stability reaktívneho prúdenia nás zaujíma časová stabilita porúch, ktorá sa dá zistiť analýzou normálnych módov porúch vzhľadom na čas t. Pre $\lambda_R > 0$ sa ľubovoľná porucha základného stavu s rastúcim časom exponenciálne zväčšuje, a to vedie k časovo nestabilnému reaktívnemu prúdeniu; pre $\lambda_R = 0$ sa porucha s rastúcim časom nemení, čiže ide o neutrálne stabilné prúdenie; a pre $\lambda_R < 0$ ľubovoľná porucha základného stavu postupom času zaniká, a teda reaktívne prúdenie je stabilné.

4 Numerický prístup

Uvažujme diskretizáciu spojitej oblasti $\xi \in \mathbb{R}$ na množinu $n+1$ ľubovoľných kolokačných bodov $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ na intervale $[a,b]$ takých, že platí $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme diskretizované profily základného stavu $\bar{c}(\xi)$ a $\bar{w}(\xi)$ a amplitúdové funkcie $\tilde{c}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi)$ a $\tilde{u}(\xi)$ na uvažovanej množine kolokačných bodov v tvare

$$\bar{\boldsymbol{c}} = (\bar{c}(\xi_0), \bar{c}(\xi_1), \ldots, \bar{c}(\xi_n))^T, \quad (14a)$$

$$\bar{\boldsymbol{w}} = (\bar{w}(\xi_0), \bar{w}(\xi_1), \ldots, \bar{w}(\xi_n))^T, \quad (14b)$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = (\tilde{c}(\xi_0), \tilde{c}(\xi_1), \ldots, \tilde{c}(\xi_n))^T, \quad (14c)$$

$$\tilde{\boldsymbol{w}} = (\tilde{w}(\xi_0), \tilde{w}(\xi_1), \ldots, \tilde{w}(\xi_n))^T, \quad (14d)$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\xi_0), \tilde{u}(\xi_1), \ldots, \tilde{u}(\xi_n))^T. \quad (14e)$$

Za množinu kolokačných bodov $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ zoberieme Čebyševove body $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ preškálované na interval $[a,b]$ vzťahom

$$\xi_j = \frac{b-a}{2}\zeta_j + \frac{a+b}{2}, \qquad j = 0,1,\ldots,n, \quad (15)$$

v prípade Hermitových bodov použijeme transformáciu $\xi_j = (b-a)\zeta_j/2\zeta_n + (a+b)/2$ (viď [9, 11]).

Rovnice (12) diskretizujeme na systém $3n+3$ rovníc na množine Čebyševových bodov ξ_j, resp. Hermitových bodov v tvare

$$\alpha(\bar{u}-\phi)\frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\xi_j} + \bar{w}(\xi_j)\tilde{c}(\xi_j) + \bar{c}(\xi_j)\tilde{w}(\xi_j)$$

$$+\alpha\frac{\mathrm{d}\bar{c}}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\xi_j}\tilde{u}(\xi_j) = -\alpha\phi\lambda\tilde{c}(\xi_j), \quad (16a)$$

$$\bar{w}(\xi_j)\tilde{c}(\xi_j) - \frac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\xi_j} + \bar{c}(\xi_j)\tilde{w}(\xi_j) = -\lambda\tilde{w}(\xi_j), \quad (16b)$$

$$\frac{k^2\bar{u}}{\kappa(\bar{w}(\xi_j))}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}w}\bigg|_{w=\bar{w}(\xi_j)}\tilde{w}(\xi_j) + \frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi^2}\bigg|_{\xi=\xi_j} - k^2\tilde{u}(\xi_j)$$

$$-\frac{1}{\kappa(\bar{w}(\xi_j))}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}w}\bigg|_{w=\bar{w}(\xi_j)}\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\xi_j}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=\xi_j} = 0, \quad (16c)$$

kde $j = 0,1,\ldots,n$ a príslušné hraničné podmienky v bodoch ξ_0 a ξ_n sú

$$\tilde{c}(\xi_0) = 0, \quad \tilde{w}(\xi_0) = 0, \quad (17a,b)$$

$$\tilde{c}(\xi_n) = 0, \quad \tilde{w}(\xi_n) = 0. \quad (17c,d)$$

Diskretizované profily základného stavu a amplitúdové funkcie sú takto definované na množine preškálovaných Čebyševových (Hermitových) bodov na intervale $[a,b]$. Na základe vzťahu (15)

pre funkciu ξ_j závislú od premennej ζ_j však tieto diskretizované profily a amplitúdové funkcie môžeme ekvivalentne definovať aj na pôvodnom definičnom intervale Čebyševových, resp. Hermitových bodov nasledovne:

$$\bar{C}(\zeta_j) = \bar{c}(\xi_j), \quad \bar{W}(\zeta_j) = \bar{w}(\xi_j), \tag{18a,b}$$

$$\tilde{C}(\zeta_j) = \tilde{c}(\xi_j), \quad \tilde{W}(\zeta_j) = \tilde{w}(\xi_j), \quad \tilde{U}(\zeta_j) = \tilde{u}(\xi_j), \tag{18c–e}$$

kde $j = 0, 1, \ldots, n$, ktorých vektorový zápis je

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \Big(\bar{C}(\zeta_0), \bar{C}(\zeta_1), \ldots, \bar{C}(\zeta_n)\Big)^T, \tag{19a}$$

$$\bar{\boldsymbol{W}} = \Big(\bar{W}(\zeta_0), \bar{W}(\zeta_1), \ldots, \bar{W}(\zeta_n)\Big)^T, \tag{19b}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \Big(\tilde{C}(\zeta_0), \tilde{C}(\zeta_1), \ldots, \tilde{C}(\zeta_n)\Big)^T, \tag{19c}$$

$$\tilde{\boldsymbol{W}} = \Big(\tilde{W}(\zeta_0), \tilde{W}(\zeta_1), \ldots, \tilde{W}(\zeta_n)\Big)^T, \tag{19d}$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \Big(\tilde{U}(\zeta_0), \tilde{U}(\zeta_1), \ldots, \tilde{U}(\zeta_n)\Big)^T. \tag{19e}$$

Vzťahy pre derivácie profilov $\bar{C}(\zeta_j)$ a $\bar{W}(\zeta_j)$ v Čebyševových (Hermitových) bodoch na ich definičnom intervale odvodíme pomocou (18a) a (18b) v tvare

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{C}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} = \left.\frac{\mathrm{d}\bar{c}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_j} \left.\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j}, \tag{20a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} = \left.\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_j} \left.\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j}, \tag{20b}$$

podobne využitím vzťahov (18c-e) derivácie funkcií $\tilde{C}(\zeta_j)$, $\tilde{W}(\zeta_j)$ a $\tilde{U}(\zeta_j)$ sú

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{C}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} = \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_j} \left.\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j}, \tag{20c}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} = \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_j} \left.\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j}, \tag{20d}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} = \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_j} \left.\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j}, \tag{20e}$$

kde $j = 0, 1, \ldots, n$. Pre deriváciu funkcie ξ_j v bode ζ_j za predpokladu transformácie (15) pre Čebyševovu metódu platí

$$\left.\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} = \frac{b-a}{2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{21}$$

pre Hermitovu metódu má tento vzťah tvar $(b-a)/2\zeta_n$.

Uvedené diskretizované rovnice (16) môžeme transformovať pomocou nových premenných (18) a ich derivácií (20) na systém rovníc definovaných na množine Čebyševových bodov ζ_j, resp. Hermitových bodov v tvare

$$\frac{\alpha}{r}(\bar{u}-\phi)\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{C}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} + \bar{W}(\zeta_j)\tilde{C}(\zeta_j) + \bar{C}(\zeta_j)\tilde{W}(\zeta_j) + \frac{\alpha}{r}\left.\frac{\mathrm{d}\bar{C}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} \tilde{U}(\zeta_j) = -\alpha\phi\lambda\tilde{C}(\zeta_j), \tag{22a}$$

$$\bar{W}(\zeta_j)\tilde{C}(\zeta_j) - \frac{1}{r}\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} + \bar{C}(\zeta_j)\tilde{W}(\zeta_j) = -\lambda\tilde{W}(\zeta_j), \tag{22b}$$

$$\frac{k^2\bar{u}}{\kappa(\bar{W}(\zeta_j))}\left.\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}W}\right|_{W=\bar{W}(\zeta_j)} \tilde{W}(\zeta_j) - \frac{1}{r^2\kappa(\bar{W}(\zeta_j))}\left.\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}W}\right|_{W=\bar{W}(\zeta_j)} \left.\frac{\mathrm{d}\bar{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_j} + \frac{1}{r^2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\tilde{U}}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\zeta_j} - k^2\tilde{U}(\zeta_j) = 0, \tag{22c}$$

kde $j = 0, 1, \ldots, n$ a konštanta r vyplýva zo vzťahu (21). Pre hraničné podmienky v Čebyševových (Hermitových) bodoch ζ_0 a ζ_n platí

$$\tilde{C}(\zeta_0) = 0, \quad \tilde{W}(\zeta_0) = 0, \tag{23a,b}$$

$$\tilde{C}(\zeta_n) = 0, \quad \tilde{W}(\zeta_n) = 0. \tag{23c,d}$$

Všetky derivácie neznámych funkcií $\tilde{C}$, $\tilde{W}$ a $\tilde{U}$ v Čebyševových, resp. Hermitových bodoch aproximujeme prostredníctvom Čebyševových, resp. Hermitových diferenčných matíc [9, 11].

Diskretizovaný systém rovníc (22) na množine Čebyševových (Hermitových) bodov môžeme previesť na zovšeobecnený vlastnohodnotový problém

$$A\boldsymbol{f} = \lambda B\boldsymbol{f}, \tag{24}$$

kde matice $A, B \in \mathbb{R}^{(3n+3)\times(3n+3)}$, vlastná hodnota $\lambda \in \mathbb{C}$ a prislúchajúci vlastný vektor $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{3n+3}$ pre ľubovoľný parameter $k \in \mathbb{R}$. Vlastný vektor $\boldsymbol{f}$ je zložený z diskretizovaných funkcií $\tilde{C}$, $\tilde{W}$ a $\tilde{U}$.

Na uvedený vlastnohodnotový problém (24) teraz aplikujeme hraničné podmienky (23). Vektor $\boldsymbol{f}$ tak obsahuje nulové hodnoty v riadkoch

1, $n+1$, $n+2$ a $2n+2$. Násobenie matíc A a B týmto vektorom vo vzťahu (24) spôsobí, že stĺpce 1, $n+1$, $n+2$ a $2n+2$ sa v oboch maticiach vynulujú, a teda ich z matíc A a B môžeme odstrániť. Keďže hodnoty $\tilde{C}(\zeta_0)$, $\tilde{C}(\zeta_n)$, $\tilde{W}(\zeta_0)$ a $\tilde{W}(\zeta_n)$ predpísané hraničnými podmienkami sú známe, ďalej už nepotrebujeme rovnice (22a) a (22b) pre $j=0$ a $j=n$, a preto môžeme príslušné riadky 1, $n+1$, $n+2$ a $2n+2$ z matíc A a B úplne vynechať. Na základe toho vytvoríme $(3n-1)\times 1$ vektor $\tilde{\boldsymbol{f}}$ zo zložiek vektora $\boldsymbol{f}$ vynechaním daných hodnôt $\tilde{C}(\zeta_0)$, $\tilde{C}(\zeta_n)$, $\tilde{W}(\zeta_0)$ a $\tilde{W}(\zeta_n)$. Z matíc A a B odstránením riadkov a stĺpcov 1, $n+1$, $n+2$ a $2n+2$ skonštruujeme $(3n-1)\times(3n-1)$ matice $\tilde{A}$ a $\tilde{B}$. Diskretizovaný systém rovníc (22) po zahrnutí hraničných podmienok (23) môžeme napísať vo forme

$$\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{f}} = \lambda \tilde{B}\tilde{\boldsymbol{f}}. \tag{25}$$

Problém lineárnej stability (12) a (13) sme previedli na zovšeobecnený vlastnohodnotový problém (25), ktorý vyriešime pre Čebyševovu a Hermitovu kolokačnú metódu v systéme MATLAB využitím funkcie `eig`.

4.1 Výsledky pre prípad konštantnej permeability

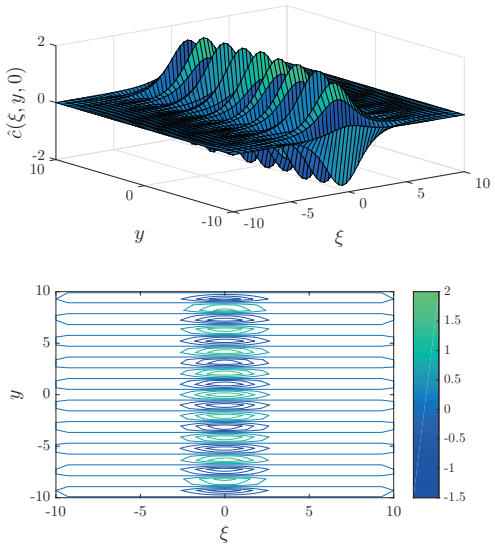
Uvažujme konštantný vzťah funkcie permeability

$$\kappa(w) = \frac{1}{1+\delta}, \tag{26}$$

kde koncentrácia rozpustiteľnej prímesi $w \in (0,1)$ a parameter $\delta > 0$.

Po implementácii Čebyševovej a Hermitovej spektrálnej metódy na problém (12) a (13) s permeabilitou (26) a parametrami $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$ na intervale $[-10,10]$ dostávame v oboch prípadoch dominantnú reálnu vlastnú hodnotu λ_R, ktorá je nulová pre vlnové čísla $k > 0$. Amplitúdové funkcie $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{v}(\xi)$ a $\tilde{p}(\xi)$ sú nulové, a teda aj linearizované poruchy pre rýchlostné a tlakové pole. Získaná poruchová funkcia $\tilde{c}(\xi)$ je znázornená na obrázku 2 v čase $t = 0$.

Na základe numerických výsledkov pozorujeme, že pre koncentračné polia c a w sa objavujú poruchy, ktoré sú v čase približne konštantné. Pre rýchlostné a tlakové pole sú linearizované poruchy základného stavu zanedbateľné. Preto v zmysle lineárnej stability ide o neutrálne stabilné prúdenie.



Obr. 2: Priebeh poruchovej funkcie $\hat{c}(\xi,y,t)$ pre oblasť $[\xi,y]$ na štvorci $[-10,10]\times[-10,10]$ a čas $t=0$ pre vlnové čísla $k>0$ a pre príslušnú dominantnú reálnu vlastnú hodnotu $\lambda_R \approx 0$ problému (25) s permeabilitou (26), $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$ aplikovaním Hermitovej metódy pre $n = 50$.

4.2 Výsledky pre prípad exponenciálne klesajúcej permeability

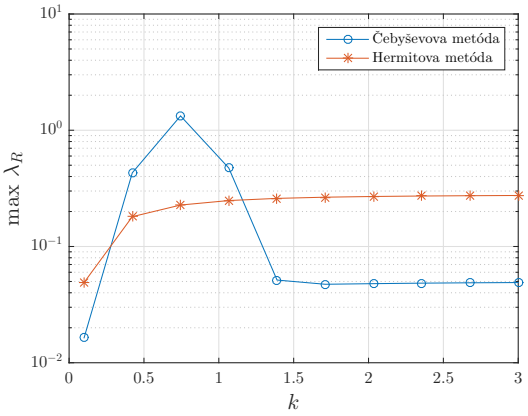
Uvažujme exponenciálny vzťah funkcie permeability v tvare

$$\kappa(w) = \mathrm{e}^{-\delta w}, \tag{27}$$

kde koncentrácia rozpustiteľnej prímesi $w \in (0,1)$ a parameter $\delta > 0$ vyjadruje rýchlosť poklesu permeability κ vzhľadom na w. Vzťah (27) je klesajúcou funkciou premennej w. Inak povedané, čím viac sa znižuje koncentrácia rozpustiteľnej prímesi, t. j. rozpúšťanie prímesi sa zvyšuje, tak tým viac permeabilita exponenciálne rastie.

V tomto prípade výsledky získané aplikovaním Čebyševovej a Hermitovej metódy sa navzájom líšia. Pri riešení Čebyševovou metódou sa objavujú tzv. falošné vlastné hodnoty [1], ktoré súvisia s nestabilitou tejto metódy. Hermitova metóda sa javí ako stabilnejšia pre problém (12) a (13), ktorý je definovaný na nekonečnej oblasti, vďaka špeciálnej konštrukcii diferenčných matíc [11], ktoré sú vhodné na aproximáciu derivácií na neohraničenom definičnom obore.

Na obrázku 3 sú zobrazené dominantné vlastné



Obr. 3: Dominantné reálne vlastné hodnoty λ_R problému (25) s permeabilitou (27), $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$ na intervale $[-10,10]$ v závislosti od vlnového čísla k pre $n = 20$.

Spektrálna metóda	max λ_R	
	$k = 0,1$	$k = 3$
Čebyševova	0,0164	0,049
Hermitova	0,049	0,2747

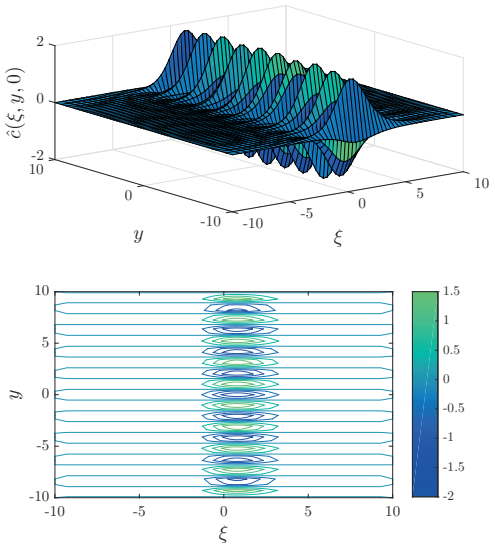
Tabuľka 1: Dominantné reálne vlastné hodnoty λ_R problému (25) s permeabilitou (27), $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$ pre vlnové čísla $k = 0,1$ a $k = 3$ na intervale $[-10,10]$ pre $n = 20$. Pre $k > 3$ dominantné reálne vlastné hodnoty ďalej asymptoticky rastú.

hodnoty pre niekoľko módov porúch. Môžeme vidieť, že Čebyševova spektrálna metóda sa správa veľmi nestabilne pre malé k na rozdiel od Hermitovej metódy. Obe metódy však zhodne potvrdzujú existenciu kladnej dominantnej reálnej vlastnej hodnoty λ_R pre vlnové čísla $k > 0$. Priebeh poruchovej funkcie pre $\hat{c}(\xi, y, t)$ sme znázornili pre $t = 0$ na obrázku 4.

Teda pri exponenciálne klesajúcej permeabilite vznikajú pre rôzne módy poruchy laminárneho prúdenia v koncentračnom, rýchlostnom a tlakovom poli, ktoré sa s rastúcim časom ďalej zväčšujú, a to spôsobuje nestabilitu postupujúceho reakčného frontu.

5 Využitie systému COMSOL Multiphysics

V systéme COMSOL Multiphysics numericky simulujeme bezrozmerný model reaktívneho prúdenia (5) a (6) definovaný na oblasti štvorca $L_x \times$



Obr. 4: Priebeh poruchovej funkcie $\hat{c}(\xi, y, t)$ pre oblasť $[\xi, y]$ na štvorci $[-10,10] \times [-10,10]$ a čas $t = 0$ pre vlnové číslo $k = 3$ a pre príslušnú dominantnú reálnu vlastnú hodnotu $\lambda_R \approx 0,4542$ problému (25) s permeabilitou (27), $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$ aplikovaním Hermitovej metódy pre $n = 50$.

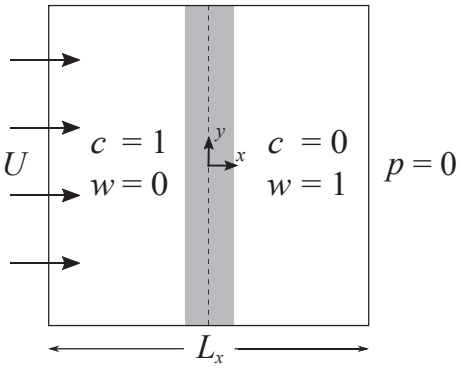
L_y vo vybraných časových úsekoch. Pri výpočte metódou konečných prvkov použijeme tzv. voľnú trojuholníkovú diskretizáciu určenú pre hydrodynamický problém s adaptívnym zjemňovaním (obr. 6). Koncentračné pole pre rozpúšťadlo c a prímes w a tlakové pole p sú aproximované lineárnymi bázovými funkciami. Na modelovanie postupujúceho reakčného frontu potrebujeme dva integrované fyzikálne moduly – *Darcy's law (dl)* a *Transport of dilute species in porous media (tds)*. Výpočty realizujeme priamou metódou s absolútnou tolerančnou konštantou 0,01 pomocou tzv. MUMPS solvera, ktorý je založený na LU rozklade.

5.1 Modul Darcy's law

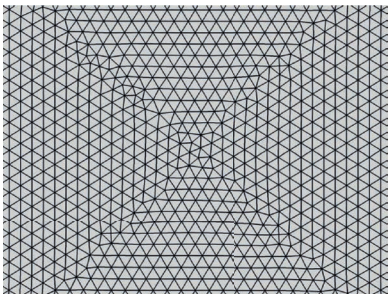
Rovnice použité v moduli *Darcy's law (dl)* pre popis prúdenia pomocou Darcyho zákona majú tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_p \rho) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = Q_m, \tag{28a}$$

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\kappa}{\mu} \boldsymbol{\nabla} p, \tag{28b}$$



Obr. 5: Schématický diagram výpočtovej oblasti pre modelovanie reaktívneho prúdenia v pórovitom médiu. Prerušovaná čiara v sivom pásme znázorňuje rozhranie postupujúceho reakčného frontu v základnom stave.



Obr. 6: Ilustrácia triangularizácie výpočtovej oblasti, ktorá má maximálnu veľkosť jedného elementu 0,268 a minimálnu 0,0008. Napríklad pre $L_x = 40$ a $L_y = 40$ obsahuje diskretizovaná definičná oblasť celkovo 56328 elementov.

kde ϵ_p je pórovitosť média a ρ je hustota kvapalnej fázy. Pre konštantnú pórovitosť, konštantnú hustotu a nulový zdrojový člen ($Q_m = 0$) je rovnica kontinuity (28a) ekvivalentná rovnici (5d).

Podmienka na hranici vtoku je U a na hranici výtoku je $p = 0$. Žiadny tok nie je prítomný na horizontálnych hraniciach uvažovanej oblasti. Za počiatočnú podmienku pre tlak zvolíme profil tlaku pre základný stav (7d).

5.2 Modul Transport of dilute species in porous media

Modul *Transport of dilute species in porous media (tds)* použijeme na modelovanie presunu rozpúšťadla a zmeny koncentrácie rozpúšťadla a rozpustiteľnej látky v pórovitom médiu, ktoré sa riadi Darcyho zákonom. Model *(tds)* je popísaný nasledujúcimi rovnicami:

$$P_{1,i}\frac{\partial c_i}{\partial t} + P_{2,i} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_i = R_i + S_i, \tag{29a}$$

$$P_{1,i} = \epsilon_p, \tag{29b}$$

$$P_{2,i} = c_i\frac{\partial \epsilon_p}{\partial t}, \tag{29c}$$

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i = -D_{e,i}\boldsymbol{\nabla}c_i + \boldsymbol{u}c_i, \tag{29d}$$

$$D_{e,i} = D_{F,i}, \tag{29e}$$

kde $\boldsymbol{\Gamma}_i$ je difúzny tok, R_i je reakčný rýchlostný člen, S_i je zdrojový člen, $D_{e,i}$ je efektívny difúzny koeficient, $D_{F,i}$ je molekulárny difúzny koeficient kvapalnej fázy i-tej zložky pre $i = 1, 2$. V rovniciach pre $i = 1, 2$ uvažujeme konštantnú pórovitosť ($\epsilon_p = 1$), $D_{F,i} = 0$ a $S_i = 0$. Potom rovnice (29a–e) pre $i = 1$ zodpovedajú rovnici pre koncentráciu rozpúšťadla (5a). Na získanie rovnice pre prímes (5b) vynecháme v rovnici (29a) pre $i = 2$ konvekčný člen $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}c_i$.

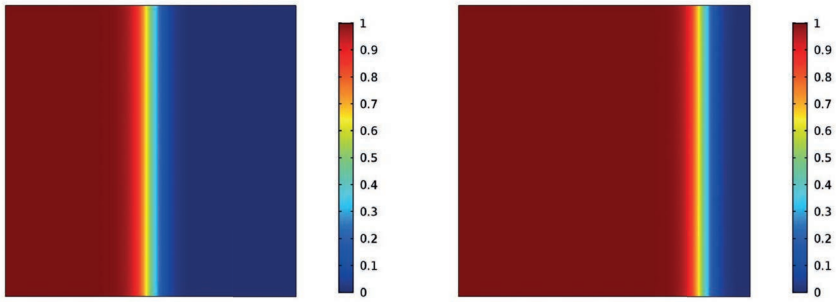
Koncentrácia rozpúšťadla a prímesi na hranici vtoku je $c = 1$, resp. $w = 0$ a na hranici výtoku je $c = 0$, resp. $w = 1$. Na horizontálnych hraniciach nie sú dané žiadne podmienky na tok. Počiatočné podmienky pre koncentráciu rozpúšťadla a rozpustiteľnej látky definujeme ako ich profily pre základný stav (7a), resp. (7b). Model *(tds)* je zviazaný s modelom *(dl)* cez rýchlostné pole $\boldsymbol{u}$.

5.3 Výsledky pre prípad konštantnej permeability

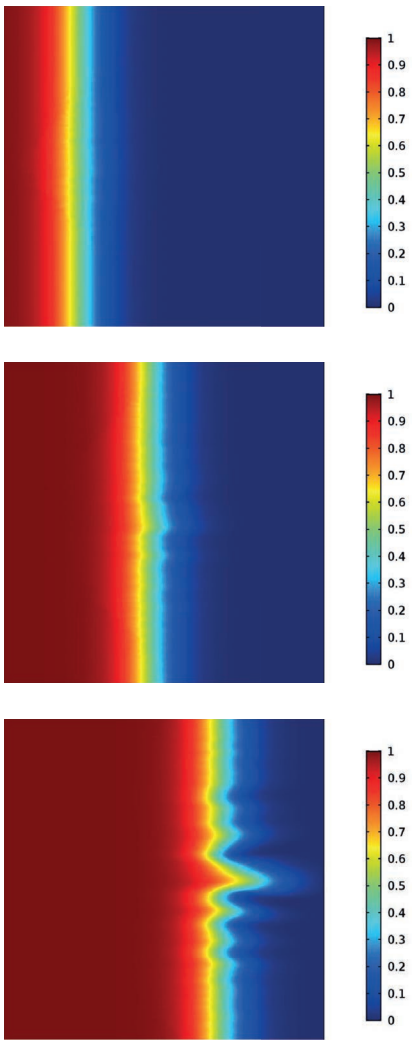
Po vykonaní výpočtov v systéme COMSOL Multiphysics pozorujeme, že pre konštantnú funkciu permeability (26) nevzniká s rastúcim časom nestabilita reaktívneho prúdenia v pórovitom médiu. Na obrázku 7 je znázornené koncentračné pole rozpúšťadla c pre čas $t = 0$ a 15.

5.4 Výsledky pre prípad exponenciálne klesajúcej permeability

Obrázok 8 ilustruje koncentračné pole rozpúšťadla c pre čas $t = 5; 10$ a 15. Z obrázka vidieť, ako sa s rastúcim časom objavujú poruchy základného stavu, ktoré formujú na rozhraní postupujúceho frontu efekt hrubnúcich prstov.



Obr. 7: Časo-priestorový vývoj koncentrácie rozpúšťadla c zobrazený pre $t = 0$ a 15 pre problém (5) a (6) s permeabilitou (26), $L_x = 40$, $L_y = 40$, $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$.



Obr. 8: Časo-priestorový vývoj koncentrácie rozpúšťadla c zobrazený pre $t = 5;10$ a 15 pre problém (5) a (6) s permeabilitou (27), $L_x = 40$, $L_y = 40$, $\alpha = 1$, $\phi = 0,11$ a $\delta = 3$.

6 Záver

V práci analyzujeme stabilitu reaktívneho prúdenia v pórovitom médiu. Na zisťovanie správania linearizovaných porúch laminárneho stavu využívame Čebyševovu a Hermitovu kolokačnú metódu, ktoré presne špecifikujú typ stability. Keďže stabilitu prúdenia vo výraznej miere ovplyvňuje permeabilita, uvažujeme dva odlišné permeabilitné vzťahy. V prípade konštantnej funkcie permeability sa postupujúci reakčný front správa s rastúcim časom neutrálne stabilne. Naopak, pri exponenciálne klesajúcom vzťahu dochádza k poruchám laminárneho prúdenia, ktoré sa postupom času stále zväčšujú.

Numerickú simuláciu reaktívneho prúdenia realizujeme v systéme COMSOL Multiphysics. Pre obe triedy permeability numerické výsledky pre stabilitu systému s linearizovanými poruchami súhlasia s výsledkami získanými metódou konečných prvkov. Navyše v prípade nestability možno získať časo-priestorový vývoj koncentračného, rýchlostného a tlakového poľa s nelineárnymi poruchami.

Literatúra

[1] Boyd, J. P.: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publications, New York, 2000

[2] Chadam, J. et al.: *Reactive Infiltration Instabilities*, J. Appl. Maths. 36 (1986), 207–221

[3] Drazin, P. G.: *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002

[4] Guba, P., Anderson, D. M.: *Diffusive and phase change instabilities in a ternary mushy layer*, J. Fluid Mech. 760 (2014), 634–669

[5] Guba, P., Anderson, D. M.: *Pattern selection in ternary mushy layers*, J. Fluid Mech. 825 (2017), 853–886

[6] Hinch, E. J., Bhatt, B. S.: *Stability of an acid front moving through porous rock*, J. Fluid Mech. 212 (1990), 279–288

[7] Kumar, A., Pramanik, S., Mishra, M.: *COMSOL multiphysics modeling in darcian and non-darcian porous media*, COMSOL Conference, Bangalore (2016)

[8] Szymczak, P., Ladd, A. J. C.: *Interacting length scales in the reactive-infiltration instability*, Geophys. Res. Lett. 40 (2013), 3036–3041

[9] Trefethen, L. N.: *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia, 2000

[10] Trefethen, L. N.: *Approximation Theory and Approximation Practice*, SIAM, Philadelphia, 2013

[11] Weideman, J. A. C., Reddy, S. C.: *A MATLAB Differentiation Matrix Suite*, ACM Trans. Math. Software 26 (2000), 465–519

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 31–40
ISBN 978-8081470936, © 2019 Patrik Mihala

Riešenie priamych a inverzných úloh transportu vody a tepla v pórovitých prostrediach

Patrik Mihala[1*]

Školiteľ: Jozef Kačur[1†]

[1]Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: V tejto práci sa zaoberáme spojeným problémom toku vody, vedenia tepla vo vode, vedenia tepla v matrici a ich vzájomnej výmene v pórovitom prostredí tvaru valca. Model rozširujeme o tepelnú rozťažnosť vody, ktorá ovplyvňuje saturáciu v póroch a viskozitu, ktorá má vplyv na hydraulickú permeabilitu.

Tok vody je určený Richardsonovou silne nelineárnou parabolickou diferenciálnou rovnicou založenou na empirickom van Genuchtenovom modeli. Vedenie tepla vo vode je silno závislé na toku vody a je previazané s vedením tepla v matrici.

Numerické modelovanie zahŕňa priame aj inverzné riešenie problému, ktoré určuje modelové parametre van Genuchtenovho modelu, koeficient hydraulickej permeability nasýteného prostredia, transverzálny a longitudálny disperzný koeficient, koeficient prenosu tepla v póroch, koeficient tepelnej vodivosti pórovitého prostredia v matrici a koeficientu prestupu tepla na hranici. Na realizáciu numerického experimentu sú potrebné iba jednoducho realizovateľné neinvazívne merania trojrozmernej vzorky tvaru valca.

Kľúčové slová: pórovité prostredie, transport vody a tepla, výmena tepla, tepelná rozťažnosť a viskozita, numerické modelovanie, inverzná úloha

1 Úvod

V dnešnej dobe sa v stavebníctve používa nespočetne veľa rôznych typov materiálov a každým rokom ich pribúda. Každý materiál je jedinečný a je potrebné vedieť jeho vlastnosti. Ešte nikdy sa nedával taký veľký dôraz na energetickú úspornosť budov. Práve preto je dnes tepelno-izolačná vlastnosť materiálov jednou z najdôležitejších vlastností. Zistilo sa, že pórovité materiály majú vďaka pórom nižšiu tepelnú vodivosť. Avšak tento typ materiálu pri kontakte s vodou túto vodu nasáva a vlhne. Vzhľadom na relatívne vysokú tepelnú vodivosť vody tento efekt pôsobí na tepelno izolačné vlastnosti nepriaznivo. Práve preto je potrebné tento jav skúmať.

V tejto práci sa zaoberáme infiltráciou vody do pórovitého materiálu a výmenou tepla tejto infiltrovanej vody s pórovitým prostredím v jeho póroch, ktorá závisí od daného toku vody, disperzie, tepelnej difúzie a ďalších faktorov. Uvažujeme tiež tepelnú rozťažnosť vody, ktorá nám mení saturáciu daného materiálu a taktiež nám mení viskozitu vody, čo zapríčiňuje zmenu hydraulickej permeability a tým ovplyvňuje samotný tok vody.

Kvôli mikroštruktúre pórov je veľmi náročné merať teplotu vody v póroch a teplotu matrice. Preto určovať výmenu tepla vody v poréznom prostredí na základe teplotného skoku je takmer nemožné. Môžeme však merať následky výmeny tepelnej energie. Preto predkladáme vhodný experimentálny scenár, ktorý nám umožňuje určovanie požadovaných modelových parametrov použitím jednoduchých meraní. K týmto meraniam sa potom pomocou inverznej úlohy snažíme priblížiť numericky a tým nájsť hľadané koeficienty.

Matematický model pozostáva z viazaného systému silne nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc elipticko-parabolického typu. Tok vody v pórovitom prostredí určuje Richardsonova diferenciálna rovnica. Vývoj tepelnej energie vo vode určuje konvekcia, molekulárna difúzia a disperzia. Okrem toho berieme do úvahy aj vplyv vonkajších síl na tok vody a tepla akými sú výška hladiny vody, vonkajšia teplota, teplota vody a gravitačná sila. Vedenie tepla v pórovitom prostredí bez vody je veľmi náročný problém. Preto uvažujeme jednoduché vedenie tepla materiálom, kde koeficient vedenia tepla získame meraním a zodpovedajúcou inverznou úlohou.

Vzhľadom na to, že sú všetky naše scenáre na vzorke tvaru valca a okrajové aj počiatočné podmienky sú radiálne symetrické, transformujeme model do cylindrických súradníc, čím redukujeme problém na dva rozmery.

V numerickej realizácii používame metódu operator splitting. Postupne po malých časových krokoch riešime najprv tok vody spolu s jeho rozťažnosťou, potom transport tepla vo vode a potom v matrici za-

*pmihala@gmail.com
†Jozef.Kacur@fmph.uniba.sk

hrňujúc výmenu tepla. V riešení toku vody používame mierne modifikovanú aproximáciu metódou celia [Celia and Bouloutas, 1990] pomocou algoritmu Hydrus [Simunek et al., 2008], ktorý programujeme v softvéri Matlab.

2 Matematický model

2.1 Tok vody

Prázdne miesto v pórovitom prostredí nazývame póry. Vďaka ich prepojenosti je umožnený tok vody týmto materiálom. Objem voľného miesta na jednotku objemu v tomto materiáli budeme nazývať porozitou a označíme ju θ_s. Pre zjednodušenie budeme uvažovať iba homogénne materiály, preto bude porozita v skúmanej oblasti vždy konštantná. Minimálne množstvo vody v póre, ktoré už mechanicky nie sme schopní dostať von, budeme nazývať reziduálnou saturáciou a označíme ju θ_r. Množstvo vody, ktoré sa aktuálne nachádza v póroch budeme nazývať saturáciou a označovať θ. Hodnoty saturácie musia ležať v intervale (θ_r, θ_s). Preto budeme používať aj pojem efektívna saturácia $\theta_{ef}(h) = \frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}$, ktorá vyjadruje akú časť póru máme aktuálne zaplnenú vodou.

Najdôležitejšia hnacia sila toku vody je kapilárny tlak, ktorý je spôsobený rozdielom povrchových napätí. Tento rozdiel spôsobuje rozdiel tlakov v jednotlivých póroch. My tento tlak preškálujeme na hydraulický tlak h, ktorý dostaneme predelením kapilárneho tlaku hustotou vody ρ a gravitačnou konštantou g. Hydraulický tlak teda bude reprezentovať výšku vodného stĺpca, zodpovedajúcemu rovnakému hydrostatickému tlaku. Vďaka preškálovaniu tlaku na výšku vodného stĺpca vieme lepšie pracovať s okrajovými podmienkami.

Rozdiel tlakov spôsobuje pohyb, ktorý je brzdený odporom prostredia. V práci budeme tento odpor nazývať hydraulickou permeabilitou K, ktorá je podľa modelu van Genuchten-Mualem [Genuchten, 1980] v silne nelineárnom vzťahu s tlakom h

$$K(h) = K_s \mathrm{j} \theta_{ef}^{\frac{1}{2}}(h)(1-(1-\theta_{ef}^{\frac{1}{m}(h)})^m)^2,$$

kde θ_{ef} je podľa tohoto modelu tiež v silne nelineárnom vzťahu s tlakom h

$$\theta_{ef}(h) = \begin{cases} (1+(\alpha h)^n)^{-m} & \text{ak } h \leq 0 \\ 1 & \text{ak } h \geq 0, \end{cases}$$

kde konštanty K_s, α, n a m reprezentujú kapilárne vlastnosti daného pórovitého prostredia. Koeficient $K_s \in (0,1)$ je koeficient hydraulickej permeability pri plne nasýtenej vzorke, $\alpha < 0$ určuje inverznú saciu silu vzduchu, $n > 1$ závisí na veľkosti pórov a $m = 1 - \frac{1}{n}$.

Tok vody q je v pórovitom prostredí daný zmenou tlaku v priestore a gravitačnou silou v smere osi z a je brzdený hydraulickou permeabilitou

$$q(h) = -K(h)(\nabla h - e_z).$$

Matematický model toku vody je určený Richardsonovou rovnicou

$$\partial_t \theta(h) - div(K(h)(\nabla h - e_z)) = 0.$$

Tok vody je však ovplyvňovaný rozťažnosťou vody, pričom zväčšenie objemu vody kvôli zmene teploty sa dá reprezentovať ako zdroj. Preto je rovnica toku vody s jej tepelnou rozťažnosťou

$$\partial_t \theta(h) - div(K(h)(\nabla h - e_z)) = \partial_t E,$$

kde E je množstvo vody, ktoré vznikne za jednotku času vplyvom tepelnej rozťažnosti. Zmena E je modelovaná obyčajnou diferenciálnou rovnicou

$$\partial_t E = \frac{\rho}{c_w} \theta (T_w - T_m) \kappa(T_w),$$

kde κ je už známy fyzikálny koeficient ktorý vyjadruje zmenu jednotkového objemu vody pri zmene jednotkovej teploty pre vodu s teplotou T_w. Ostatné koeficienty budú definované pri rovnici vedenia tepla vo vode v ďalšej kapitole.

2.2 Vedenie tepla vo vode

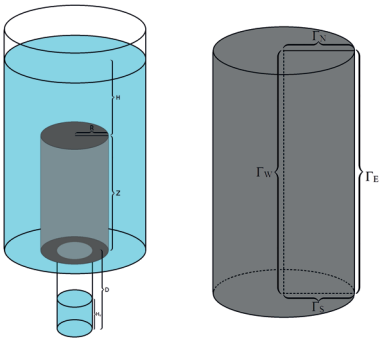
Rovnica vedenia tepla vychádza zo zákona zachovania energie a má tvar

$$c_v \partial_t(\theta T_w) - \mathrm{div}(-c_v \vec{q} T_w + (D_0 \theta + D)\nabla T_w) = \sigma\theta(T_m - T_w),$$

kde T_w je teplota vody, T_m teplota matrice, σ je koeficient prestupu tepla v póroch medzi vodou a prostredím a c_v je súčin hustoty vody a mernej tepelnej kapacity.

Člen $c_v q T_w$ popisuje konvekciu tepla, D_0 je koeficient molekulárnej difúzie a D je disperzná matica

$$D = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L (q_x)^2 + \alpha_T (q_y)^2 & (\alpha_L - \alpha_T)(q^x q^y) \\ (\alpha_L - \alpha_T)(q^x q^y) & \alpha_L (q^y)^2 + \alpha_T (q^x)^2 \end{pmatrix} \frac{1}{|\vec{q}|},$$



Obr. 1: Vzorka vo vode a hranice vzorky

kde α_L a α_T popisuje longitudálnu (pozdĺžnu) a transverzálnu (priečnu) disperziu.

Pravá strana rovnice zodpovedá výmene tepla v póroch medzi infiltrovanou vodou a samotnou matricou.

Zodpovedajúce okrajové a počiatočné podmienky budú špecifikované pri jednotlivých experimentoch.

2.3 Vedenie tepla v matrici

Pre vedenia tepla v matrici uvažujeme jednoduchý model

$$c_m \partial_t T_m - \lambda \Delta T_m = \sigma \theta (T_w - T_m),$$

kde λ je koeficient tepelnej vodivosti matrice a c_m je súčin hustoty matrice s jej mernou tepelnou kapacitou. Pravá strana rovnice modelujúca výmenu tepla v póroch je kvôli zákonu zachovania energie až na jej znamienko rovnaká ako pri vedení tepla vo vode.

3 Oblasť riešenia

V našej práci uvažujeme oblasť tvaru valca s radiálne symetrickými okrajovými aj počiatočnými podmienkami. Preto môžeme túto oblasť transformovať do cylindrických súradníc a tým redukujeme úlohu na dvojrozmerný prípad. Použijeme substitúciu $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = z$, z čoho dostaneme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Substituovaním rovnice toku vody a použitím vzťahov

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$$

dostávame

$$\begin{aligned}
&\partial_t \theta(h) - \partial_t E = \\
&\partial_x(K(h)\partial_x h) + \partial_y(K(h)\partial_y h) + \partial_z(K(h)(\partial_z h - 1)) = \\
&\partial_x\left(K(h)\partial_r h \frac{\partial r}{\partial x}\right) + \partial_y\left(K(h)\partial_r h \frac{\partial r}{\partial y}\right) \\
&+ \partial_z\left(K(h)\left(\partial_z h - 1\right)\right) = \\
&\partial_r\left(K(h)\partial_r h\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + K(h)\partial_r h \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\
&+ \partial_r\left(K(h)\partial_r h\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + K(h)\partial_r h \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \\
&+ \partial_z\left(K(h)\left(\partial_z h - 1\right)\right) = \\
&\partial_r\left(K(h)\partial_r h\right) + \frac{1}{r}K(h)\partial_r h + \partial_z\left(K(h)\left(\partial_z h - 1\right)\right) = \\
&\frac{1}{r}\partial_r\left(rK(h)\partial_r h\right) + \partial_z\left(K(h)\left(\partial_z h - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

Dostali sme rovnicu toku vody v polárnych súradniciach.

Rovnakým spôsobom získame rovnicu vedenia tepla vo vode v polárnych súradniciach

$$c_v \partial_t(\theta T_w) - \left(\frac{1}{r}\partial_r(rQT_w^r) + \partial_z QT_w^z\right) = \sigma\theta(T_w - T_m),$$

kde tepelné toky sú dané vzťahmi

$$QT_w^r = -q_r T_w + \theta(D_{1,1}\partial_r T_w + D_{1,2}\partial_z T_w + D_o\theta)$$
$$QT_w^z = -q_z Tw + \theta(D_{2,1}\partial_r T_w + D_{2,2}\partial_z T_w + D_o\theta).$$

Vedenie tepla v matrici v cylindrických súradniciach je dané touto rovnicou.

$$c_m \partial_t T_m - \lambda\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r T_m) + \partial_z(\partial_z T_m)\right) = \sigma\theta(T_m - T_w)$$

3.1 Okrajové a počiatočné podmienky

Uvažujeme valec s polomerom $R = 6$ a výškou $Z = 8$, s teplotou 90 ponorený v nádobe s väčším polomerom v časovom intervale $t \in [0, \tau]$ pod hladinou vody s teplotou 10. V praxi môžeme teplotu uvažovať v stupňoch, vzdialenosť v centimetroch a čas v sekundách. Vrchnú podstavu uvažujeme izolovanú ($q^z = QT_w^z = QT_w^z = 0$ na $\Gamma_N = \{r \in (0,R), z = Z\}$), výtok na kruhu na spodnej podstave s polovičným polomerom podstavy ($\partial_z h = 0, QT_w^z = c_v q_{out}\theta T_w, QT_m^z = 0$ na $\Gamma_{out} = \{r \in \left(0, \frac{R}{2}\right), z = 0\}$), izoláciu na vonkajšom prstenci spodnej podstavy ($q^z = QT_w^z = QT_w^z = 0$ na $\Gamma_{iso} = \{r \in \left(\frac{R}{2}, R\right), z = 0\}$) a z boku infiltráciu hydrostatickým tlakom ($h = H(t) + (Z - z), T_w = 10, QT_m^r = 0$ na $\Gamma_E = \{r = R, z \in (0, Z)\}$).

4 Numerická realizácia

V aproximačnej schéme používame priestorovú a variabilnú časovú diskretizáciu. Hodnotu $f_{i,l}^{j}$ definujeme ako hodnotu funkcie f v $l-$tom uzlovom bode od spodnej podstavy pozdĺž osi valca, $i-$tom uzlovom bode od stredu valca kolmo na jeho os a v $j-$tom časovom reze. Časovú deriváciu aproximujeme spätnou diferenciou a pomocou metódy konečných objemov náš systém integrujeme v okolí uzlových bodov (r_i, z_j) aplikovaním trojnásobného integrálu $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{l-\frac{1}{2}}}^{z_{l+\frac{1}{2}}}$, čo po numerickej aproximácii integrálov vedie na riešenie systému algebraických rovníc.

4.1 Tok vody

Systém algebraických rovníc pre tok vody po numerickom aproximovaní integrálov je

$$\frac{\left(E_{i,l}^{j+1}-E_{i,l}^{j}\right)}{\Delta t_j}=\frac{\left(\theta_{i,l}^{j+1}-\theta_{i,l}^{j}\right)}{\Delta t_j}$$
$$-\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}K_{i+\frac{1}{2},l}^{j+1}\frac{h_{i+1,l}^{j+1}-h_{i,l}^{j+1}}{(\Delta r)^2}+\frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}K_{i-\frac{1}{2},l}^{j+1}\frac{h_{i,l}^{j+1}-h_{i-1,l}^{j+1}}{(\Delta r)^2}-$$
$$-K_{i,l+\frac{1}{2}}^{j+1}\left(\frac{h_{i,l+1}^{j+1}-h_{i,l}^{j+1}}{(\Delta z)^2}-1\right)+K_{i,l-\frac{1}{2}}^{j+1}\left(\frac{h_{i,l}^{j+1}-h_{i,l-1}^{j+1}}{(\Delta z)^2}-1\right),$$

kde $K_{i+\frac{1}{2},l}^{j+1}=\frac{K_{i+1,l}^{j+1}+K_{i,l}^{j+1}}{2}$, $K_{i-\frac{1}{2},l}^{j+1}=\frac{K_{i,l}^{j+1}+K_{i-1,l}^{j+1}}{2}$, $K_{i,l+\frac{1}{2}}^{j+1}=\frac{K_{i,l+1}^{j+1}+K_{i,l}^{j+1}}{2}$ a $K_{i,l-\frac{1}{2}}^{j+1}=\frac{K_{i,l}^{j+1}+K_{i,l-1}^{j+1}}{2}$.

Tento systém rovníc je však kvôli nelineárnym vzťahom medzi saturáciou, hydraulickou permeabilitou a tlakom nelineárny. Náročnosť riešenia priamej úlohy je hlavne kvôli úzkemu postupujúcemu frontu popisujúcemu saturáciu, ktorý vzniká pri infiltrácií vody do suchej vzorky. Preto je potrebné ich linearizovať modifikovanou Newtnovou metódou Celia [Celia and Bouloutas, 1990], ktorá s iteračným krokom k linearizuje θ

$$\frac{\left(\theta_{i,l}^{j+1,k+1}-\theta_{i,l}^{j}\right)}{\Delta t_j}=C_{i,l}^{j+1,k}\frac{h_{i,l}^{j+1,k+1}-h_{i,l}^{j+1,k}}{\Delta t_j}+\frac{\left(\theta_{i,l}^{j+1,k}-\theta_{i,l}^{j}\right)}{\Delta t_j},$$

kde

$$C_{i,l}^{j+1,k}=\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h}\right|^{j+1,k}.$$

Hodnoty hydraulickej permeability a zdrojového člena E vezmeme z predchádzajúcej iterácie, čím dostávame lineárny algebraický systém

$$C_{i,l}^{j+1,k}\frac{h_{i,l}^{j+1,k+1}-h_{i,l}^{j+1,k}}{\Delta t_j}+\frac{\left(\theta_{i,l}^{j+1,k}-\theta_{i,l}^{j}\right)}{\Delta t_j}-$$
$$-\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}K_{i+\frac{1}{2},l}^{j+1,k}\frac{h_{i+1,l}^{j+1,k+1}-h_{i,l}^{j+1,k+1}}{(\Delta r)^2}+$$
$$+\frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}K_{i-\frac{1}{2},l}^{j+1,k}\frac{h_{i,l}^{j+1,k+1}-h_{i-1,l}^{j+1,k+1}}{(\Delta r)^2}$$
$$-K_{i,l+\frac{1}{2}}^{j+1,k}\left(\frac{h_{i,l+1}^{j+1,k+1}-h_{i,l}^{j+1,k+1}}{(\Delta z)^2}-\frac{1}{\Delta z}\right)+$$
$$+K_{i,l-\frac{1}{2}}^{j+1,k}\left(\frac{h_{i,l}^{j+1,k+1}-h_{i,l-1}^{j+1,k+1}}{(\Delta z)^2}-\frac{1}{\Delta z}\right)=$$
$$=\frac{E_{i,l}^{j+1,k}-E_{i,j}^{j}}{\Delta t_j}.$$

Ak je prvý člen na ľavej strane menší ako vopred zadaná tolerancia, iteráciu ukončíme a pre daný iteračný krok $\bar{k}$ položíme $\theta_{i,l}^{j+1}:=\theta_{i,l}^{j+1,\bar{k}}$. V ďalšom časovom kroku položíme za $\theta_{i,l}^{j+2,0}$ hodnotu získanú extrapoláciou interpolačného polynómu hodnôt θ v niekoľkých predchádzajúcich časových rezoch.

4.2 Teplo vo vode

Pomocou metódy konečných objemov aproximujeme aj rovnicu pre teplo vo vode. Dostávame

$$c_v\theta^j\frac{T_{w\,i,l}^{j}-T_{w\,i,l}^{j-1}}{\tau}$$
$$-\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}\left[\frac{-c_v q_{r\,i+\frac{1}{2},l}^{j}\left(T_{w\,i+1,l}^{j}+T_{w\,i,l}^{j}\right)}{2\Delta r}\right.$$
$$+\frac{D_{1,1,i+\frac{1}{2}}^{j}\left(T_{w\,i+1,l}^{j}-T_{w\,i,l}^{j}\right)}{\Delta r^2}$$
$$+D_{1,2,i+\frac{1}{2}}^{j}\frac{T_{wi+1,l+1}^{j}+T_{wi,l+1}^{j}-T_{wi+1,l-1}^{j}-T_{wi,l-1}^{j}}{4\Delta r^2}$$
$$\left.+\frac{D_0\left(\theta_{i+1,l}^{j}-\theta_{i,l}^{j}\right)}{2\Delta r}\right]$$
$$+\frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}\left[\frac{-c_v q_{r\,i-\frac{1}{2},l}^{j}\left(T_{w\,i,l}^{j}+T_{w\,i-1,l}^{j}\right)}{2\Delta r}\right.$$
$$+\frac{D_{1,1,i-\frac{1}{2}}^{j}\left(T_{w\,i,l}^{j}-T_{w\,i-1,l}^{j}\right)}{\Delta r^2}$$

$$
\begin{aligned}
&+D^j_{1,2,i-\frac{1}{2}}\frac{T^j_{wi,l+1}+T^j_{wi-1,l+1}-T^j_{wi,l-1}-T^j_{wi-1,l-1}}{4\Delta r^2}\\
&+\frac{D_0\left(\theta^j_{i,l}-\theta^j_{i-1,l}\right)}{2\Delta r}\Bigg]\\
&-\Bigg[\frac{-c_v q^j_{z\ i,l+\frac{1}{2}}\left(T^j_{w\ i,l+1}+T^j_{w\ i,l}\right)}{2\Delta z}\\
&+\frac{D^j_{2,2,l+\frac{1}{2}}\left(T^j_{w\ i,l+1}-T^j_{w\ i,l}\right)}{\Delta z^2}\\
&+D^j_{2,1,l+\frac{1}{2}}\frac{T^j_{wi+1,l+1}+T^j_{wi+1,l}-T^j_{wi-1,l+1}-T^j_{wi-1,l}}{4\Delta z^2}\\
&+\frac{D_0\left(\theta^j_{i,l+1}-\theta^j_{i,l}\right)}{2\Delta z}\Bigg]\\
&+\Bigg[\frac{-c_v q^j_{z\ i,l-\frac{1}{2}}\left(T^j_{w\ i,l}+T^j_{w\ i,l-1}\right)}{2\Delta z}\\
&+\frac{D^j_{2,2,l-frac12}\left(T^j_{w\ i,l}-T^j_{w\ i,l-1}\right)}{\Delta z^2}\\
&+D^j_{2,1,l-\frac{1}{2}}\frac{T^j_{wi+1,l}+T^j_{wi+1,l-1}-T^j_{wi-1,l}-T^j_{wi-1,l-1}}{4\Delta z^2}\\
&+\frac{D_0\left(\theta^j_{i,l}-\theta^j_{i,l-1}\right)}{2\Delta z}\Bigg]=\\
&=\sigma\theta^j_{i,l}(T^j_{m\ i,l}-T^j_{w\ i,l}),
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
D^j_{1,1,i\pm\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\alpha_L(q^j_{r\ i\pm\frac{1}{2},l})^2+\alpha_T(q^j_{z\ i\pm\frac{1}{2},l})^2\right)}{\sqrt{(q^j_{r\ i\pm\frac{1}{2},l})^2+(q^j_{z\ i\pm\frac{1}{2},l})^2}}\\
D^j_{1,2,i\pm\frac{1}{2}} &= \frac{(\alpha_L-\alpha_T)q^j_{r\ i\pm\frac{1}{2},l}q^j_{z\ i\pm\frac{1}{2},l}}{\sqrt{(q^j_{r\ i\pm\frac{1}{2},l})^2+(q^j_{z\ i\pm\frac{1}{2},l})^2}}\\
D^j_{2,1,l\pm\frac{1}{2}} &= \frac{(\alpha_L-\alpha_T)q^j_{r\ i,l\pm\frac{1}{2}}q^j_{z\ i,l\pm\frac{1}{2}}}{\sqrt{(q^j_{r\ i,l\pm\frac{1}{2}})^2+(q^j_{z\ i,l\pm\frac{1}{2}})^2}}\\
D^j_{2,2,l\pm\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\alpha_T(q^j_{r\ i,l\pm\frac{1}{2}})^2+\alpha_L(q^j_{z\ i,l\pm\frac{1}{2}})^2\right)}{\sqrt{(q^j_{r\ i,l\pm\frac{1}{2}})^2+(q^j_{z\ i,l\pm\frac{1}{2}})^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q^j_{ri\pm\frac{1}{2},l} &= -K^j_{i\pm\frac{1}{2},l}\left(\frac{\pm h^j_{i\pm1,l}\mp h^j_{i,l}}{\Delta r}\right)\\
q^j_{ri,l\pm\frac{1}{2}} &= -K^j_{i,l\pm\frac{1}{2}}\left(\frac{h^j_{i+1,l\pm1}+h^j_{i+1,l}-h^j_{i-1,l\pm1}-h^j_{i-1,l}}{4\Delta r}\right)\\
q^j_{zi\pm\frac{1}{2},l} &= -K^j_{i\pm\frac{1}{2},l}\left(\frac{h^j_{i\pm1,l+1}+h^j_{i,l+1}-h^j_{i\pm1,l-1}-h^j_{i,l-1}}{4\Delta z}-1\right)\\
q^j_{zi,l\pm\frac{1}{2}} &= -K^j_{i,l\pm\frac{1}{2}}\left(\frac{\pm h^j_{i,l\pm1}\mp h^j_{i,l}}{\Delta z}-1\right).
\end{aligned}
$$

Dostávame systém rovníc s neznámymi teplotami v uzlových bodoch. Tento systém rovníc je však už lineárny a preto ho nie je potrebné riešiť iteratívnym spôsobom. Matica systému je $9-$diagonálna, pretože každý uzlový bod je závislý iba od jeho ôsmich susedov. Preto s ňou v praxi narábame ako so špeciálnou riedkou maticou. Matica nie je symetrická a dokonca nemusí byť ani kladne definitná.

4.3 Teplo v matrici

Systém rovníc pre teplo v matrici využitím metódy konečných objemov má tvar

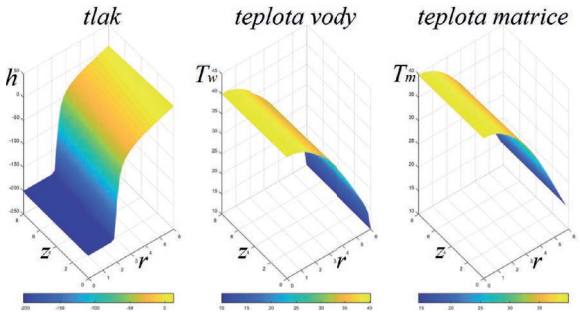
$$
\begin{aligned}
&\sigma\theta^j_{i,l}(T^j_{m\ i,l}-T^j_{w\ i,l})=c_m\frac{T^j_{m\ i,l}-T^{j-1}_{m\ i,l}}{\tau}\\
&-\frac{\lambda r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}\frac{T^j_{m\ i+1,l}-T^j_{m\ i,l}}{\Delta r^2}+\frac{\lambda r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}\frac{T^j_{m\ i,l}-T^j_{m\ i-1,l}}{\Delta r^2}\\
&-\lambda\frac{T_{m\ i,l+1}-T^j_{m\ i,l}}{\Delta z^2}+\lambda\frac{T^j_{m\ i,l}-T^j_{m\ i,l-1}}{\Delta z^2}.
\end{aligned}
$$

Tento systém rovníc je lineárny. Matica systému je $5-$diagonálna a kladne definitná.

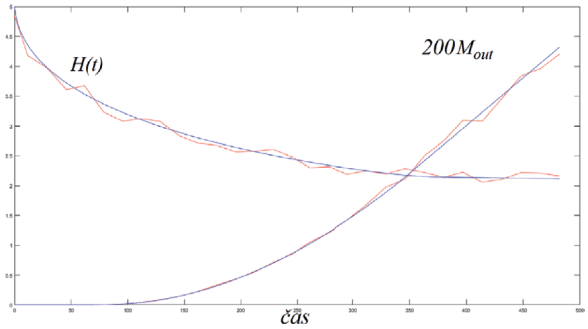
Na riešenie celého systému používame metódu operator splitting. Môžeme si všimnúť, že rovnice sú na sebe závislé. Na linearizáciu toku vody sme použili iteratívnu metódu. Preto systém riešime tak, že v každej iterácii najprv zrátame systém pre tok vody, kde potrebné hodnoty teplôt berieme z posledných vypočítaných hodnôt. Následne, keď je rozloženie tlakov už vypočítané, použijeme ich na výpočet systému pre vedenie tepla vo vode a na záver zrátame vedenie tepla v matrici. Tieto teploty opäť použijeme pre riešenie systému toku vody v d'alšej iterácii.

5 Riešenie inverzného problému

Budeme používať vzorku v tvare valca so špecifickými počiatočnými a okrajovými podmienkami pre



Obr. 2: Tlak h a teploty T_w a T_m v čase $t = 60$



Obr. 3: Časový vývoj výšky hladiny vody nad vzorkou $H(t)$ a 200 násobok výšky hladiny vody vo výtokovej nádobe M_{out} a príklad ich náhodných zašumení

každý typ parametrov, ktoré budeme určovať. Nákres vzorky ponorenej vo vode je na obrázku 1.1.

Najskôr prezentujeme riešenie (h, T_w, T_m) priamej úlohy v čase $t = 110$ na obrázku 2, kde bol suchý valec ($h^0 = -200$) s teplotou 90 ($T_w^0 = T_m^0 = 90$) ponorený do vody s teplotou 10 ($T_w = 10$ na Γ_E), pri použití nasledovných dát. Oblasť nášho riešenia je $(R \times Z)$, kde $R = 6$ a $Z = 8$. V modeli používame kapilárne vlastnosti pórovitého prostredia, ktoré sú $\theta_0 = 0.38$, $\theta_r = 0$, $K_s = 2.4\ 10^{-4}$, $\alpha = 0.0189$ a $n = 2.81$. Tieto vlastnosti zodpovedajú vápencovému pórovitému prostrediu. Koeficienty použité pri vedení tepla sú $D_0 = 0.03$, $\lambda = 0.3$, $\alpha_L = 1$, $\alpha_T = \frac{\alpha_L}{10}$, $c_v = c_m = 1$ a $\sigma = 1$.

Ďalej budeme postupne prezentovať experimentálne scenáre na určovanie koeficientov kapilárnych vlastností vzorky α, n a K_s, disperzných koeficientov α_L a α_S, koeficientu výmeny tepla medzi vodou a matricou σ, koeficientu tepelnej vodivosti matrice λ a koeficientu prestupu tepla na hranici σ_{out}.

Spoľahlivosť použitého scenára overujeme nasledovným spôsobom. Najprv vypočítame priamy problém s danými modelovými parametrami. Pozorovanú charakteristiku vezmeme v niekoľkých daných časových rezoch a zašumíme ju náhodným šumom pripočítaním náhodného čísla ku každej hodnote charakteristiky z nejakého intervalu $(-\Psi, \Psi)$. Konštantu Ψ nazývame veľkosťou šumu a zodpovedá chybe merania. Následne iteratívnym spôsobom minimalizujeme rozdiel medzi nami vytvorenou zašumenou charakteristikou a vypočítanou charakteristikou použitím funkcie *fminsearch* s nejakým dostatočne vzdialeným štartovacím bodom. Optimálne parametre zodpovedajúce minimálnej odchýlke vzhľadom na predpísanú toleranciu považujeme za vypočítané modelové parametre. Spoľahlivosť a stabilitu nášho scenára následne určujeme na základe relatívnej odchýlky nameraných dát od pôvodných vzhľadom na veľkosť šumu, pri rôznych náhodných šumoch a pri rôznych štartovacích bodoch.

5.1 Určovanie koeficientov kapilárnych vlastností vzorky $\{K_s, \alpha, n\}$

V tomto prípade uvažujeme iba rovnicu toku vody. Uvažujeme počiatočný tlak vo vzorke $h_0 = -200$ a izoláciu na Γ_N a Γ_W. Na hranici Γ_E máme predpísaný hydrostatický tlak $h = Z - z + H(t)$, kde $H(t)$ je výška vody nad valcom, čím je náš systém rozšírený o obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$\partial_t H(t) = -Q \int_{\Gamma_E} r(s) q_r(s) \mathrm{d}s,$$

s počiatočnou podmienkou $H(0) = 5$, kde Q je pomer polomeru podstavy vzorky a polomeru nádoby s vodou, v ktorej je naša vzorka ponorená. Hranica Γ_S má izoláciu pre $r \in (\frac{R}{2}, R)$. Pre $r \in (0, \frac{R}{2})$ máme na hranici Γ_S predpísaný výtok s okrajovou podmienkou $\partial_y h = 0$. Množstvo vody vo výtokovej nádobe M_{out} určujeme pomocou vzťahu

$$M_{out}(t) = 2\pi \int_0^t \int_{\Gamma_{S_1}} r q_z \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Výška vody nad valcom $H(t)$ a množstvo vody vo výtokovej nádobe v 50 časových rezoch tvorí nami pozorovanú charakteristiku, ktorú je potrebné merať na určovanie koeficientov kapilárnych vlastností vzorky. Tieto charakteristiky sú znázornené na obrázku 3 modrou farbou spolu so zašumenými meraniami znázornenými červenou.

Naše počiatočné podmienky sa skladajú zo všetkých kombinácii parametrov $\alpha \in \{-0.017, -0.02\}$, $n \in \{2.6, 3\}$ a $K_s \in \{2 \times 10^{-4}, 2.8 \times 10^{-4}\}$.

Tabuľka 1: Optimálne parametre s 5 rôznymi zašumeniami

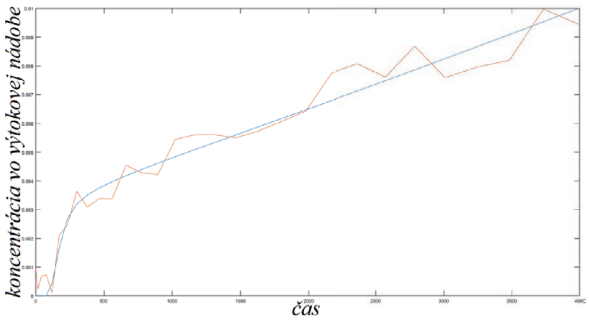
$\alpha \times 10^2$	n	$K_s \times 10^{-4}$	$\alpha \times 10^2$	n
-1.6751	2.7436	2.2427	-1.7963	2.7622
-1.8147	2.8245	2.3910	-1.8642	2.7493
-1.9693	2.7689	2.4642	-1.8103	2.8427
-1.7052	2.7941	2.3396	-1.8049	2.8058
-1.9240	2.7009	2.5464	-1.8905	2.8265

Koeficient K_s sa dá určiť aj iným spôsobom, pri plne nasýtenej vzorke. Z toho dôvodu sme inverznú úlohu riešili aj len pre parametre α a n, pričom $K_s = 2.4 \times 10^{-4}$.

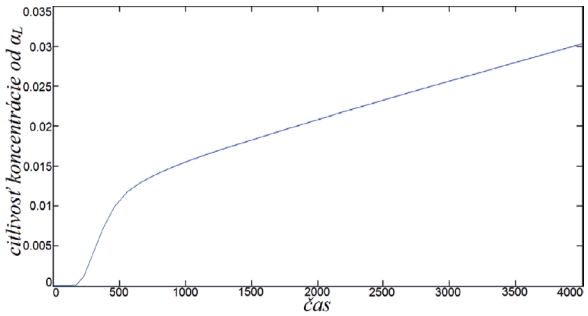
V oboch prípadoch optimálne riešenie nezáviselo na výbere štartovacieho bodu, pretože relatívna odchýlka bola menšia ako 10^{-5}. Náhodne vygenerovaný šum však spôsoboval rozdiely v optimálnom riešení. V tabuľke 1 sú uvedené optimálne parametre pre rôzne náhodné šumy s veľkosťou šumu 5% z maximálnej hodnoty. V každom riadku je uvedený výpočet pre 3 koeficienty a následne pre 2 koeficienty s pevným známym K_s.

5.2 Určovanie koeficientu pre longitudálnu disperziu α_L

V tomto prípade redukujeme náš systém na rovnicu toku vody a vedenia tepla vo vode, kde interpretujeme teplotu T_w ako koncentráciu nejakej stopovacej látky rozpustenú vo vode, ktorá sa neusádza a nereaguje s matricou. Preto uvažujeme pravú stranu nulovú, teda $sigma = 0$. V tomto modeli je valec na začiatku už čiastočne nasýtený čistou nekontaminovanou vodou: $h = -60$ a $T_w = 0$ pre $t = 0$. Na hranici Γ_E máme predpísanú dirichletovu podmienku $T_w = 1$. Ostatné podmienky sú rovnaké ako v predchádzajúcom prípade.



Obr. 4: Časový vývoj koncentrácie vody vo výtokovej nádobe



Obr. 5: Citlivosť koncentrácie vody vo výtokovej nádobe vzhľadom na disperzný koeficient α_L

Charakteristiku inverznej úlohy nám tvorí len koncentrácia vo výtokovej nádobe v niekoľkých časových rezoch. Vypočítaná koncentrácia vo výtokovej nádobe vzhľadom na čas je zobrazená na obrázku 4 modrou farbou a príklad jej zašumenej charakteristiky s veľkosťou šumu 0.001, ktorý reprezentuje štandardnú chybu pri meraní koncentrácie s odchýlkou merania jedného promile, je znázornená červenou farbou.

Tabuľka 2: Optimálne hodnoty parametra α_L

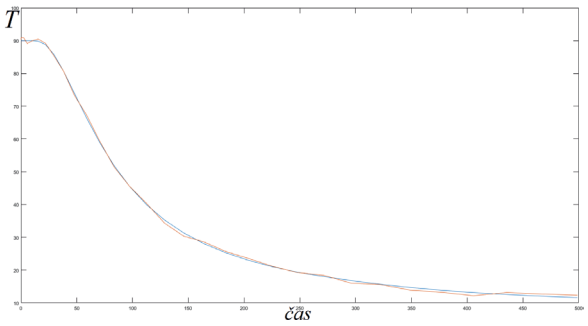
start	α_L	α_L	α_L	α_L
0.5	1.01724	0.98394	0.99226	1.00850
1.5	1.00724	0.98986	0.98927	0.99130

Citlivosť koncentrácie vody vo výtokovej nádobe vzhľadom na disperzný koeficient α_L je zobrazený na obrázku 5. Veľkosť koeficientu α_T však priamy výpočet ovplyvňuje len minimálne. Štandardne býva tento koeficient približne $10-$krát menší ako koeficient α_T. Preto ho vo všetkých výpočtoch berieme ako $\alpha_T = \frac{\alpha_L}{10}$.

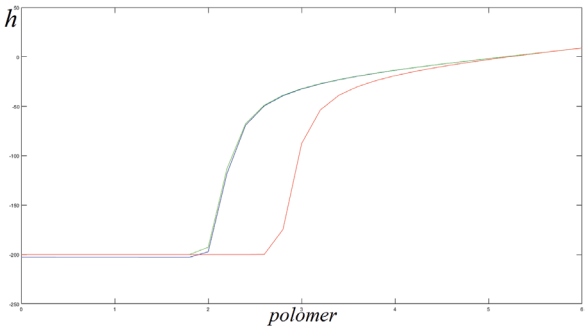
Inverzná úloha priniesla až prekvapivo stabilné výsledky. Vznikali síce lokálne minimá a teda záviselo už aj od počiatočnej podmienky, ale riešenia sa pre rôzne zašumenia líšili o menej ako 2% od pôvodnej hodnoty 1, ako môžete vidieť v tabuľke 2.

5.3 Určovanie koeficientu výmeny tepla σ a koeficientu tepelnej vodivosti λ

Určovanie koeficientu výmeny tepla sa štandardne robí na základe teplotného skoku. Meranie teploty



Obr. 6: Časový vývoj teploty v strede hornej podstavy valca pri uvažovanej dynamickej viskozite a tepelnej rozťažnosti a príklad jeho náhodného zašumenia



Obr. 7: Porovnanie rozloženia vody vo vzorke v čase $t = 110$ vo výške $z = \frac{Z}{2} = 4$

vody a teploty matrice vo vzorke je ale kvôli jej mikroštruktúre pórov veľmi náročná úloha. My ale využitím predchádzajúcich nameraných hodnôt prichádzame so scenárom, ktorý určí tento koeficient len na základe neinvazívnych meraní dôsledkov výmeny tepla pomocou inverznej úlohy.

Počiatočnú teplotu suchého valca $h = -200$ uvažujeme $T_m = T_w = 90$ pre $t = 0$. Na hranici Γ_E máme predpísanú dirichletovú podmienku $T_w = 10$, čo zodpovedá ponoreniu valca s teplotou 90 do nádoby s vodou s teplotou 10. Ostatné podmienky sú rovnaké ako v predchádzajúcich prípadoch.

Vzhľadom na meniacu sa teplotu uvažujeme aj vplyv tepla na viskozitu μ a hustotu ρ. Viskozita a hustota vody sa objavuje v koeficiente hydraulickej permeability plne nasýtenej vzorky $K_s = k\frac{\rho g}{\mu}$ a ich závislosť od teploty je známa. Pri výpočtoch vezmeme koeficient $K_s(15) = 2.4 \times 10^{-4}$, ktorý zodpovedá hydraulickej permeabilite plne nasýtenej vzorky $h = 0$ s teplotou vody $T_w = 15$ a na základe predchádzajúceho vzťahu vieme pre každú teplotu vody T_w spočítať príslušný koeficient $K_s(T_w)$, ktorý následne používame vo výpočtoch namiesto konštanty K_s.

Pri tepelnej rozťažnosti vody v plne nasýtenom póre dovolíme aj $\theta_{ef} > 1$, pričom hydraulickú permeabilitu K násobíme dostatočne veľkou penalizáciou, čo eliminuje brzdnú silu a spôsobí rozliatie nadbytočnej vody do vzorky. Vďaka tomu dosahuje efektívna saturácia len zanedbateľne väčšie hodnoty ako 1 počas celého výpočtu. Pri výpočtoch používame penalizáciu $e^{10^3 h}$, pretože každá penalizácia väčšia ako $e^{10^3 h}$ už spôsobuje rovnaký výsledok na viac ako 8 desatinných miest.

Teplotný vývoj vody vo výtokovej nádobe v čase sa ale ukázal ako nie veľmi vhodný na meranie kvôli inverzným úlohám. Jednak tento scenár nebol dostatočne stabilný, pretože aj po malom zašumení vznikali veľké odchýlky od pôvodných koeficientov, jednak v praxi je tejto vytečenej vody veľmi málo a tepelná výmena medzi výtokovou bankou a tým maličkým množstvom vody by spôsobovala obrovské nepresnosti merania.

My však prichádzame s originálnym scenárom, kde meriame teplotu v strede hornej podstavy v niekoľkých časových rezoch. Napriek tomu, že teplota vody a matrice je rozdielna, sme si všimli, že počas celého časového intervalu, na ktorom sme výpočty robili, sa tieto teploty líšili najviac o 10^{-4}. Tento jav je spôsobený vďaka úzkemu frontu, ktorý vzniká pri infiltrácii vody do vzorky. Vďaka výmene tepla v póroch teplota matrice na okraji valca klesá. Tepelná vodivosť matrice spôsobí pokles teploty matrice aj na osi valca. Ale kvôli pomaly postupujúcemu frontu zostáva malé okolie osi valca dlhý časový interval takmer suché. To spôsobuje rýchle vyrovnanie teploty malého množstva vody na osi valca. Preto zostáva teplota vody na osi valca takmer rovnaká s teplotou matrice dlhý časový interval. Túto takmer spoločnú teplotu sme ale už schopní merať.

Teplotný vývoj v strede hornej podstavy v niekoľkých časových rezoch, ktorý je zobrazený na obrázku 6 modrou farbou, vezmeme ako charakteristiku pre inverznú úlohu. Aplikujeme náhodný šum s veľkosťou 1, ktorý zodpovedá štandardnej chybe merania teploty. Príklad náhodného zašumenia dát je na obrázku 6 zobrazený červenou farbou.

Výpočty s dynamickou viskozitou aj tepelnou rozťažnosťou sa ukazujú ako časovo veľmi náročné. Preto sme skúmali efektivitu týchto javov na výsledok výpočtu priamej úlohy. Zistili sme, že viskozita relevantne ovplyvňuje výpočet, ale tepelná rozťaž-

Tabuľka 3: Štartovacie body a aproximované riešenia bez viskozity

p_{start}	p_{opt}
$[2, 0.5]$	$[0.9498, 0.09954]$
$[2, 0.5]$	$[0.9684, 0.10089]$
$[0.5, 0.5]$	$[1.0515, 0.10119]$
$[0.5, 0.5]$	$[1.0529, 0.09949]$
$[2, 0.05]$	$[1.0396, 0.10210]$
$[2, 0.05]$	$[1.0581, 0.09933]$
$[0.5, 0.05]$	$[0.9407, 0.09897]$
$[0.5, 0.05]$	$[1.0575, 0.09972]$

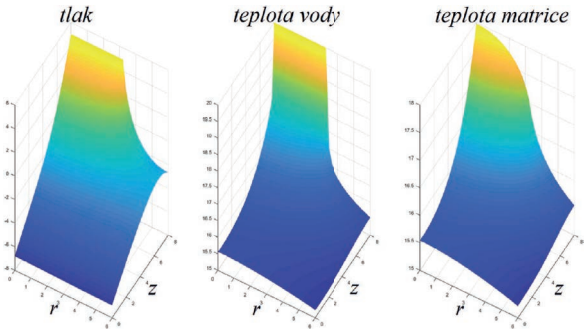
nosť sa ukázala ako zanedbateľná. Na obrázku 7 sme vykreslili infiltrovanú vodu vo valci vo výške $z = \frac{Z}{2}$ v čase $t = 110$. Vidíme, že infiltrácia s konštantnou viskozitou, znázornená červenou farbou, je značne rozdielna s výpočtom, kde sa dynamická viskozita brala pri výpočte do úvahy, znázornená zelenou farbou. Keď sa ale do úvahy zobrala aj tepelná rozťažnosť, tak výsledok, znázornený modrou farbou, sa už od predchádzajúceho výsledku takmer nelíšil. Preto sme sa rozhodli tepelnú rozťažnosť zanedbať a inverznú úlohu počítať iba pre prípad s dynamickou viskozitou a dynamickou hustotou vody a pre prípad s konštantnou viskozitou a hustotou.

Numerické riešenia inverznej procedúry s konštantnou viskozitou a hustotou pre rôzne štartovacie body a pre rôzne náhodné zašumenia sú uvedené v tabuľke 3. Vidíme, že odchýlka merania 1 spôsobuje zmenu v optimálnych koeficientoch najviac 6%.

Tabuľka 4: Štartovacie body a aproximované riešenia zahŕňajúc viskozitu

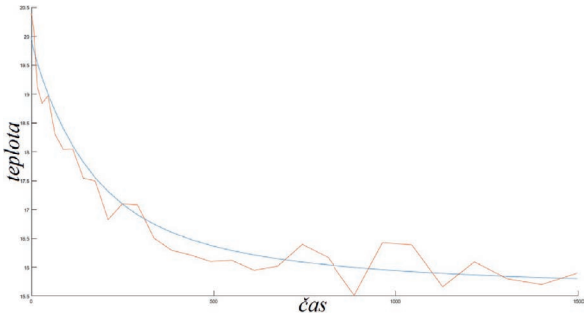
p_{start}	p_{opt}
$[2, 0.5]$	$[0.9525, 0.09912]$
$[2, 0.05]$	$[0.9465, 0.10033]$
$[0.5, 0.5]$	$[1.0393, 0.10058]$
$[0.5, 0.05]$	$[1.0524, 0.09961]$

Numerické riešenia inverznej procedúry s dynamickou viskozitou a dynamickou hustotou vody so zanedbaním tepelnej rozťažnosti sú pre rôzne štartovacie body a pre rôzne zašumenia uvedené v tabuľke 4. Aj v tomto prípade zmena meraných dát najviac o 1 spôsobila zmenu koeficientov najviac 6%. V tomto prípade bol však čas výpočtu výrazne väčší.



Obr. 8: Rozloženie tlaku vody h a teplôt T_w a T_m v čase $t = 1500$

5.4 Určovanie koeficientu prestupu tepla na hranici σ_{out}



Obr. 9: Časový priebeh teploty vody vo výtokovej nádobe

V tomto experimente uvažujeme predchádzajúci model s nasledovnými zmenami. Na začiatku máme plne nasýtenú vzorku $h = 0$ s počiatočnou teplotou $T_w = T_m = 20$ pre $t = 0$. V tomto prípade však nedávame vzorku do nádoby s vodou, ale vodu nechávame infiltrovať cez menší kruh s polovičným polomerom na hornej podstave. Pre rovnicu toku vody tieto podmienky predpíšeme ako izoláciu na hranici Γ_E, dirichletovu podmienku $h = H(t)$ na Γ_N pre $r \in (0, \frac{R}{2})$ a izoláciu na Γ_N pre $r \in (\frac{R}{2}, R)$. Vonkajšiu teplotu, ktorá pôsobí na plášť valca uvažujeme 15. Rozloženie tlaku vody h a teplôt T_w a T_m v čase $t = 1500$ je znázornený na obrázku 8.

Tabuľka 5: Optimálne hodnoty parametra σ_{out}

start	σ_{out}	σ_{out}	σ_{out}	σ_{out}
0.5	1.01521	0.96604	1.11134	0.98857
1.5	0.98634	0.97187	1.07241	1.01879

Charakteristikou tohoto scenára je teplotný vývoj

vody vo výtokovej nádobe v čase, znázornenej na obrázku 9 modrou farbou, v ktorej je už na začiatku malé množstvo vody s teplotou 20. Na určenie koeficientu $\sigma_{out} = 1$, používame zašumené dáta so šumom 0.5, ktoré sú znázornené na obrázku 9 červenou farbou. Numerické riešenia pre rôzne počiatočné body a pre rôzne zašumenia sú znázornené v tabuľke 5. Vypočítané koeficienty sa od skutočnosti líšia najviac o 7%.

6 Záver

Táto práca sa venovala numerickému modelovaniu výmeny tepla medzi pórovitým prostredím tvaru valca a v ňom infiltrovanou vodou. Matematický model zahŕňal závislosť hydraulickej permeability a tepelnej rozťažnosti na teplote vody.

Prišli sme s originálnym scenárom, ktorý predchádza vzniku preferenčných ciest a vďaka ktorému vieme určiť modelové parametre z neinvazívnych meraní len na základe dôsledkov pomocou inverznej úlohy.

Vytvorili sme efektívny program na numerické riešenie tohoto problému, založený na metóde konečných objemov a pomocou metódy operator splitting. Numerické riešenie je založené na metóde Celia [Celia and Bouloutas, 1990] a aplikovali sme v ňom aj disperznú maticu.

Stabilitu numerickej metódy sme demonštrovali na základe numerických experimentov. Ukázalo sa, že malé odchýlky na vstupných dátach inverznej úlohy spôsobujú len malé odchýlky vypočítaných koeficientov.

Pokračovaním tejto práce bude dôkaz existencie riešenia metódou operator splitting. Skúmaný model je veľmi komplexný a preto aj dôkaz bude veľmi obtiažny. Doteraz nie je známy dôkaz takéhoto komplexného modelu. Myšlienka dôkazu cez operator splitting pôvodom pochádza od autorov Crandal a Majda [Crandall and Majda, 1980]. Práca sa dá rozšíriť aj o pridanie ďalšej fázy a to vodnej pary, ktorá vznikne vyparovaním v póroch. Rovnako je možné v modeli uvažovať aj mrznutie vody v póroch, ktoré zabráni ďalšiemu toku vody.

Literatúra

[Bear and Cheng, 2010] Bear, J. and Cheng, A. H.-D. (2010). *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*. Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York.

[Bergman et al., 2011] Bergman, T. L., Lavine, A. S., Incropera, F. P., and Dewitt, D. P. (2011). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley and Sons.

[Celia and Bouloutas, 1990] Celia, M. A. and Bouloutas, Z. (1990). A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resour. Res.*, 26:1483–1496.

[Constales and Kačur, 2004] Constales, D. and Kačur, J. (2004). Determination of soil parameters via the solution of inverse problems in infiltration. *Computational Geosciences*, 5:25–46.

[Constales et al., 2003] Constales, D., Kačur, J., and Malengier, B. (2003). A precise numerical scheme for contaminant transport in dual-well flow. *Water Resour. Res.*, 39(10):1291–1303.

[Crandall and Majda, 1980] Crandall, M. and Majda, A. (1980). The method of fractional steps for conservation laws. *Numerische Mathematik*, 34(3):285–314.

[Genuchten, 1980] Genuchten, M. T. V. (1980). A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44:892–898.

[Šimůnek and Nimmo, 2005] Šimůnek, J. and Nimmo, J. R. (2005). Estimating soil hydraulic parameters from transient flow experiments in a centrifuge using parameter optimization technique. *Water Resources Research*, 41(4).

[Kačur et al., 2019] Kačur, J., Mihala, P., and Tóth, M. (2019). Numerical modeling of heat exchange and unsaturated–saturated flow in porous media. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(6):1668 – 1680. 7th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2017).

[Kačur et al., 2016] Kačur, J., Mihala, P., and Tóth, M. (2016). Determination of soil parameters under gravitation and centrifugal forces in 3d infiltration. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, 11:115–120.

[Kačur and Minár, 2013] Kačur, J. and Minár, J. (2013). A benchmark solution for infiltration and adsorption of polluted water into unsaturated-saturated porous media. *Transport in Porous Media*, 97:223–239.

[Simunek et al., 2008] Simunek, Jiri, J., Saito, H., Sakai, M., and Van Genuchten, M. (2008). *The HYDRUS-1D Software Package for Simulating the One-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media*.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 41
ISBN 978-8081470936, © 2019 Ľudovít Horváth

Viacrozmerné neparametrické testy nezávislosti (rozšírený abstrakt)

Ľudovít Horváth*

Školiteľ: Ján Somorčík†

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

V tejto práci predstavujeme štyri nové neparametrické testy nezávislosti. Prapredkami týchto postupov boli dnes už klasické jednorozmerné nápady Blomquista (test nezávislosti pomocou znamienok dát), Kendalla (test nezávislosti pomocou znamienok rozdielov dát) a Spearmana (test nezávislosti pomocou poradí dát). My vychádzame už z viacrozmerných testov z rokov 2003 [1] a 2005 [2], ktoré vo svojej podstate v Blomquistovom, Kendallovom a Spearmanovom teste nahradili jednorozmerné znamienko (resp. poradie) bežným priestorovým znamienkom (resp. priestorovým poradím), čísla nahradili vektormi a maticami a následne riešili problémy so štandardizáciou testovej štatistiky. Pôvodné testy používajú na dosiahnutie affinnej invariantnosti vnútornú štandardizáciu, keďže vonkajšia štandardizácia by zabezpečila invariantnosť len rotačnú. My však naše testy budujeme pomocou Ojovho priestorového znamienka. To je síce náročnejšie na výpočet než bežné priestorové znamienko, no je affinne ekvivariantné, a preto na zabezpečenie affinnej invariantnosti našich testov stačí len jednoduchá vonkajšia štandardizácia namiesto numericky náročnej vnútornej. Tým pádom majú naše nové testy oproti predchodcom aj omnoho jednoduchší tvar.

$$Q^2 = n\|ave_i\{\hat{T}(x_i)\hat{T}(y_i)^\top\}\|^2, \qquad (1)$$

kde $ave_i\{t_i\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$, $\|X\|^2$ predstavuje Frobeniovu normu matice X a $\hat{T}(x)$ predstavuje funkciu skóre, ktorá je v našom prípade

1. Ojovo priestorové znamienko,
2. Ojovo priestorové znamienko rozdielu dvoch iid dát,
3. Ojovo centrované poradie,
4. Ojovo centrované znamienkové poradie,

čím vzniknú v tomto poradí nové verzie viacrozmerných testov podľa Blomquista [1], podľa Kendalla [2], podľa Spearmana [2] a nový viacrozmerný test, ktorý nemá priameho predka, no ponáša sa na viacrozmerného Spearmana z [2]. Rovnako ako pôvodné testy majú i naše za platnosti nezávislosti asymptoticky rozdelenie chí-kvadrát, čo sme aj simulačne overili.

Naše nové testové štatistiky v porovnaní s predchodcami konvergujú ku chí-kvadrátu omnoho rýchlejšie, dokonca už pri počte dát $n = 10$ sa ich presné rozdelenie temer zhoduje k príslušnému chí-kvadrátu. Pôvodné testové štatistiky sa pri takto nízkych počtoch dát týmto rozdelením neriadia a sú posunuté doprava, teda pôvodné testy pre nezávislé dáta častejšie nesprávne zamietnu hypotézu o nezávislosti.

Simulácie však ukázali, že nové testy majú trochu nižšiu silu ako ich predchodcovia, čiže ochotu zamietnuť nezávislosť v prípade závislých dát. Toto sme overili pre počet dát $n = 30$, kde rozmer prvých dát bol $p = 2$ a rozmer druhých dát bol tiež $q = 2$. Kovariančná matica, ktorá reprezentovala závislosti medzi nimi mala tvar $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ 0 & 1 & -a & a \\ a & -a & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Naše štvorrozmerné dáta D sme teda generovali z rozdelenia $N_4((1,2,4,2)^\top, S)$, kde X sú prvé dve zložky vektora D a Y sú posledné dve zložky vektora D. Čísla v tabuľke reprezentujú percentuálny počet zamietnutí nezávislosti.

a=0.3	ρ^2	τ^2	B^2	Q^2_{osr}
starý test	74.3%	76.2%	**x**	**x**
nový test	68.2%	68.7%	68.9%	67.5%

Literatúra

[1] Taskinen,S., Kankainen, A., Oja, H.(2003) :*Sign test of independence between two random vectors,* Statistics & Probability Letters 62 , 9-21

[2] Taskinen, S., Oja, H., Randles, R.H.,(2005), *Multivariete nonparametric tests of independence,* J. Amer. Statist. Assoc. 100

*ludovit.horvath.94@gmail.com

†somorcik@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 42
ISBN 978-8081470936, © 2019 Terézia Fulová

Lokalizácia mobilných telefónov pomocou semidefinitného programovania (rozšírený abstrakt)

Terézia Fulová[1*]

Školiteľ: Mária Trnovská[2†]

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Lokalizačný problém spočíva v nájdení všetkých bodov v priestore, pričom sú spravidla známe len pozície niekoľkých bodov a niektoré vzdialenosti medzi nimi. Úlohu môžeme modifikovať na prípad, keď vzdialenosti nie sú presne známe, ale je známa len dolná a horná hranica pre jednotlivé vzdialenosti.

Jednou z možných aplikácií je lokalizácia mobilných telefónov, kde vysielače mobilného signálu predstavujú známe body a mobilné telefóny body, ktorých pozície chceme určiť, pričom poznanie vzdialeností medzi nimi môže byť ovplyvnené dosahom signálu či prítomnosťou ruchu.

Lokalizačný problém vieme s využitím vlastností tzv. euklidovských matíc sformulovať v tvare semidefinitnej úlohy prípustnosti s ohraničením na hodnosť

$$\text{nájsť} \quad X \tag{1}$$

$$tr(A_i X) = b_i, \quad i = 1,...,m, \tag{2}$$

$$X \succeq 0, \tag{3}$$

$$rank(X) \leq k, \tag{4}$$

kde $X \in \mathbb{S}^n$ je maticová premenná, $C, A_1, ..., A_m \in \mathbb{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $k \in \mathbb{N}$ je požadovaná hodnosť matice X.

Ohraničenie na hodnosť je jediným zdrojom nekonvexnosti úlohy (1)-(4), preto je naším cieľom nahradiť toto ohraničenie tak, aby sme riešili úlohu semidefinitného programovania (1)-(3), ktorá je konvexná, a teda efektívne riešiteľná.

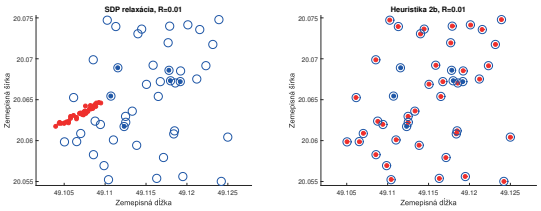
Takéto úlohy sa zvyknú aproximovať *semidefinitnou relaxáciou*, ktorá spočíva vo vynechaní ohraničenia (4). Úloha (1)-(3) však vedie k riešeniu požadovanej hodnosti len zriedka.

Existuje niekoľko spôsobov, ktorými možno nahradiť nekonvexné ohraničenie (4). Jedným z nich je tzv. *konvexná iterácia*, ktorá sa snaží získať riešenie danej hodnosti iteráciou dvoch semidefinitných úloh (pozri [Dattorro, 2016]).

Známa je aj *heuristika stopy*, ktorá spočíva v nahradení ohraničenia (4) minimalizáciou konvexnej obálky hodnosti, ktorou je stopa matice, ako je ukázané v článku [Fazel et al., 2001].

Nami navrhnutá heuristika spočíva v nahradení ohraničenia (4) vzťahom $\lambda_{k+1} + ... + \lambda_n = 0$, kde $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$ sú vlastné hodnoty matice X. Tento vzťah je nutnou a postačujúcou podmienkou pre hodnosť kladne semidefinitnej matice rovnú nanajvýš k. Keď využijeme, že súčet $n-k$ najmenších vlastných hodnôt možno nájsť riešením semidefinitnej úlohy (pozri [Alizadeh, 1995]) a vnoríme túto úlohu do úlohy (1)-(3), získame novú heuristiku v tvare semidefinitnej úlohy.

Pri riešení lokalizácie mobilných telefónov sa ukazuje, že mnohokrát vedie nová heuristika k lepším výsledkom ako zaužívané heuristiky, ako napríklad v prípade obmedzeného dosahu signálu (Obr.1).



Obr. 1: Porovnanie relaxácie a novej heuristiky. Modrou skutočné pozície, červenou nájdené.

Literatúra

[Alizadeh, 1995] Alizadeh, F. (1995). Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 5:13–51.

[Dattorro, 2016] Dattorro, J. (2016). *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry, Second ed.* Meboo Publishing USA, Stanford University, California.

[Fazel et al., 2001] Fazel, M., Hindi, H., and Boyd, S. (2001). A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation. *Proceedings of the American Control Conference*, 6:4734–4739.

*terezia.fulova@gmail.com
†trnovska@pc2.iam.fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 43
ISBN 978-8081470936, © 2019 Jana Valigurská

Súvislosť medzi binárnymi kódmi a regulárnymi grafmi (rozšírený abstrakt)

Jana Valigurská[1*]

Školiteľ: Róbert Jajcay[2†]

[1] Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
[2] Katedra algebry a geometrie, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

V súčasnosti je prevažná väčšina informácií ukladaná a posielaná vo forme binárnych postupností. Tieto postupnosti, nazývané aj *kódy*, majú rozličné vlastnosti. Medzi veľmi významné triedy kódov patria tzv. *blokové binárne kódy* $\mathscr{C}$, t.j. kódy, v ktorých sú všetky slová rovnakej dĺžky n.

V našom článku sa zameriame na blokové kódy dĺžky n, ktoré sú špeciálne tým, že pozostávajú z presne n kódových slov, takže ich môžeme zapisovať ako maticu $n \times n$. Navyše budeme požadovať nielen to, aby sa na hlavnej diagonále nachádzali nuly a aby *váhy* všetkých kódových slov, t. j. počet jednotiek v jednotlivých kódových slovách, boli rovnaké, ale aj to, aby bola matica pozostávajúca z kódových slov symetrická vzhľadom na hlavnú diagonálu.

Takéto kódy nie je vždy možné zostrojiť. Hoci v prípade existencie kódu je dokonca možné nájsť algoritmus na zostrojovanie týchto kódov $\mathscr{C}$, so zvyšujúcou sa váhou u a dĺžkou kódových slov n sa zvyšuje aj náročnosť dôkazu existencie kódov s požadovanými vlastnosťami. Na základe pozorovania pri zostrojovaní kódov s konkrétnymi váhami a dĺžkami kódových slov sme si však všimli určitú súvislosť, ktorá je zhrnutá v nasledujúcej hypotéze.

Hypotéza 1. *Existencia binárneho symetrického $n \times n$ kódu pre každé prirodzené n s nulami na hlavnej diagonále a rovnakou váhou všetkých kódových slov závisí od toho, či je n párne alebo nepárne.*

Dokázať túto hypotézu pre ľubovoľné u a n je ale veľmi náročné. Preto je okrem zostrojovania kódov s konkrétnymi parametrami potrebné nájsť iný, jednoduchší spôsob, ako dokázať existenciu resp. neexistenciu kódov $\mathscr{C}$.

Vďaka tomu, že sme uvažovali symetrické binárne blokové kódy s nulami na hlavnej diagonále a rovnakou váhou všetkých kódových slov, môžeme náš problém previesť do reči teórie grafov a považovať tieto kódy za incidenčné matice regulárnych grafov. Inými slovami, budeme zisťovať, pre aký počet vrcholov n a stupeň vrcholov $deg(v)$ je možné zostrojiť graf, pričom stupeň vrcholov v tomto prípade reprezentuje váhu kódového slova.

Na základe nasledujúcej vety vieme určiť, ktoré symetrické binárne $n \times n$ matice s nulami na hlavnej diagonále sú zároveň incidenčnými maticami grafu G, a ktoré nie sú.

Veta 1. *Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. Potom binárna symetrická $n \times n$ matica s nulami na hlavnej diagonále, v ktorej sú všetky riadky váhy k a žiaden riadok sa neopakuje, existuje vtedy a len vtedy, keď existuje k-regulárny graf na n vrcholoch, v ktorom žiadne dva vrcholy nemajú rovnakú množinu susedov.*

Vďaka tejto a Erdős-Gallaiovej vete [Koh et al., 2015] vieme určiť, pre ktoré dvojice parametrov n a k matica s požadovanými vlastnosťami existuje a pre ktoré dvojice nie.

Veta 2. *Nech $n \geq 3$ je prirodzené číslo a nech $1 \leq |u| = k \leq n-1$ pre k prirodzené okrem $k = n-2$. Potom symetrický binárny blokový $n \times n$ kód $\mathscr{C}$ s nulami na hlavnej diagonále existuje len vtedy, ak*
(i) n je párne a k je párne,
(ii) n je párne a k je nepárne,
(iii) n je nepárne a k je párne.

Prevedenie problému z oblasti kódovania do teórie grafov nám síce značne zjednodušilo dokazovanie existencie a neexistencie symetrických binárnych blokových kódov s nulami na hlavnej diagonále, avšak tento postup bolo možné použiť len vďaka tomu, že sme uvažovali také kódy, ktoré boli zároveň incidenčnými maticami grafov G. V prípade, že by tieto kódy nemali túto vlastnosť, náš problém by sme museli riešiť inými, asi menej efektívnymi metódami.

Literatúra

[Koh et al., 2015] Koh, K. M., Dong, F., Ng, K. L., and Tay, E. G. (2015). *Graph theory*. World Scientific, Singapore.

*valigurska8@uniba.sk
†robert.jajcay@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 44–50
ISBN 978-8081470936, © 2019 Erik Benovič

Hermitian random matrix models with asymmetric quartic potential

Erik Benovič*

Supervisor: Juraj Tekel†

Katedra teoretickej fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstract: In the study of Hermitian random matrix models, the main goal is to find an eigenvalue distribution of a specific model. Different types of solutions may appear, and we examine their validity. The determining condition is the thermodynamic analogy of the minimal free energy. In the presented work, we examine a quartic potential with an asymmetric linear term. Since complete analytic results for the one-cut case are unattainable, we develop a perturbative strategy. We construct the expansion of the free energy for a "small" and "large" variation of the symmetric potential. Subsequently, we inspect the nature of the free energy in a completely asymmetric potential. Adopting the method of Padé approximants, we endeavor to match up with the numerical results. Finally, we take the first steps towards the analysis of the two-cut solution.

Keywords: Hermitian random matrix models, eigenvalue distribution, perturbation theory, free energy, Padé approximant

1 Introduction

Our primary motivation to study Hermitian random matrix models is the fuzzy field theory. The analytic treatment of phase structure of fuzzy field theories has been based on the connection to matrix models [1]. Phase transitions were discovered almost thirty years ago in random matrix ensembles which had an exact interpretation in theoretical physics. Probably the most relevant ones are the Gross-Witten phase transition in two dimensional Yang - Mills theory and the models of matter coupled to two dimensional quantum gravity [2]. In this text, we are interested in the phase structure of a model with an asymmetric potential. Its occurrence finds its application in the study of Homolumo gap in one-fermion spectrum [3]. In the first Section, we describe the basic techniques and notions of Hermitian random matrix models. In the second Section we come to the most general quartic model and present the known results with further concerns about a complete general solution. In Section 3, we present perturbation approach to the model with the specific perturbation expansions. Introducing Padé approximants, we get rid of the deviation from the numerical results. In the last section we present our results of the two-cut regime and dip into possible further continuation.

1.1 Hermitian random matrix models

The object of our study is an ensemble of NxN Hermitian matrices M with probability measure $e^{-N^2 S(M)}dM$ that is invariant under the unitary transformation. With the action given by:

$$S(M) = \frac{1}{2} r \frac{1}{N} Tr(M^2) + \sum_n^N g_n \frac{1}{N} Tr(M^n). \quad (1)$$

An important quantity in our discussion is the partition function $Z = \int dM e^{-S(M)}$ which can be expressed in terms of the eigenvalues $\{\lambda_i\}$ of the random matrix M. We write

$$Z = \int \left(\prod_{i=1}^N d\lambda_i \right) \left(\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \right) exp(-N^2 S(\lambda)), \quad (2)$$

where the Jacobian of the transformation to the eigenvalues $\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$ is the Vandermonde determinant and is usually put into exponent and included in the action :

$$S_V(\lambda) = \sum_i V(\lambda_i) - \frac{2}{N^2} \sum_{i<j} \log|\lambda_i - \lambda_j|, \quad (3)$$

where

$$V(\lambda_i) = \frac{1}{2} r \frac{1}{N} \lambda_i^2 + \sum_n^N g_n \frac{1}{N} \lambda_i^n, \quad (4)$$

is the potential of the system. As we increase N, the probability distribution becomes concentrated around certain configuration which minimizes the action and allows us a saddle point evaluation of the system, which yields:

$$V'(\widetilde{\lambda}_i) = \frac{2}{N} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_j}. \quad (5)$$

*erik.benovic@gmail.com
†juraj.tekel@gmail.com

This expression can be read as the condition for the equilibrium of Coulomb gas of N particles (eigenvalues) with position $\{\lambda_i\}$ on the line, in the potential $V(\lambda)$ with logarithmic potential repulsion. For the solutions $\{\widetilde{\lambda}_i\}$ of the saddle point equation, we define the eigenvalue distribution:

$$\rho(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(\lambda - \widetilde{\lambda}_i). \tag{6}$$

For a finite N, this is just a collection of *spikes* at the location of the solution. Nevertheless, for large N limit, it becomes a smooth continuous function of λ. The sum in (5) turns into integral weighted by the distribution:

$$V'(\lambda) = 2PV \int_C d\lambda' \, \frac{\rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'}, \tag{7}$$

where $PV \int_C$ denotes the Cauchy principal value. We introduce the planar resolvent:

$$\omega(z) = \int d\lambda \, \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \tag{8}$$

which has the property that its series coefficient c_k,

$$c_k = \int d\lambda \, \rho(\lambda) \lambda^k, \tag{9}$$

is the k-th moment of the eigenvalue distribution. It follows that:

$$|z| \to \infty \Rightarrow \omega(z) \sim \frac{1}{z}. \tag{10}$$

Computing the resolvent, it is the analogy of Riemann-Hilbert problem for complex $\omega(z)$ with discontinuity along the support of the distribution, and analytic outside the cut. The discontinuity resides in the denominator of (7) and (8), as we obtain:

$$\omega(z + \mathrm{i}\varepsilon) + \omega(z - \mathrm{i}\varepsilon) = V'(z), \tag{11}$$

and finally, in terms of the resolvent, the eigenvalue distribution can be computed using discontinuity equation:

$$\omega(z + \mathrm{i}\varepsilon) - \omega(z - \mathrm{i}\varepsilon) = -2\pi\mathrm{i}\rho(z). \tag{12}$$

The following process of finding a solution for given model is pretty straightforward and is reviewed in [5].

1.2 Free energy

One of the major topics to be investigated in this field is the free energy:

$$F = -\frac{1}{N^2} \log Z, \tag{13}$$

which can be expressed for $N \to \infty$ as following functional:

$$\int_C d\lambda \, V(\lambda)\rho(\lambda) - \int \int_C d\lambda \, d\lambda' \, \rho(\lambda) \, \rho(\lambda') \log|\lambda - \lambda'|, \tag{14}$$

where C is the support of the distribution. Introducing a Lagrange multiplier, one can rewrite the free energy in a more practical way:

$$\begin{aligned} F = &\frac{1}{2} \int_C d\lambda' V(\lambda')\rho(\lambda') - \frac{1}{2} V(\lambda) + \\ &+ \int_C d\lambda' \rho(\lambda') \log|\lambda - \lambda'|, \end{aligned} \tag{15}$$

where λ is any eigenvalue from the support. Generally, for different potentials, the eigenvalue distribution $\rho(\lambda)$ has support on different number of intervals which we denote as cuts. The standard thermodynamic argument tells us that if there is more than one solution for given value of parameters, then the solution with lower free energy is realized. We are often interested in the phase transitions diagrams. [4]

2 Description of different models

2.1 Symmetric models

To solve a model simply means to find the eigenvalue distribution $\rho(\lambda)$ and its free energy, for given probability measure. In gas analogy it means to find the configuration of the particles in gas for given potential. The symmetric solutions are characterized by the symmetric potential. The basic techniques and well known results are reviewed in [5].

2.2 Asymmetric model

A challenging problem which arises in this domain is solving the the model with asymmetric potential:

$$V(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2} r\lambda^2 + g\lambda^4, \tag{16}$$

where we consider $a > 0$. Such model allows one-cut and two-cut solutions, both with an asymmetric support. The preferred solution in the region where

both exist is the one with lower free energy. It is clear that the problem could easily be tackled by the saddle point method.

2.2.1 Asymmetric one-cut solution

It is straightforward write down the solution supported on an asymmetric interval:

$$C = \left(D - \sqrt{\delta}, D + \sqrt{\delta}\right), \tag{17}$$

as

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(2\delta g + r + 4D^2 g + 4Dg\lambda + \\ + 4g\lambda^2)\sqrt{\delta - (D-\lambda)^2}. \tag{18}$$

With the conditions for the endpoints of the interval:

$$0 = \frac{1}{2}a + 3D\delta g + 2D^3 g + \frac{1}{2}Dr, \\ 1 = 3D^2\delta g + \frac{3}{4}\delta^2 g + \frac{1}{4}\delta r. \tag{19}$$

Computing the integral (15), one can find that the free energy in terms of D, δ is:

$$F_{AS}^{1cut} = \frac{3}{4} - \frac{2D^2}{\delta} + 3D^4 g - \frac{9}{2}D^2\delta g - \frac{1}{4}\delta^2 g \\ - \frac{3}{2}D^2\delta^3 g^2 - \frac{3}{128}\delta^4 g^2 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\delta}{4}\right), \tag{20}$$

The main practical problem that confronts us is that the determinig equations (19) cannot be analytically solved and thus we cannot tell which solution is preferred for any parameters r, g.

3 Perturbative approach

One way to overcome these problems is to analyse the model numerically, for some parameters r, g [4]. An alternative approach to the problem is using perturbation theory. The essential step is to consider the parameter a to be a small perturbation of the equation. It is usually a very small term and can be fixed but we keep the value arbitrary, as long as we remember it is small. General solutions of the free energy are very long and uninteresting. It seems reasonable to compare our results with the numerical results. For that, all the solutions are for parameters $r = -12, g = 1$ for which we have the numerical results [4].

Firstly, the idea is to observe the behaviour of the solution for small variation from the symmetric model. As we change the value of a, one may assume that D, δ would change in some relation to the a. It seems reasonable to assume that we may describe as small-a expansion in the series:

$$D = D_0 + aD_1 + a^2 D_2 + a^3 D_3 + \ldots, \\ \delta = \delta_0 + a\delta_1 + a^2\delta_2 + a^3\delta_3 + \ldots. \tag{21}$$

We insert these expansions into the determining conditions (19). As the value of a is arbitrary, the corresponding factors at all the powers of a must be zero. Solution of this system of equation yields the perturbation expansion in terms parameters r, g. While we keep in mind, that for the value $a = 0$, the potential is quartic and the model is symmetric. The solution for this model is known and it is the asymmetric one-cut solution for quartic potential [1]. We find out that there are two solutions with the same δ_0 and opposite D_0. This suggests that the distribution can live in either well of the potential. Therefore, we distinguish left ($D_0 < 0$), and right ($D_0 > 0$), one-cut solutions for the asymmetric model. To compute the free energy, one should plug the corresponding δ, D to the formula of the free energy and Taylor expand around zero to the same order. We acquire[1]

$$F_s = -6.68 - 1.69a - 0.02a^2 + \ldots - 1.310^{-16}a^{20}. \tag{22}$$

One can check that the right solution always has higher free energy and therefore is negligible. In order to examine the solution larger a, it seems reasonable to consider the expansion around infinity, so called large-a expansion. One has to be careful to fulfil (19). The corresponding expansion is

$$D = a^{\frac{1}{3}}D_0 + D_1 + a^{-\frac{1}{3}}D_2 + a^{-\frac{2}{3}}D_3 + \ldots, \\ \delta = a^{\frac{2}{3}}\delta_0 + a^{\frac{1}{3}}\delta_1 + \delta_2 + a^{-\frac{1}{3}}\delta_3 + \ldots. \tag{23}$$

After expanding the free energy, we obtain:

$$F_l = \log b - 0.47b^4 - 2.38b^2 - 4.47 - 3.78b^{-2} + \\ + \ldots + 10^5 b^{-18}, \tag{24}$$

where $b = a^{\frac{1}{3}}$. Note that all the expansions in this paper are to the $20th$ order. The following figures represent a part of the free energy diagram comparing our perturbative results with the numerical results

[1] Note that we rounded up to 2 decimals, as we keep that pattern for the rest of the text.

for the values of parameters $r = -12, g = 1$ obtained from [4]. The red dots represent the numerical values while solid blue line represent the solution of the perturbation theory.

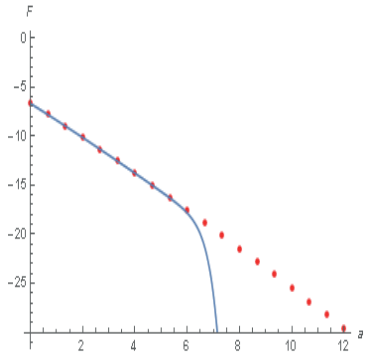


Figure 1: The solution for perturbative expansion for small-a tends to crash as it exceeds certain value.

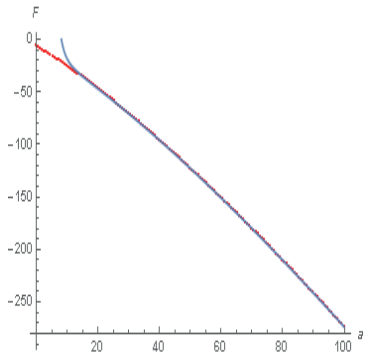


Figure 2: The solution large-a expansion tends to fail as the a approaches smaller value.

As both of the expansion are struggling for some critical region, we aim to investigate a more general approximation of the free energy.

3.1 Pade approximants

The Padé approximants are a particular type of rational fraction approximation to the value of a function [6]. The idea is to match a series expansion as far as possible. We denote the L,M Padé approximant to $Y(x)$ by:

$$[L/M] = P(x)/Q(x), \tag{25}$$

where $P(x)$, respectively $Q(x)$ is a polynomial of a degree at most L, resp. M. The formal power series:

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x^j, \tag{26}$$

determines the coefficients of $P(x)$ and $Q(x)$ by the equation:

$$Y(x) - P(x)/Q(x) = \mathcal{O}(x^{L+M+1}). \tag{27}$$

Applying the method of Padé approximants we want to approximate our series to obtain a more precise solution matching the numerical results beyond the region where the previous method fails. Since we have the expansion to the 20. order, we need to impose a condition $max(L+M) = 20$, and make a wise choice of the exact order.
At first, we analyse the small-a expansion (22). Examinig the behaviour of free energy for large-a (24), we see that the leading order in infinity is $a^{\frac{4}{3}}$. It seems reasonable to require for our approximant to follow this patter. Therefore we require of our approximant to behave as $a^{\frac{4}{3}}$ for $a \to \infty$. In this manner we pick such approximant $P_s = [12,8]$. To get the right desired approximation in terms of a we should modify the approximant as:

$$F_{s,pade} = -|P_s|^{\frac{1}{3}}. \tag{28}$$

A similar approach can be used for large-a expansion (24). The key problem with this method resides in the logarithmic term which cannot be approximated in infinity. We overcome the problem by approximating the rest of the expansion and then adding the logarithm it to the approximant. We use the most precise $P_l = [10,10]$ approximant possible, as we obtain:

$$F_{l,pade} = P_l + \frac{1}{3}\log b. \tag{29}$$

In the following figures we compare the Padé approximants (solid green) of corresponding expansions with the numerical data (red dots). One should note that the Figure 5 has different scale as it emphasizes the deviation from the numerical results around zero.

4 Two-cut cut solution

In a similar way than in the Section 2, come up to the two-cut solution supported on :

$$C = \left(D_1 - \sqrt{\delta_1}, D_1 + \sqrt{\delta_1}\right) \cup \left(D_2 - \sqrt{\delta_2}, D_2 + \sqrt{\delta_2}\right). \tag{30}$$

Note that the parametrization of interval is free, though we use the most suitable one for practical

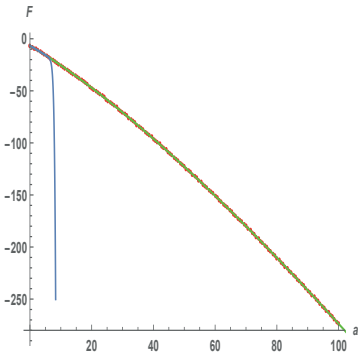


Figure 3: The small-a Padé approximant(green) in comparison with perturbation result and numerical data.

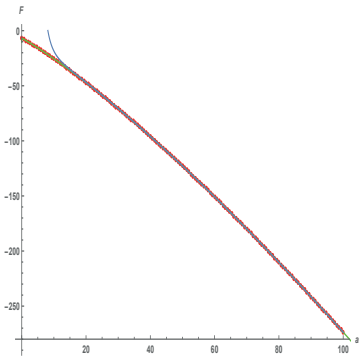


Figure 4: The large-a Padé approximat(green) in comparison with numerical data.

computations. The endpoints are determined by the three equations:

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{1}{2}r + g\left[2\left(D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2\right) + (\delta_1 + \delta_2)\right], \\
0 =& \frac{1}{2}a + 2g\left[D_1\delta_1 + D_2\delta_2 - D_1 D_2 (D_1 + D_2)\right], \\
1 =& g[D_1^2\delta_1 + D_2^2\delta_2 + \left(D_1^2 - D_2^2\right)(\delta_1 - \delta_2) - \\
& - D_1 D_2 (\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{4}(\delta_1 - \delta_2)^2].
\end{aligned} \tag{31}$$

Finally, the eigenvalue distribution for the two-cut solution with asymmetric potential is given by:

$$\rho(\lambda) = \tag{32}$$

$$\frac{2g}{\pi}|D_1 + D_2 + \lambda|\sqrt{\left[(\lambda - D_1)^2 - \delta_1\right]\left[-(\lambda - D_2)^2 + \delta_2\right]}. \tag{33}$$

It is clear that we could proceed with the perturbation theory in a similar fashion as with the one-cut

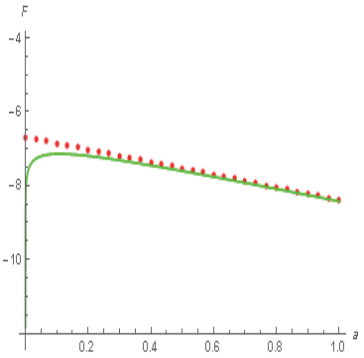


Figure 5: The large-a Padé approximat deviates around zero due tu the logarithm.

in Section 3. It is straightforward to write the perturbation expansion of the endpoints, with the unperturbed solution, being the symmetric two-cut ($D_1 = D_2, \delta_1 = \delta_2$). As we have done it, the first issue we have come across is that the system of equations (31) is undetermined as there are three equations and four unknowns to be determined. With every next term in the expansion, we obtain a free parameter which is to be determined with the condition of the minimal free energy. The foremost problem is the fact that we are unable to write down the analytic formula for it. It is reasonable to assume that we may describe the free energy as a series in a,

$$F = F_0 + aF_1 + a^2F_2 + \ldots, \tag{34}$$

which encourages us to compute the free energy using the formula (15). The first integration over the potential is straightforward as we just need the particular moments. For the value of the λ is free, we firstly choose the largest ($\lambda_2 = D_2 + \sqrt{\delta_2}$) and the smallest ($\lambda_1 = D_1 - \sqrt{\delta_2}$) eigenvalue from the support so we do not have to trouble with the absolute value in the logarithm. After summing these two expression we get:

$$\begin{aligned}
F =& \frac{1}{2}\left[ac_1 + \frac{1}{2}rc_2 + gc_4\right] + \frac{1}{4}\left(a\lambda_3 + \frac{1}{2}r\lambda_3^2 + g\lambda_3^4\right) \\
& - \frac{1}{4}J,
\end{aligned} \tag{35}$$

where $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, and c_k are the moments of the distribution (9), corresponding to the asymmetric potential (16). The troublesome term,

$$J = 2\int_C \mathrm{d}z\,\rho(z)\log\left(\left(D_2 + \sqrt{\delta_2} - z\right)\left(-D_1 + \sqrt{\delta_1} + z\right)\right). \tag{36}$$

is the integral we are unable to solve right away. A Taylor series centred at $a=0$ seems like a reasonable way of treating this problem,

$$J = J(a) = J(0) + a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}J(a)\bigg|_{a=0} + \frac{a^2}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}J(a)\bigg|_{a=0} + \ldots. \tag{37}$$

We have successfully calculated the integral to the first order. We have come to an agreement with the two-cut solution for the symmetric model, with the zero order of the free being the same, though the parametrization of the interval is different. The first order ended up to be 0 in accord with the numerical results [4], which suggest higher order dependence on a.

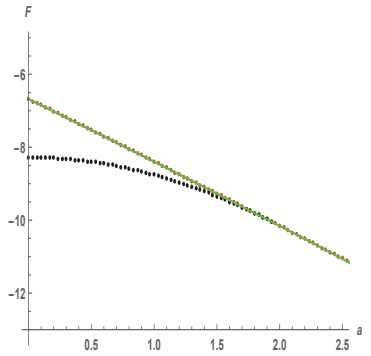


Figure 6: The phase diagram for $r=-12, g=1$. The dotted black/red represents the numerical results for the free energy of the two-cut/one-cut solution [1]. The solid green is the small-a Padé Approximant.

5 Conclusion

In the Section 2, we introduced an asymmetric quartic model. Using the knowledge based on a symmetric model, we presume an one-cut solution with an asymmetric support which we have treated with perturbation theory. We have analysed the perturbation expansion for small/large-a and made a solid approximation of the free energy to the $20th$ order, though encountering a deviation from the numerical values as the parameter a approaches certain regions. We have approached the problem with Padé approximants, giving us much better agreement with the numerical data. With the two-cut solution, we have successfully calculated the free energy to the first order in accordance with numerical data. It remains an open problem in the area to compute the higher order perturbation terms in the free energy so we could construct the complete phase diagram for the asymmetric model using perturbation theory rather than numerical computations.

6 Appendix

Here we present the explicit formulae for two/one-cut solutions which were too long to be written in the text. The perturbation expansion for the two-cut is:

$$\begin{aligned} D_1 =& D_{10} + aD_{11} + a^2 D_{12}, \\ D_2 =& D_{20} + aD_{21} + a^2 D_{22}, \\ \delta_1 =& \delta_{10} + a\delta_{11} + a^2\delta_{12}, \\ \delta_1 =& \delta_{20} + a\delta_{21} + a^2\delta_{22}. \end{aligned} \tag{38}$$

We plug them into (31) and obtain the results:

$$\begin{aligned} D_{20} =& -D_{10} = \frac{\sqrt{-\frac{r}{g}+\frac{\sqrt{-16g+r^2}}{g}}}{2\sqrt{2}}, \\ \delta_{20} =& \delta_{10} = \frac{-r-\sqrt{-16g+r^2}}{8g}, \\ D_{21} =& D_{11} = \frac{1-2g\sqrt{2\frac{-r+\sqrt{-16g+2}}{g}}\delta_{11}}{2r}, \\ \delta_{21} =& -\delta_{11}, \end{aligned} \tag{39}$$

where δ_{11} is the free parameter we want to evaluate from the condition of the minimal free energy, for which we want to compute (36), using (37).

The large one-cut perturbation expansion of the endpoints to the seventh order is:

$$D = -\frac{1}{(2g)^{\frac{1}{3}}}a^{\frac{1}{3}} + \frac{r}{6(\sqrt{2}g)^{\frac{2}{3}}}a^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}a^{-1} + \frac{72gr-r^3}{324\times 2^{\frac{2}{3}}g^{\frac{4}{3}}}a^{-\frac{5}{3}}$$

$$\delta = \frac{2\times 2^{\frac{1}{3}}}{3g^{\frac{1}{3}}}a^{-\frac{2}{3}} - \frac{2^{\frac{2}{3}}r}{9g^{\frac{2}{3}}}a^{-\frac{4}{3}}, \tag{40}$$

and for the special $g=1, r=-12$:

$$\begin{aligned} D =& -0.63a^{\frac{1}{3}} - 1.59a^{-\frac{1}{3}} + 0.67a^{-1} + 1.68a^{-\frac{5}{3}} \\ & - 11.64a^{-\frac{7}{3}} + 40a^{-3} - 64.83a^{-\frac{11}{3}} - 207.26a^{-\frac{13}{3}} \\ & + 2131.65a^{-5} - 8761.42a^{-\frac{17}{3}} + 14828.4a^{-\frac{19}{3}}, \\ \delta =& 0.84a^{-\frac{2}{3}} - 2.12a^{-\frac{4}{3}} + 1.33a^{-2} + 16.8a^{-\frac{8}{3}} \\ & - 95.48a^{-\frac{10}{3}} + 245.33a^{-\frac{12}{3}} + 140.07a^{-\frac{14}{3}} \\ & - 4656.48a^{-\frac{16}{3}} + 2373.3a^{-\frac{18}{3}}. \end{aligned} \tag{41}$$

The small two-cut perturbation expansion of the endpoints to the second order is:

$$
\begin{aligned}
D =& -\frac{\sqrt{-3r-2\sqrt{-60g+r^2}}}{2\sqrt{5g}} - \frac{1}{2\sqrt{-60g+r^2}}a \\
&+\frac{\sqrt{5g}180g\left(-3r+2\sqrt{-60g+r^2}\right)}{4\left(-60g+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(-3r-2\sqrt{-60g+r^2}\right)^{\frac{5}{2}}}a^2 \\
&+\frac{3\sqrt{5g}r^2\left(12r+13\sqrt{-60g+r^2}\right)}{4\left(-60g+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(-3r-2\sqrt{-60g+r^2}\right)^{\frac{5}{2}}}a^2 \\
&, \\
\delta =& \frac{-r+\sqrt{-60g+r^2}}{15g} \\
&+\frac{\left(-r+\sqrt{-60g+r^2}\right)\sqrt{-3r-2\sqrt{-60g+r^2}}}{\sqrt{5g}\left(120g-r\left(2r+3\sqrt{-60g+r^2}\right)\right)}a \\
&-\frac{-150g+r\left(r-\sqrt{-60g+r^2}\right)}{\left(-60g+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(3r+2\sqrt{-60g+r^2}\right)}a^2, \qquad (42)
\end{aligned}
$$

and for special $g=1, r=-12$:

$$
\begin{aligned}
D =& -1.65 - 5.45\times10^{-2}a + 3.68\times10^{-3}a^2 - \\
&- 4.96\times10^{-4}a^3 + 8.55\times10^{-5}a^4 \\
&- 1.67\times10^{-5}a^5 + \ldots + 10^{-14}a^{20} \\
\delta =& 0.19 - 1.87\times10^{-2}a + 2.77\times10^{-3}a^2 - \\
&- 4.84\times10^{-4}a^3 + 9.37\times10^{-5}a^4 - \\
&- 1.94\times10^{-5}a^5 + \ldots + 10^{-14}a^{20}. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Acknowledgments

I would like to thank my supervisor Mgr. Juraj Tekel PhD. for his guidance and supervision. I would also like to thank Marek Žitnik for his help.

References

[1] J. Tekel, 2015, *Phase structure of fuzzy field theories and multitrace matrix models*, In:Acta physica slovaca, vol.65,p.387-414 , Comenius University, Bratislava

[2] G.M. Cicuta, L.G. Molinari, *Phase transitions*, in The Oxford Handbook of Random Matrix Theory, editors G.Akemann, J.Baik, Ph. Di Francesco, Oxford Univ. Press. (2011).

[3] I. Andric, L. Jonke, D. Jurman, H.B. Nielsen , *Homolumo Gap from Dynamical Energy Levels*, Phys. Rev. D77, 2008

[4] J. Tekel, 2017, *Asymetric hermitian matrix models and fuzzy field theory*, Physical Review D. 97,125018, Commenius university Bratislava

[5] E. Benovic, 2018, *Eigenvalue distributions in unitary matrix models*, Comenius University, Bratislava

[6] G. A. Baker, JR.,1975, *Essentials of Padé Approximants* Cornell University, New York

[7] M. Šubjaková, 2017, *Teória pol'a na nekomutatívnej sfére a maticové modely*, Diplomová práca Comenius University, Bratislava

[8] B. Eynard, T. Kimura and S. Ribault, 2015 *Random matrices*

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 51–58
ISBN 978-8081470936, © 2019 Adam Broniš

Conversion electron-γ spectroscopy of ^{254}Md

Adam Broniš[1*]

Supervisor: Stanislav Antalic[1†]
[1]Department of nuclear physics and biophysics, FMFI UK, Mlynská dolina 842 48 Bratislava

Abstract: The electron capture of ^{254}No and the structure of states in its daughter nuclei ^{254}Md is still unknown even after 50 years after its first observation [P. R. Fields, 1970]. In this project, the excited states of ^{254}Md populated after the ^{254}No electron capture (EC) decay were investigated for the first time by using the conversion electron-γ coincidence (CE-γ) technique. Energies of conversion electrons were analyzed to estimate maximum energy of states in the odd-odd isotope ^{254}Md. Moreover, a tentative scheme of ^{254}Md excited states populated after the EC decay of ^{254}No was proposed and also possible Nilsson configurations of these excited states are discussed.

Keywords: CE-γ coincidence technique, electron capture decay, conversion electrons, ^{254}Md

1 Introduction

The scarcity of nuclear spectroscopy data in the region of superheavy elements and even more in the region of N=152 closed shell makes any interpretations based on systematics very difficult. Therefore any experimental information about the ground or excited states of these nuclei is valuable and can be considered as an improvement of the systematics in this region. In the transfermium region, very limited data regarding the β decay are available (Fig. 2). To date, EC decay of just three isotopes was studied, namely ^{253}Md [S. Antalic, 2011], ^{257}Rf [F. P. Hessberger, 2016a] and ^{258}Db [F. P. Hessberger, 2016b]. In the cases of ^{253}Md and ^{258}Db, isomeric states were populated after EC decay.

For isotope ^{254}Md only estimations of excitation energies based on the energy of the ^{258}Lr α decay were proposed [C. E. Bemis, 1976]. However, these excitation energies have not been well established [A. Bhagwat, 2005]. Moreover, the theoretical study focused on the nuclear structure of isotopes in the region of N=152 closed shell shows a possibility of the K isomer occurence in ^{254}Md [P. C. Sood, 2016]. No experimental data investigating excited states of ^{254}Md populated after ^{254}No EC decay are available. Our primary goal is to investigate these excited states for the first time.

1.1 Experiment

Target material ^{208}PbS with a thickness of 450 μg/cm^2 was irradiated by ^{48}Ca projectiles with a kinetic energy of 218.4 MeV accelerated by the UNILAC operating in pulse regime. The velocity filter SHIP was used to separate reaction products from the projectiles. Detector system is placed in the end of the separator and its scheme is on the Fig. 1. The evaporation residues (ER) were implanted into a position-sensitive 16-strip silicon PIPS detector (STOP) where their α and β decays occurred. In front of the STOP detector another 6-segment strip silicon detector (BOX) was placed to measure particles escaped from the STOP detector. Behind the silicon detector 4-crystal HPGe detector (CLOVER) was arranged to measure γ or X-rays in prompt/delayed coincidence with signals from the STOP detector. The resolution of CLOVER detector for summed spectra of all four crystals was 1.8 keV ($E_\gamma \approx$560 keV).

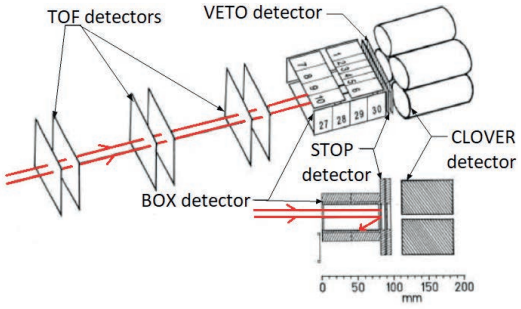


Figure 1 – Scheme of detector system arrangement. Red lines denote the trajectory of fusion products and scattered projectiles [Hofmann, 2009].

1.2 Conversion electron spectroscopy

Registration of conversion electrons and γ quanta emitted in the process of deexcitation is a relatively new technique used, for example, in the

*adam.bronis@gmail.com
†stanislav.antalic@fmph.uniba.sk

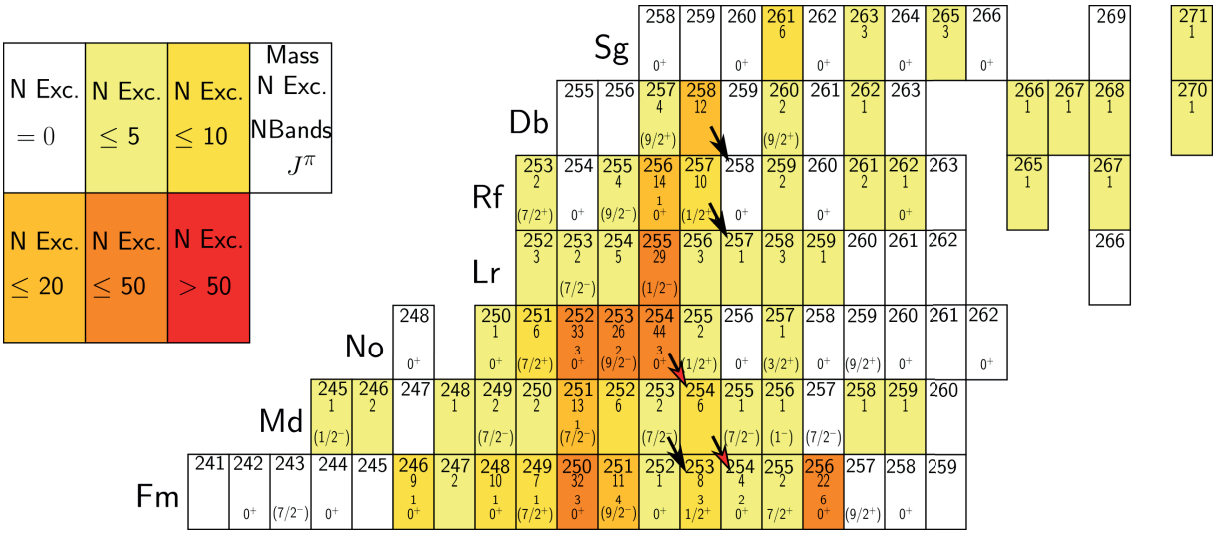


Figure 2 – Available spectroscopic information for the transfermium region [Ch. Theisen, 2015]. Numbers correspond to the known excited states. Spin and parity of the ground state is also shown. Black arrows denote previously investigated isotopes which decay via electron capture. Red arrows denote the isotopes studied in this work and in our previous study of [Bronis, 2018]

investigation of high energy K isomer states [F.P. Hessberger, 2010]. The condition of conversion electron and γ quantum coincidence results in significant background suppression. Moreover, with the additional condition of coincidence with X rays, it is possible to selectively assign deexcitation cascades to a given element. Technique of coincidences between conversion electrons and γ or K X-rays was successfully used for the identification of isomeric states in ^{253}Fm and ^{253}No by Antalic et al. [S. Antalic, 2011] Furthermore, electron capture decay of ^{258}Db was studied by using the delayed coincidences between K X-rays and/or conversion electrons by Hessberger et al. [F. P. Hessberger, 2016b]. However, this technique has been rarely used in the region of heavy elements. Due to the fact that deexcitation of populated states in such isotopes often occurs via internal conversion, we decided to use this technique for the study of the isotope ^{254}Md.

Therefore, we are searching for the coincidences (Δt<5 μs) between characteristic X-rays, given transitions and CEs.

Schematically, conversion electron spectroscopy in our study can be described in following steps (Fig. 3):

1. Reaction product (black circle) is implanted into the position sensitive silicon detector.

2. Consequently, implanted nuclei decays via electron capture and characteristic X-ray is emmited. Usually, excited states in daughter nuclei (red circle) are populated. Deexcitation of nuclei can occur via:

   (a) Internal conversion, in which an characteristic X-ray and a conversion electron (e) is emmited.

   (b) Emmision of a γ quantum.

Key attributes of conversion electron spectroscopy can be summarised as:

- Highly selective method - significant background suppression.

- Silicon detector works as a CE calorimeter. However, the discrimination level of the silicon detector has to be set as low as possible to register these CEs.

- Very efficient in the region of heavy elements due to the dependence of internal conversion on the proton number as $\sim Z^3$ especially for low energy transitions.

- CEs work as a markers of isomeric state decay enabling them to discriminate from background and random coincidences.

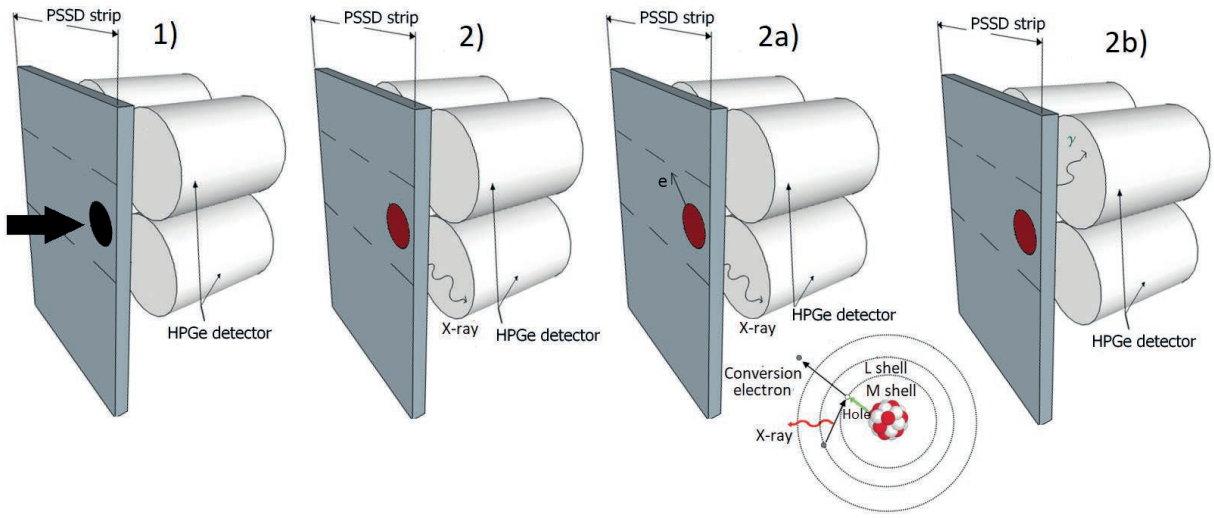


Figure 3 – Schematic of conversion electron-γ coincidence technique used in our work. **1)** Implantation of reaction products into the position sensitive silicon detector. **2)** Electron capture decay with emission of the characteristic X-ray. **2a)** Deexcitation via internal conversion, emission of characteristic X-ray and conversion electron. **2b)** Deexcitation via emission of γ quantum.

Table 1 – Summary of the decay data of isotopes identified according to the (Fig. 4 a).

Isotope	$E_{\alpha EXP}/keV$	$E_{\alpha REF}/keV$	$T_{1/2REF}$	i_{relREF}	Reference
^{254}No	8094±10	8088±10	51 s ±10	≈1.0	[F.P. Hessberger, 2006]
^{250}Fm	7430±10	7435±11	30 min ±2	0.83 ±0.03	[G. Münzenberg, 1981]
^{254}Fm	7188±10	7192±2	3.240 h±0.002	0.849±0.005	[I. Ahmad, 1984]
^{246}Cf	6751±10	6758±10	35.7 h ±0.5	0.793±0.01	[M. Magara, 1996]

- Using the BrIcc (Band-Raman Internal conversion coefficient) [T. Kibédi, 2008] possible conversion coefficient for given multipolarities can be obtained.

2 Data analysis

The reason behind the limited nuclear spectroscopy data in this region is usual low production cross sections of these isotopes ranging from μb to pb. One of the largest cross sections is σ=5 μb as the maximum for ^{254}No production via reaction ^{208}Pb(^{48}Ca, 2n)^{254}No. Thus, ^{254}No is an obvious choice for the spectroscopy of its daughter isotope ^{254}Md despite the relatively low ^{254}No EC branching ratio $0.1^{+0.01}_{-0.01}$[F.P. Hessberger, 2010].

In the complete fusion reaction ^{48}Ca+^{208}Pb compound nuclei ^{256}No* were produced and 2n-evaporation channel was the dominating channel, which lead to the ^{254}No evaporation residues (ER).

Decay products were identified by comparing observed energies of α particles (Fig. 4 a), with the known energies (Tab. 1). Investigated isotope ^{254}Md was produced in the ^{254}No$\xrightarrow{EC}$^{254}Md$\xrightarrow{EC}$^{254}Fm decay chain. Approximately 270 000 nuclei of ^{254}No

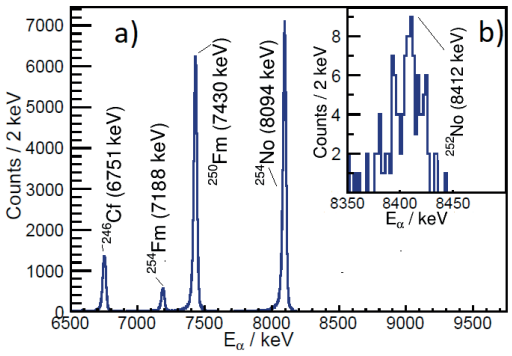


Figure 4 – **a)** Spectrum of α decays observed in beam pause. **b)** Inset displays part of the same spectrum in the range 8350–8500 keV. Isotope ^{252}No was produced due to the ^{206}Pb impurities in the target material.

were produced, according to the pause spectrum shown in Fig. 4 and the number of ^{250}Fm alpha decays with correction factors for geometry 0.53 and pause 0.75 where we used the branching ratio of ^{254}No b_α=0.9$^{+0.1}_{-0.1}$. Based on the HIVAP calculations [Reisdorf, 1981], the direct production of ^{254}Md via *pn* evaporation channel was negligible [F.P. Hessberger, 2006].

2.1 Excited states of ^{254}Md

Using prompt CE-γ coincidence technique, the characteristic *K* X-rays of nobelium, mendelevium and fermium were identified (Fig. 5 b).

Strong γ-ray transitions (53, 841, 887, 943 keV) corresponding to deexcitation of ^{254}No isomeric state previously reported in [S. K. Tandel, 2006] were present (Fig. 5 a). We observed prompt coincidences between characteristic mendelevium *K* X-rays and γ transitions simultaneously with conversion electrons. The γ-γ coincidences gated by conversion electrons and mendelevium *K* X-rays 117 – 119 keV (118.09 Md $K_{\alpha 2}$ [C. Thierfelder, 2008]) and 123 – 125 keV (124.17 Md $K_{\alpha 1}$ ibid.) were used to identify transitions in coincidence with characteristic mendelevium X-rays (Fig. 6). To emphasize these transitions, both gated spectra (117 – 119 keV and 123 – 125 keV) were summed (Fig. 6a). Summary of γ-γ coincidences gated by the conversion electrons and the mendelevium X-rays or by the most intense ^{254}Md γ-ray transitions is in Tab. 2. All of these events (277, 505 and 781 keV) have TAC value (time differences between STOP detector signals and CLOVER signals) 1500 – 2000 channels determining them as "prompt" (Fig. 5 d).

Table 2 – γ-γ coincidences gated by the mendelevium *K* X-rays or the most intense ^{254}Md γ transitions (277, 505 and 781 keV). Energies are in keV.

Gate	Coinciding lines
Md $K_{\alpha 1}$ 124	118, 124, 277, 781
Md $K_{\alpha 2}$ 118	118, 124, 276, 505, 781
277	118, 124
505	118
781	118, 124, 160

However, in case of the ^{254}Md most intense γ-ray transitions (277, 505 and 781 keV), they were found in coincidence with the signals from BOX detector

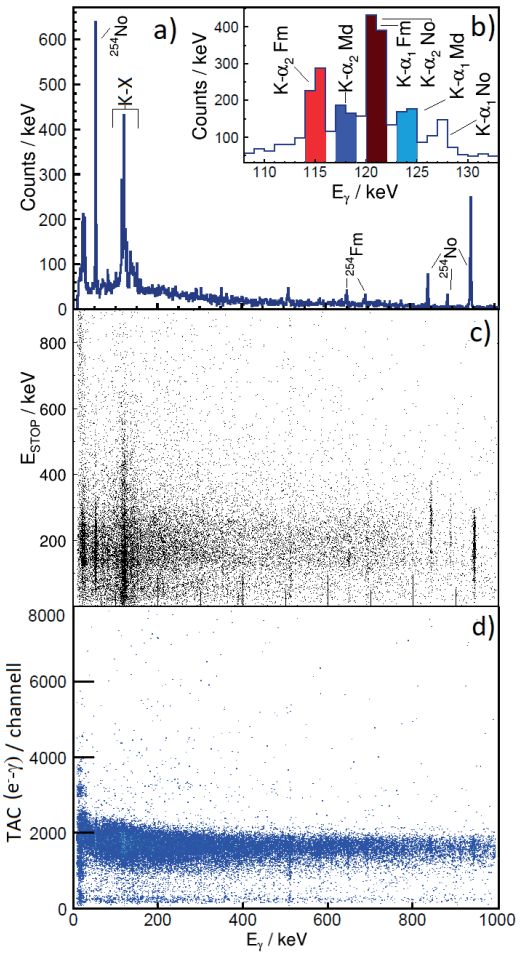


Figure 5 – **a)** Energy spectrum of γ transitions and and X-rays in prompt coincidence with conversion electrons (E_{CE}=0 –900 keV). **b)** Inset displays part of the same spectrum in the range 108 –133 keV. K X-rays characteristic for the given elements are visible. **c)** CE-γ coincidence matrix which displays coincidences of γ and X-rays with conversion electrons (E_{CE}=0 –900 keV). Y axis corresponds to the conversion electron energy. **d)** Uncalibrated TAC spectrum which shows a two-dimensional matrix for the time differences between STOP detector signals and CLOVER signals (TAC) versus their energy measured by the CLOVER detector. Y axis corresponds to the time difference between the registration of conversion electrons and γ ray or X-ray emission.

with energies ranging from 900 keV up to 1200 keV. Energy from BOX detector is created as a sum of energies from STOP and BOX detector. Therefore, these signals could be indication of the population even higher excited states than sum of γ transitions (gated by the characteristic mendelevium X-rays

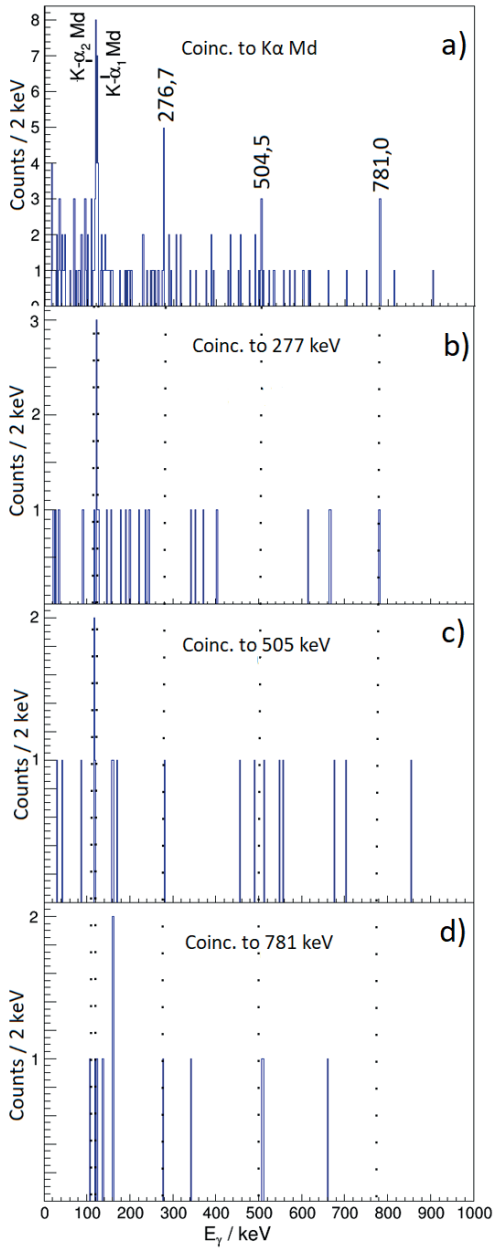


Figure 6 – **a)** Energy spectrum of γ transitions and X-rays in prompt coincidence with conversion electrons (E_{CE}=0 – 900 keV) and gated by the characteristic mendelevium K X-rays (117-119 keV and 123-125 keV). Panels **b)**, **c)** and **d)** show coincidences with the most intensive γ transitions assigned to ^{254}Md. In panel **d** 161 keV transition is artificially created by the scattering of 943 keV transition assigned to deexcitation of ^{254}No.

Fig. 6 a) and corresponding energies of conversion electrons. In our analysis, we investigated the concidences between the characteristic K X-rays of mendelevium gated by the conversion electrons with energy E_{EC}=0 – 900 keV (Fig. 6). Three most intense transitions were observed, with energies 276.7, 504.5 and 781.0 keV, where also K X-rays of mendelevium are present. It should be noted that the sum of two of these energies 276.7 keV and 504.5 keV fits the value of the latter 781.0 keV, and can be indication of a transitions in a cascade. However, according to

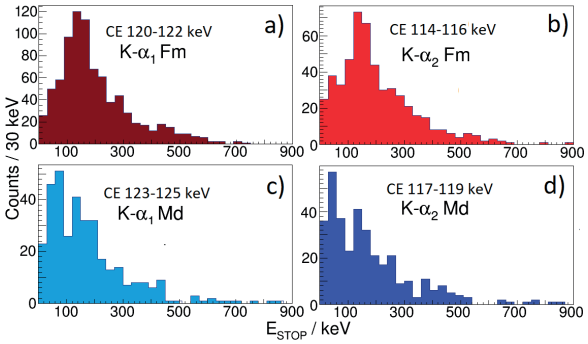


Figure 7 – Energy spectrum of conversion electrons (E_{CE} = 0 – 900 keV) gated by the characteristic fermium K X-rays **a)** - 120 –122 keV **b)** - 114 –116 keV and mendelevium K X-rays **c)** - 117 –119 keV **d)** - 123 –125 keV.

the coincidence spectrum shown in Fig. 6 **b)** and **d)** it can be shown that 276.7 keV transition is in coincidence with 781.0 keV transition. Nevertheless, due to the low statistics ambiguity of this coincidence has to be noted. According to coinciding γ ray transitions (Fig. 6) we can assume, that the energy of highest populated level is $\approx$ 1060 keV, calculated as a sum of γ ray transitions found in coincidence (781 and 277 keV). We also analysed CE energies in coincidence with observed transitions 781 and 277 keV (Fig. 8) to estimate energy of the highest populated state. Summing the 277 keV transition with its maximum CE energy $\approx$ 630 keV and the conversion electron L shell binding energy 28 keV or the K shell binding energy 146 keV we obtain 940 – 1060 keV. Similarly, sum of 781 keV transition with its maximum CE energy $\approx$ 210 keV and the L or K shell binding energy gives the value 1020 – 1140 keV. We estimated the probability of direct population of this state with energy $\approx$ 1050 keV. Ratio of coicidences between 277 keV and 781 keV transitions and number of ^{254}Md nuclei is 1678/27000 giving the probability 6%. Number of coincidences between 277 keV and 781 keV was calculated using count of observed coincidences (Fig. 6 b and d), γ ray

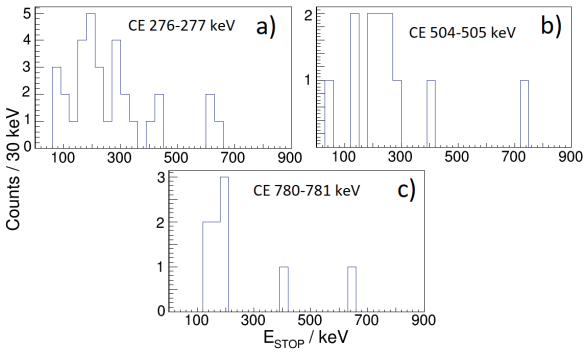


Figure 8 – Energy spectra of the conversion electrons in coincidence with the ^{254}Md γ ray transitions. **a)** Conversion electrons in coincidence with the 277 keV γ ray transition. **b)** Conversion electrons in coincidence with the 505 keV γ ray transition. **c)** Conversion electrons in coincidence with the 781 keV transition.

detection efficiency (0.06 for 277 keV and 0.025 for 781 keV transition [F.P. Hessberger, 2010]) 0.53 factor for registration of conversion electron and 0.75 factor determined by the active volume of the detector. However, as we observed only one coincidence (Fig. 6 b and d) ambiguity of this probability has to be noted. We calculate log(ft) value corresponding to the direct EC decay of ^{254}No into 1050 keV state using the Q_{EC}=1270$^{+100}_{-100}$ keV (g.s. to g.s.)[M. Wang, 2012], energy of populated state 1050$^{+100}_{-100}$ keV, $T_{1/2}$=51$^{+10}_{-10}$ s branching ratio for EC decay 0.1 and absolute intensity 0.6$^{+0.4}_{-0.4}$% (per 100 decays of parent nucleus). Obtained log(ft) value was 4.3$^{+1.3}_{-1.3}$ for the non-unique transition and 3.5$^{+1.5}_{-1.5}$ for the first unique transition. Fractions of K-shell, L-shell or M-shell capture were 0.3$^{+0.4}_{-0.4}$, 0.48$^{+0.17}_{-0.17}$ and 0.21$^{+0.21}_{-0.21}$ for the non-unique and 0.0, 0.63$^{+0.16}_{-0.16}$ and 0.34$^{+0.12}_{-0.12}$ for the first unique. We also calculated the log(ft) value for the g.s. to g.s EC decay. In this case log(ft)= 5.7 was obtained for non-unique or unique transition. As excited states in ^{254}Md are populated via EC decay of even-even nuclei ^{254}No with spin and parity 0+ we can asume that these directly populated states should have spin $\leq$2 based on the calculated log(ft) values $\leq$5 5.7 which correspond to the allowed or first forbidden transition according to the log(ft) systematics [B. Singh, 1998].

From the comparison of conversion-electron energies in coincidence with the fermium or mendelevium K X-rays (Fig. 7), we can expect presence of converted transition in the deexcitation of ^{254}Md, with energies of conversion electrons 30 –90 keV. It has to be noted that similar energies of conversion electrons are also in coincidence with the most intense γ ray transition (277 keV) assigned to the deexcitation of ^{254}Md therefore this highly converted transition could be in cascade with the 277 keV transition.

3 Discussion

In our previous work ([Bronis, 2018]), we discussed the possible configurations of low lying and g.s. states in ^{254}Md. We assumed that the low lying 3$^-$ state in ^{254}Md composed from proton and neutron one-qp states ([A. Parkhomenko, 2004], [A. Parkhomenko, 2005]) populates directly high energy ($>$1000 keV) levels in ^{254}Fm via EC decay. Direct population of this 3$^-$ state in ^{254}Md via EC decay of ^{254}No with g.s. 0$^+$ requires third forbidden transition with log(ft)$>$15 (ΔJ=1,2,3 and $\Delta\pi$=yes). Therefore, another populated higher energy level/s should deexcites via this 3$^-$ state. Presence of another level/s is also supported by our recent observation of γ ray transitions during deexcitation of states in ^{254}Md, which are populated after EC decay of ^{254}No. We can expect that spin of these states should be $\leq$2 due to the calculated log(ft) value $\leq$5.7.

Based on the calculated energies of proton 1-qp states for odd isotopes with Z=101 [A. Parkhomenko, 2004] in the vicinity of ^{254}Md and the known experimental data regarding $N = 153$ isotone ^{253}Fm [S. Antalic, 2011] we estimate the possible 2-qp configurations of excited states in ^{254}Md. In isotope ^{253}Fm neutron state ν:9/2$^+$[615] with energy 530 – 550 keV was populated in EC decay of ^{253}Md via probable transition between proton and neutron states

$$\pi : 7/2^-[514] \longrightarrow \nu : 9/2^+[615]$$

where also significant direct population of the ν:7/2+[613] state with energy 130 – 150 keV is expected. In study of ^{255}Md by Ahmad et al. [I. Ahmad, 2000] same transition was observed where also ν9/2+[615] state was populated. Identical transitions were observed also in the EC decay of ^{257}Md [K. J. Moody, 1993]. Possible 2-qp configurations with spin $\leq$2 and excitation energy $\approx$1000 keV based on combining

of neutron states ν:7/2$^+$[613] or ν:9/2$^+$[615] with 1-qp states of odd (N=152, N=154 Fig. 9) isotopes with Z=101 [A. Parkhomenko, 2004] are ν:9/2$^+$[615]⊗π:9/2$^+$[624],ν:9/2$^+$[615]⊗π:7/2$^+$[633] ν:9/2$^+$[615]⊗ π:7/2$^-$[514].

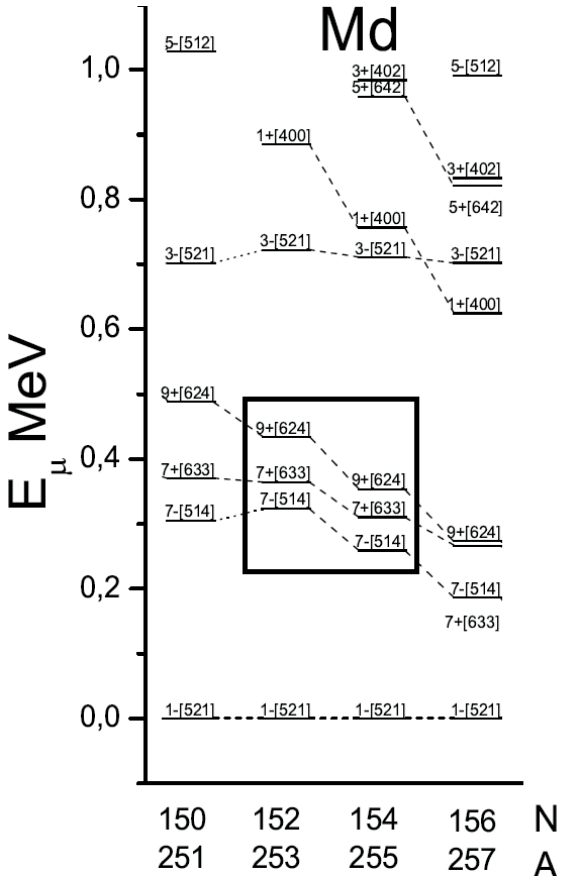


Figure 9 – Systematics of one-quasiparticle proton states calculated for odd-A isotopes of mendelevium [A. Parkhomenko, 2004] . Black square denotes 1-qp configurations used in our analysis.

For populated states with energies $<$1000 keV possible configurations are ν:7/2$^+$[613]⊗ π:7/2$^-$[514],ν:7/2$^+$[613]⊗π:9/2$^+$[624], ν:7/2$^+$[613]⊗ π:7/2$^+$[633].

However, as ambiguity arises due to the proximity of proton orbitals π:1/2$^-$[521] and π:7/2$^-$[514] in the region of deformed nuclei ([R. R. Chasman, 1977]), configurations combining the π:1/2$^-$[521] orbital also need to be taken into account. In this case, π:1/2$^-$[521]⊗ ν:5/2$^+$[622] is possible configuration for the states with energy 1000 – 1200 keV and π:1/2$^-$[521]⊗ ν:3/2$^+$[622] is probable as a state with energy $<$1000 keV and spin $\leq$2.

Based on the analysis of possible 2-qp states and γ-γ coincidences found, we are able to present tentative scheme of states populated after EC decay of ^{254}No (Fig. 10).

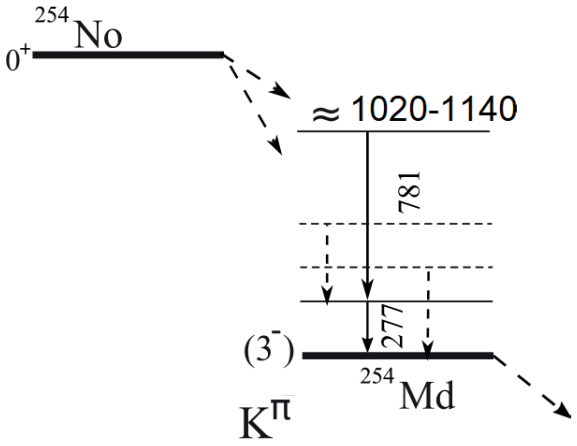


Figure 10 – Tentative level scheme of states populated after EC of ^{254}No. Scheme is based on the investigations of γ-γ coincidences and energies of conversion electrons corresponding to the most intense γ ray transitions assigned to the deexcitation of ^{254}Md.

4 Conclusion

Excited states of ^{254}Md populated after EC decay of ^{254}No were investigated for the first time. Tentative level scheme of states populated after EC decay of ^{254}No was proposed with previously unobserved 277, 505 and 781 keV transitions. Corresponding to this scheme new limits of excitation energy was calculated (1050 – 1150 keV). Moreover, possible 2-qp configurations of these excited states of ^{254}Md were investigated. In the next analysis, we are going to further extend the investigation of electron capture in the transfermium region with focus on the mendelevium isotopes.

Acknowledgements

I would like to thank my supervisor, doc. Mgr. Stanislav Antalic, PhD. for many insightful discussions. Last, not least I would like to thank Mgr. Dušan Štefánik, PhD. for his patience with my questions.

References

[A. Bhagwat, 2005] A. Bhagwat, e. a. (2005). Nuclear Data Sheets for A = 254. *Nuclear Data Sheets*, 105:972.

[A. Parkhomenko, 2004] A. Parkhomenko, e. a. (2004). Proton One-quasiparticle States of Heaviest Nuclei. *Acta. Phys. Pol. B*, 35:2447–2471.

[A. Parkhomenko, 2005] A. Parkhomenko, e. a. (2005). Neutron One-Quasiparticle States of Heaviest Nuclei. *Acta. Phys. Pol. B*, 36:3115–3137.

[B. Singh, 1998] B. Singh, e. a. (1998). Review of Log ft Values in β decay. *Nuclear Data Sheets*, 84:487–563.

[Bronis, 2018] Bronis, A. (2018). Conversion electron - gamma spectroscopy of ^{254}Fm. In *Proceedings of the Student Science Conference 2018*, Bratislava, Slovakia.

[C. E. Bemis, 1976] C. E. Bemis, e. a. (1976). X-Ray Identification and Decay Properties of Isotopes of Lawrencium. *Ann. Rpt. Oak Ridge*, 5111:58.

[C. Thierfelder, 2008] C. Thierfelder, e. a. (2008). Dirac-Hartree-Fock studies of X-ray transitions in meitnerium. *Eur. Phys. J. A*, 36:227.

[Ch. Theisen, 2015] Ch. Theisen, e. a. (2015). In-beam spectroscopy of heavy elements. *Nuc. Phys. A*, 944:333.

[F. P. Hessberger, 2016a] F. P. Hessberger, e. a. (2016a). Alpha- and EC-decay measurements of ^{257}Rf. *Eur. Phys. J. A*, 52:192.

[F. P. Hessberger, 2016b] F. P. Hessberger, e. a. (2016b). Investigation of electron capture decay of ^{258}Db and α decay of ^{258}Rf. *Eur. Phys. J. A*, 52:328.

[F.P. Hessberger, 2006] F.P. Hessberger, e. a. (2006). Alpha-gamma decay studies of ^{255}No. *Eur. Phys. J. A*, 29:165–173.

[F.P. Hessberger, 2010] F.P. Hessberger, e. a. (2010). Decay studies of K isomers in ^{254}No. *Eur. Phys. J. A*, 43:55–66.

[G. Münzenberg, 1981] G. Münzenberg, e. a. (1981). Identification of Element 107 by α-Correlation Chains. *Z. Phys. A*, 300:107–108.

[Hofmann, 2009] Hofmann, S. (2009). Superheavy Elements. *Lecture Notes in Physics*, 764:203–252.

[I. Ahmad, 1984] I. Ahmad, e. a. (1984). Alpha Decay Properties of ^{247}Cf, ^{248}Cf, ^{252}Fm and ^{254}Fm. *Nucl.Phys. A*, 413:423–431.

[I. Ahmad, 2000] I. Ahmad, e. a. (2000). Spectroscopic studies beyond the n=152 neutron gap: Decay of $^{255}_{101}$Md and $^{256}_{101}$Md. *Phys. Rev. C*, 61:0443011–0443016.

[K. J. Moody, 1993] K. J. Moody, e. a. (1993). Decay properties of heavy mendelevium isotopes. *Nuc. Phys. A*, 563.

[M. Emeric, 2019] M. Emeric, e. a. (2019). Logft National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory http://www.nndc.bnl.gov/logft/.

[M. Magara, 1996] M. Magara, e. a. (1996). Decay Properties of ^{245}Cf. *Radiochim.Acta*, 72:39–43.

[M. Wang, 2012] M. Wang, e. a. (2012). The AME2012 atomic mass evaluation. *Chinese Physics C*, 36:1603–2014.

[P. C. Sood, 2004] P. C. Sood, e. a. (2004). Unusual features of β transition rates in heavy deformed nuclei. *Phys. Rev. C*, 69:057303.

[P. C. Sood, 2016] P. C. Sood, e. a. (2016). Description of Long-Lived Isomers in ^{254}Md. *Proceedings of the DAE-BRNS Symp. on Nucl. Phys.*, 61.

[P. R. Fields, 1970] P. R. Fields, e. a. (1970). Nuclear properties of ^{254}Md, ^{255}Md, ^{256}Md ^{257}Md and ^{258}Md. *Nuc. Phys. A*, 154:457.

[R. R. Chasman, 1977] R. R. Chasman, e. a. (1977). Survey of single-particle states in the riiass region a>228*. *Rev. of Mod. Phys.*, 49:833.

[Reisdorf, 1981] Reisdorf, W. (1981). Analysis of fissionability data at high excitation energie. *Z. Phys. A*, 300:227–238.

[S. Antalic, 2011] S. Antalic, e. a. (2011). Isomeric states in ^{253}No and ^{253}Fm. *Eur. Phys. J. A*, 105:62.

[S. K. Tandel, 2006] S. K. Tandel, e. a. (2006). K Isomers in ^{254}No: Probing Single-Particle Energies and Pairing Strengths in the Heaviest Nuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 97:21–24.

[T. Kibédi, 2008] T. Kibédi, e. a. (2008). Evaluation of theoretical conversion coefficients using BrIcc. *Nucl. Instr. and Meth. A*, 589:202–229.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 59–63
ISBN 978-8081470936, © 2019 Alžbeta Brisudová

Radon potential of the soils – approaches and applications

Alžbeta Brisudová[1]*
Supervisor: Martin Bulko[1†], Karol Holý[1‡]

[1] Department of Nuclear Physics and Biophysics, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstract

Adverse effects of radon inhalation on human body are well known; exposure from radon and its decay products is the second leading cause of lung cancer after smoking [UNSCEAR, 1982]. To address this issue, the EU member states shall establish national action plans addressing long-term risks from indoor radon exposures, and to identify areas where radon concentration is expected to exceed the relevant national reference level [Euratom 2013/59, 2014].

The regions where elevated indoor radon levels are expected for natural, i.e. geogenic reasons are called geogenic radon prone areas [Bossew, 2014]. Radon-prone areas can be identified either directly by using indoor measurements [WHO handbook, 2009], or indirectly from the properties of the upper layer of soil (radium and radon concentrations, porosity, soil type, permeability, water content, etc.). In this paper, four different indirect approaches for determining the geogenic radon potential are compared on the area of Mochovce, Slovakia (22 x 22 km^2). This area is especially suitable for these purposes because due to the presence of a nearby nuclear power plant, the density of ^{222}Rn, ^{238}U, ^{232}Th and ^{40}K measurement points is very high [SGIoDŠ, 2018]. Radon potential maps were created and then used to identify villages where elevated radon levels were suspected. In these villages, measurements of indoor radon were performed and evaluated.

Materials and Methods

Mochovce area (~22 x 22 km^2) is especially suitable for the study of geogenic radon potential because this area was thoroughly mapped for the presence of ^{238}U, ^{232}Th, ^{40}K in the soil (~2 measurement points per km^2) and ^{222}Rn in the soil air (~0.6 points km^{-2}). In the vicinity of Mochovce nuclear power plant, high soil radon concentrations up to 100 kBq m^{-3} were found. In addition, within the framework of a joint project of V4 countries, measurements of indoor radon and thoron concentrations in this area were performed [Müllerová et al., 2014].

In order to calculate the geogenic radon potential, data on permeability and radon activity concentration in the soil were required. These data were taken from the map server of the State Geological Institute of Dionýz Štúr [SGIoDŠ, 2018]. Soil permeability was classified either as "impermeable", "moderately permeable" or "permeable", and the values of the permeability coefficient k were quantified as $5.2 \cdot 10^{-14}$ m^2, $1 \cdot 10^{-12}$ m^2, and $4 \cdot 10^{-11}$ m^2, respectively [SÚJB, 2012; Nazaroff et al., 1988]. Radon activity concentration in the soil was measured at a depth of 0.8 m.

The maps of geogenic radon potential calculated according to different approaches were created in the geostatistical software Surfer 11. The kriging method was used for data interpolation. Areas with low, medium and high radon potential were highlighted in blue, yellow and red color, respectively.

Results and Discussion

The first approach, proposed by Neznal [Neznal et al., 2004], is based on determining the so called radon index (RI). This method is useful if the permeability is determined only quantitatively. Radon index of the area is defined in Table 1. In this table, the symbol C_A stands for radon concentration in the soil gas at a depth of 0.8 m. For our purposes, the radon indexes were assigned discrete numerical values (1=low, 2=medium, and 3=high).

Table 1: Radon index assessment [Neznal et al., 2004].

Radon index (RI)	C_A [kBq/m^3]		
Low	$C_A < 30$	$C_A < 20$	$C_A < 10$
Medium	$30 \leq C_A < 100$	$20 \leq C_A < 70$	$10 \leq C_A < 30$
High	$C_A \geq 100$	$C_A \geq 70$	$C_A \geq 30$
Permeability	Low	Medium	High

* brisudovaa@gmail.com
† bulko@fmph.uniba.sk
‡ Karol.Holy@fmph.uniba.sk

Based on the calculated values of RI, the map of radon potential was created (Fig. 1). According to this approach, there are two areas where elevated indoor radon concentrations can be expected (highlighted in red color).

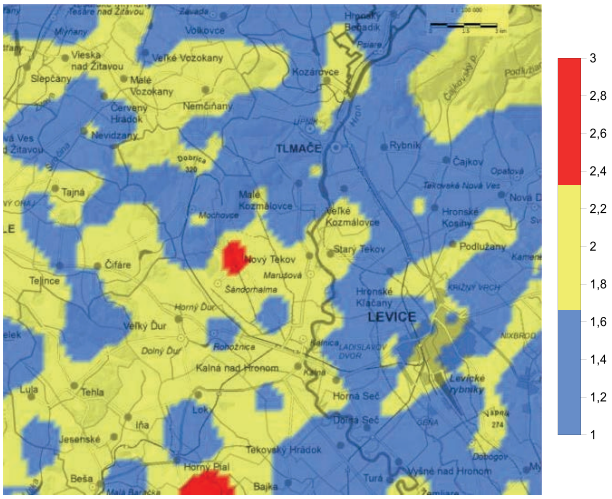


Figure 1: Map of radon potential determined from the table proposed by Neznal [Neznal, 2004].

The second approach for determining the geogenic radon potential (RP) was also proposed by Neznal [Neznal et al., 2004]. In this case, radon potential is defined by the following formula:

$$RP = \frac{C_A - 1}{-\log k - 10}, \qquad (1)$$

where C_A is radon activity concentration in the soil gas at a depth of 0.8 m [kBq m^3] and k is the permeability [m^2].

Based on the calculated value of RP, the radon index (low, medium, or high) is assigned according to Table 2. The resulting map of radon potential is shown in Fig. 2; we can observe that radon index in the area of interest is either "low" or "medium"; there are no radon indexes classified as "high".

Table 2: Radon index assessment [Neznal et al., 2004].

RP	Radon index (RI)
RP < 10	Low
10 < RP < 35	Medium
35 < RP	High

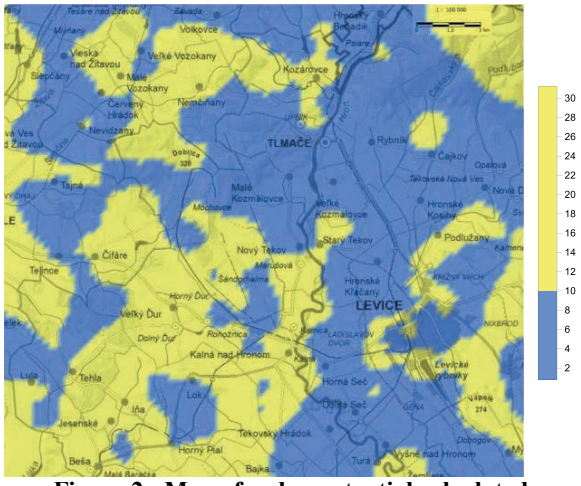


Figure 2: Map of radon potential calculated according to the formula proposed by Neznal [Neznal, 2004].

The third approach for determining the geogenic radon potential was proposed by Tanner [Tanner, 1988]. He defined the so called radon availability number (RAN) as follows:

$$RAN = C_\infty M, \qquad (2)$$

where C_∞ is the saturated radon activity concentration in the soil air [kBq m^{-3}] and M is the mean migration distance [m]. Since Tanner did not provide any delineation between low, medium and high risk areas, we used our own scale that shows high risk areas in red color. The resulting map is shown in Fig. 3.

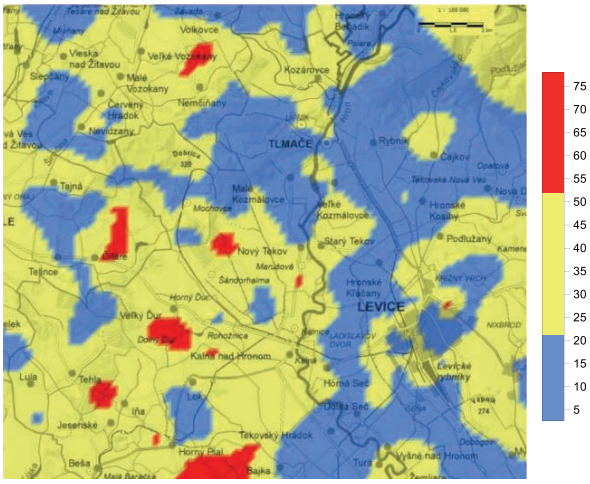


Figure 3: Map of radon potential calculated according to the formula proposed by Tanner [Tanner, 1988].

The last (fourth) approach utilized in our study was proposed by Slunga [Slunga, 1988]. In this case, the geogenic radon potential (R_{na}) is defined as:

$$Rn_a = log_{10}(6C_{sb}k^{0,077}) - 3, \quad (3)$$

where C_{sb} is the saturated radon activity concentration in the soil air [Bq m^{-3}] and k is the permeability of the soil [m^2]. Based on the value of geogenic radon potential R_{na}, the radon risk category is defined (Table 3). The Surfer-created map of geogenic radon potential calculated according to this classification is shown in Fig. 4.

Table 3: Radon risk assessment [Slunga, 1998].

Rn_a	Radon risk category
$Rn_a < 1$	Negligible
$1 < Rn_a < 2$	Low
$2 < Rn_a < 3$	High
$3 < Rn_a$	Very high

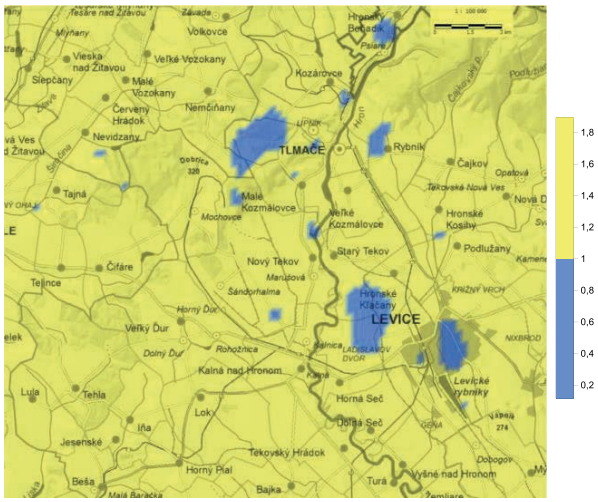


Figure 4: Map of geogenic radon potential calculated according to the formula proposed by Slunga [Slunga, 1988].

From Fig. 4 it follows that Slunga's approach classifies the majority of the area of interest as "low", and the remaining area as "negligible". This approach predicts that there are no "high" or "very high" radon risk categories in this area .

The values of geogenic radon potential for all these approaches were calculated and compared against the radon potential RP [Neznal et al., 2004]. The results are shown in the following three figures.

Fig. 5 shows that there is a good agreement between the averaged Neznal radon index RI defined in Table 1 and the Neznal radon potential RP calculated according to Eq. 1 (Fig. 5, black line R^2=0.958). In this figure, full black circles represent averaged values of RP for RI = 1, 2 and 3, respectively; horizontal whiskers represent standard deviations of the data. This figure also indicates that the trend between RI and RP calculated for each measured data point (black line) is close to the trend between RI and RP predicted by Table 2 (grey line).

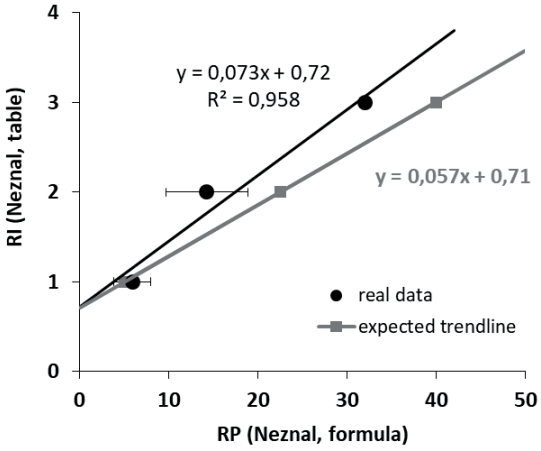


Figure 5: Relationship between radon index RI and radon potential RP [Neznal et al., 2004]. The values of RP were averaged (full black circles); horizontal whiskers represent the standard deviation of the data.

Geogenic radon potential R_{na} proposed by Slunga [Slunga, 1988] compared against radon potential RP proposed by Neznal [Neznal et al., 2004] is shown in Fig. 6. The relationship between these approaches is logarithmic, and the correlation coefficient is very high (R^2=0.985).

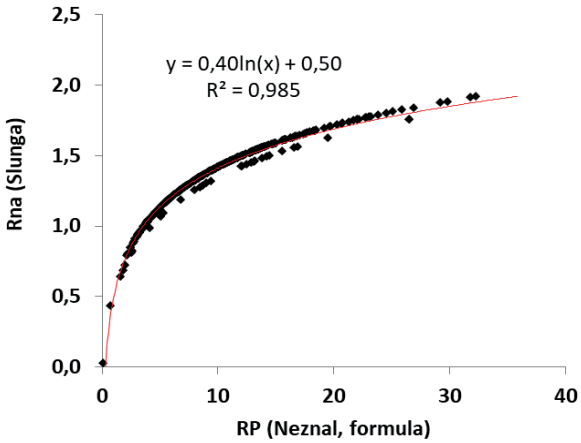


Figure 6: Relationship between radon potential Rna [Slunga, 1988] and radon potential RP [Neznal et al., 2004].

Geogenic radon potential R_{na} proposed by Tanner [Tanner, 1988] compared against the radon potential RP proposed by Neznal [Neznal et al., 2004] is shown in Fig. 7. In this case, the

relationship between these approaches is linear, and the correlation coefficient is also very high (R^2=0.980). Two different linear trends in Fig. 7 are caused by the fact that soil in the Mochovce area was classified either as "impermeable" or "moderately permeable" [SGIoDŠ, 2018]. Each of these two permeability values follows a different linear trend between RAN and RP.

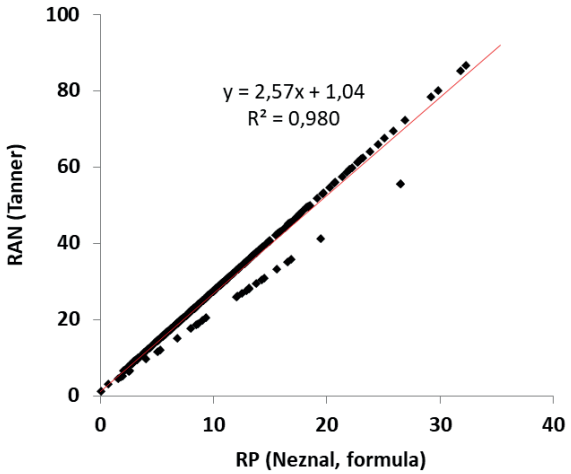


Figure 7: Relationship between radon available number RAN [Tanner, 1988] and radon potential RP [Neznal et al., 2004].

It can be concluded that while the match between visualized values of geogenic radon potential calculated from different classifications is rather poor (Fig. 1-4), the correlation between them is, in contrast, very strong (Fig. 5-7). Poor visual agreement between the Surfer-created maps of radon potential is likely caused by different categorization of radon-related risk, which is on the maps represented by blue, yellow and red areas.

Based on the created maps, four villages where elevated values of radon potential could be expected were chosen, and measurements of indoor radon were performed there by RADUET track detectors manufactured by the company Radosys during three months of winter. At present, the measurement results and their analyses are available for two villages. In the village that is located in the area of high radon potential calculated according to Tanner [Tanner, 1988], indoor radon activity concentrations (RAC) ranged from 130 to 900 Bq m^{-3}, and the average RAC was 404 Bq m^{-3}. In this village, in 56 % of cases the average RAC exceeded 300 Bq m^{-3}, which is the reference level recommended by the EU directive [Euratom 96/29, 1996] as well as by the Slovak law [Zákon 87 ZZ, 2018]. These results indicate that the maps of radon potential could serve as potent tools for delineating radon-prone areas.

Conclusion

In this paper, four different approaches for determining the geogenic radon potential were used to create radon potential maps in the Mochovce area, Slovakia. Correlation analyses revealed that these approaches are strongly correlated, but the maps appear to be visually different from each other. Poor visual agreement between the maps is likely due to the fact that different approaches use different categorization of radon-related risk. Radon potential maps served as a basis for identification of villages where elevated indoor radon levels were suspected. In these villages, measurements of indoor radon were performed and evaluated. Preliminary results indicate that the maps of radon potential are potentially valuable tools for characterizing radon-prone areas.

Acknowledgments

This work was supported by the Scientific Grant Agency of the Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic and the Slovak Academy of Sciences (VEGA project No. 1/0213/18). This work was also supported by the International Visegrad Fund (Project No. 21120293). The authors would like to express their gratitude to Monika Müllerová and Attila Moravcsík for their assistance in acquiring and processing of indoor radon concentration data.

References

[Bossew, 2014] Determination of radon prone areas by optimized binary classification. *Journal of Environmental Radioactivity* 129, pages 121-132.

[Euratom 96/29, 1996] European Commission, Council Directive 96/29/Euratom (1996), *Official Journal of the European Union* L 159, 29/06/1996 pp. 1-114.

[Euratom 2013/59, 2014] European Commission, Council Directive 2013/59 (2014). *Official Journal of the European Union* L13, Volume 57, ISSN 1977-0677.

[Müllerová et al., 2014] Müllerová, M., Kozak, K., Kovács, T. et al. (2014). Preliminary results of indoor radon survey in V4 countries. *Radiation Protection Dosimetry* 160(1–3), 210–213.

[Nazaroff et al., 1988] Nazaroff, W.W., Nero, A.V. (1988). Radon and its decay products in indoor air. John Wiley and Sons.

[Neznal et al, 2004] Neznal, M., Neznal, M., Matolin, M., Barnet, I., Miksova, J. (2004). The New Method for Assessing the Radon Risk of Building Sites. *Czech Geol. Survey Special Papers*, 16. Czech Geol. Survey, Prague, p. 47. https://www.radon-vos.cz/pdf/metodika.pdf

[SGIoDŠ, 2018] Map Server of the State Geological Institute of Dionýz Štúr: http://apl.geology.sk/mapportal/#/aplikacie/tiles

[Slunga, 1988] Slunga, E. (1988). Radon classification of building ground. *Radiation Protection Dosimetry* 24.1-4, 39-42.

[SÚJB, 2012] Stanovení radonového indexu pozemku přímým měřením, Státní úřad pro jadernou bezpečnost. https://www.sujb.cz/fileadmin/sujb/docs/radiacni-ochrana/121031_Doporuceni_RIP.pdf

[Tanner, 1988] Tanner, A. B. (1988). A tentative protocol for measurement of radon availability from the ground. *Radiation Protection Dosimetry*, 24.1-4: 79-83.

[UNSCEAR, 1982] United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation, 1982 Report to the General Assembly, with annexes. Ionizing Radiation: Sources and Biological Effects. United Nations, New York, 1982.

[WHO Handbook, 2009] WHO Handbook on indoor radon - a public health perspective, 2009. World Health Organization, ISBN 9789241547673.

[Zákon 87 ZZ, 2018] Zákon o radiačnej ochrane a o zmene a doplnení niektorých zákonov 87 (2018). Zbierka zákonov SR.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 64–70
ISBN 978-8081470936, © 2019 Markus Helej

Krátkožijúce rozpadové produkty radónu v atmosfére a ich správanie sa

Markus Helej[1]*
Školiteľ: Karol Holý[1‡]

[1] FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

Kontinuálnym meraním radónu a jeho krátkožijúcich produktov premeny bolo zistené správanie sa týchto rádionuklidov vo vonkajšej atmosfére v areáli Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK. Analyzovali sme dáta z mesiacov júl a november, ktoré dobre reprezentujú podmienky v letnom a jesennom období. Na meranie objemovej aktivity radónu bola použitá veľkoobjemová scintilačná komora. Produkty premeny radónu (^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi), ktoré sú súčasťou aerosólov obsiahnutých v atmosfére, boli zachytávané na filtri a následne boli merané alfa spektrometricky, pomocou kremíkového detektora umiestneného tesne nad filtrom. Z výsledkov vyplýva, že denné priebehy objemových aktivít produktov premeny sa správajú podobne a všetky vykazujú maximum v skorých ranných hodinách a minimum v poobedňajších hodinách. Určili sme vzťah medzi ekvivalentnou objemovou aktivitou (C_{eqRn}) a objemovou aktivitou radónu (C_{Rn}), spolu s vplyvom niektorých meteorologických parametrov ako sú vlhkosť, teplota a rýchlosť vetra na ich správanie sa. V niektorých prípadoch sa zistilo až 2 hodinové oneskorenie objemovej aktivity radónu za rýchlosťou vetra. Taktiež sme študovali rovnovážny faktor, ktorý vykazoval podobné priebehy v oboch mesiacoch, s maximom popoludní a minimom počas noci. Rýchlosť vetra má veľký vplyv na objemovú aktivitu radónu a jeho krátkožijúcich produktov premeny v atmosfére, preto sme bližšie skúmali aj smerovú distribúciu objemovej aktivity radónu v závislosti od smeru vetra.

Kľúčové slová: radón, denné variácie,krátkožijúce produkty premeny

1 Úvod

Radón ^{222}Rn neustále vstupuje z pôdy do spodnej vrstvy atmosféry kde podlieha vertikálnemu premiešavaniu a horizontálnemu transportu. Rádioaktívnou premenou radónu vznikajú dcérske rádionuklidy ^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi. Krátkožijúce produkty premeny radónu sa krátko po ich sformovaní stávajú súčasťou aerosólov v atmosfére. Krátko po sformovaní sú neutralizované a naviazané na malé čiastočky, plyny a vodné pary a vznikajú takzvané klastre. Po vzniku klastrov sa produkty premeny zachytávajú na aerosóly v atmosfére a turbulentnou difúziou sú rozptýlené až do troposféry [1]. Koncentrácia produktov premeny radónu v atmosfére závisí od miery ich odstraňovania, či už suchou alebo vlhkou deponáciou. Objemové aktivity ^{222}Rn a jeho produktov premeny (^{218}Po, ^{214}Pb, ^{214}Bi a ^{214}Po) vykazujú denné a sezónne variácie, na ktoré vplývajú rôzne meteorologické faktory ako sú teplota, vlhkosť, rýchlosť vetra a úhrn zrážok [2].

Prvotný záujem o radón nastal po uvedomení si jeho príspevku k radiačnej záťaži obyvateľstva z prírodných zdrojov. Simultánnym meraním objemových aktivít radónu a jeho produktov premeny sa získava dôležitý parameter, rovnovážny faktor, ktorý je z rádiohygienického hľadiska dôležitý pre výpočet efektívnej dávky a príkonu efektívnej dávky od radónu [3]. Neskôr bol rozpoznaný potenciál radónu pre výskum atmosféry. Jeho dobre definovaný zdroj, ktorým je pôda a jeho rádioaktívna premena, ho robia spoľahlivým ukazovateľom kontaktu vzdušnej masy so zemským povrchom.

V práci sú prezentované výsledky kontinuálneho monitorovania ^{222}Rn a jeho produktov premeny (^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi) v Bratislave. Výsledky analýzy dát zahrňujú štúdium vplyvu meteorologických faktorov, výskum rovnovážneho faktora a smerovej distribúcie objemových aktivít radónu a jeho produktov premeny.

2 Miesto merania

Objemové aktivity radónu a jeho krátkožijúcich produktov premeny (^{218}Po, ^{214}Pb, ^{214}Bi a ^{214}Po) boli merané na vo vonkajšej atmosfére v areáli Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave. Podnebie v Bratislave je vnútrozemské stredne teplé a mierne vlhké so studenými zimami. Podložie je tu

* Markus.Helej@fmph.uniba.sk
‡ Karol.Holy@fmph.uniba.sk

tvorené prevažne granitom a dominantné prúdenie vetra je zo severozápadu a východu [4].

3 Použité metódy

Na meranie objemovej aktivity radónu bol použitý kontinuálny monitor radónu, ktorý pracuje na báze scintilačnej komory a slúži ako referenčný monitor radónu na KJFB FMFI UK [5,6]. Do detektora je vzduch privádzaný cez 50m dlhú hadicu s vnútorným priemerom 5mm. Počas prechodu vzduchu hadicou sa z veľkej časti rozpadne prítomný torón. Pred tým ako vzduch vojde do komory, je zbavený vlhkosti v kolóne zo silikagélom a produktov premeny pri prechode vatovým filtrom. Prietok vzduchu je nastavený na 0,5 l.min-1 a nasávaný vzduch sa tak v komore zdrží asi 9 minút a potom pokračuje von cez prietokomer a čerpadlo. Na stenách komory je vrstva scintilátora, v našom prípade je to ZnS(Ag), ktorý reaguje na dopad α častíc emitovaním svetelných záblesков, ktoré vo fotonásobiči prevádzame na napäťový impulz. Záznam počtu impulzov z komory je uskutočňovaný v 30 minútových intervaloch. Objemovú aktivitu radónu vyhodnocujeme v dvojhodinových intervaloch zo sumy impulzov v štyroch po sebe idúcich meracích intervaloch. Detekčný systém na báze scintilačnej komory sme kalibrovali Ward – Borakovou metódou [7]. Citlivosť scintilačnej komory je 0,3 imp/min pri objemovej aktivite ^{222}Rn 1 Bq m^{-3} a chyba merania je menej ako 30%.

Objemové aktivity produktov premeny radónu boli merané pomocou detekčného systému zostrojeného na KJFB FMFI UK [8]. Pri premene radónu, respektíve torónu, vznikajú v atmosfére krátkožijúce izotopy polónia, bizmutu a olova a stávajú sa súčasťou aerosólov, ktoré sa nachádzajú v atmosfére. Pri presávaní vzduchu môžeme tieto produkty zachytiť na filtri a meraním aktivity filtra môžeme určiť objemovú aktivitu produktov premeny vo vzduchu. Filter je umiestnený vo vzdialenosti 4,5 mm pod polovodičovým detektorom s povrchovou bariérou. Na zachytenie produktov premeny radónu používame filtre RW19 firmy Millipore s priemerom 47 mm, hrúbkou 200 μm a priemerom pórov do 1,2 μm. Citlivá plocha polovodičového detektora je 450 mm^2. Objemovú aktivitu krátkožijúcich produktov premeny radónu (^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi), vyhodnocujeme v dvojhodinových intervaloch a chyba merania je menej ako 30%.

4 Výsledky

Cieľom práce bolo najmä získať poznatky o správaní sa ^{222}Rn a jeho krátkožijúcich produktov premeny, ktoré sú súčasťou aerosólov v atmosfére, určenie ich vzájomného vzťahu, štúdium vplyvu meteorologických prvkov, ako je teplota, vlhkosť a rýchlosť vetra na ich koncentrácie, preskúmať priestorovú distribúciu objemových aktivít vzhľadom na smer vetra a tiež správanie sa rovnovážneho faktora v atmosfére. V práci sú prezentované výsledky meraní z dvoch mesiacov, jedného letného (júl) a jedného jesenného (november). Základné štatistické údaje o nameraných koncentráciách sú uvedené v tabuľke 1. Údaje o hodnotách meteorologických prvkov bolo poskytnuté Katedrou meteorológie a klimatológie UK a boli merané priamo v areáli fakulty. Pre oba mesiace bolo študované správanie sa priemerných denných vĺn objemových aktivít ^{222}Rn , ^{218}Po, ^{214}Pb, ^{214}Bi, A_{ekv} a tiež rovnovážneho Faktora F, pretože na väčšom súbore dát je aperiodický vplyv meteorologických parametrov na koncentrácie uvedených rádionuklidov potlačený.

A_{ekv} bola vypočítaná podľa vzorca ktorý odporúča UNSCEAR [3]:

$$A_{ekv,Rn222} = 0,105 \cdot A_{Po218} + 0,515 \cdot A_{Pb214} + 0,380 \cdot A_{Bi214}$$

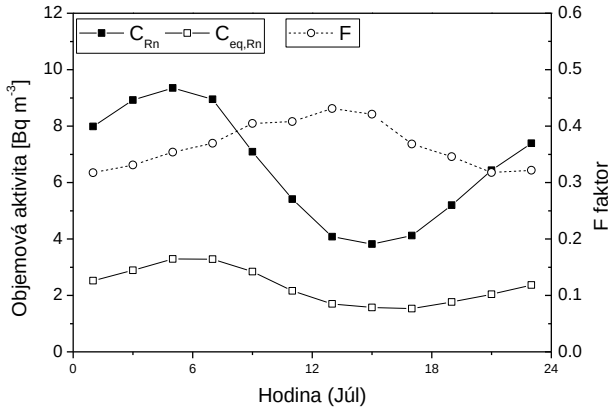
kde A_{Po218}, A_{Pb214} a A_{Bi214} sú objemové aktivity ^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi v atmosfére.

Rovnovážny faktor F bol vypočítaný podľa vzťahu:

$$F = \frac{A_{ekv}}{A_{(222_{Rn})}}$$

kde $A_{(Rn222)}$ je objemová aktivita ^{222}Rn v prízemnej vrstve atmosféry.

Charakteristické denné variácie ktoré môžeme vidieť na obr. 1 spôsobujú neustále meniace sa podmienky v spodnej časti atmosféry. Počas dňa je koncentrácia radónu v spodnej časti atmosféry najvyššia v skorých ranných hodinách. Pokles koncentrácie radónu až na minimum, sa dosahuje v popoludňajších hodinách. Po východe slnka začínajú slnečné lúče ohrievať zem a naruší sa tak teplotná inverzia v tejto vrstve. Teplý vzduch stúpa nahor a radón sa dostáva do vyšších vrstiev. Týmto spôsobom vzrastá intenzita vertikálnej výmeny vzduchu , zatiaľ čo koncentrácia radónu v prízemnej vrstve klesá [9]. Najsilnejšia vertikálna výmena nastáva v popoludňajších hodinách a C_{Rn} dosiahne minimum. S klesajúcou výškou slnka sa znižuje ohrievanie zemského povrchu a vertikálne prúdenie vzduchu sa spomaľuje. Koncentrácia radónu narastá. Počas noci sa teplota pôdy ochladzuje. Vertikálna výmena vzduchu sa spomaľuje a C_{Rn} až kým dosiahne maximum krátko pred východom slnka [10].

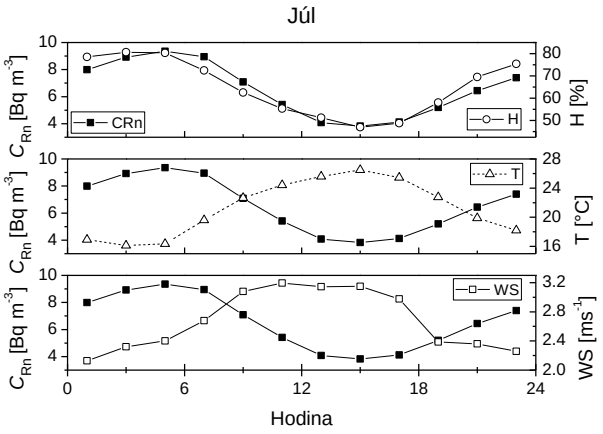


Obr. 1: Priemerný denný priebeh ^{222}Rn (C_{Rn}), ekvivalentnej objemovej aktivity ($C_{eq,Rn}$) a rovnovážneho faktora *F*.

Ako je možné vidieť na obr. 1, priemerná denná vlna objemovej aktivity ^{222}Rn (C_{Rn}) v júli, vykazuje maximum o 5. hodine (9,1 Bq.m^{-3}) a minimum popoludní o 15. hodine (3,9 Bq.m^{-3}). Ekvivalentná objemová aktivita ($C_{eq,Rn}$) ktorá vyjadruje lineárnu kombináciu objemových aktivít produktov premeny, vykazuje podobný priebeh s maximom o 5. hodine (3,29 Bq.m^{-3}) a minimom popoludní o 17. hodine (1,53 Bq.m^{-3}). Rovnovážny faktor je dôležitý parameter ktorý vystupuje vo výpočte efektívnej dávky obyvateľstva od radónu, spôsobený inhaláciou jeho krátkožijúcich produktov premeny, ale tiež je dôležité poznať ho pre výpočet rezidenčného času aerosólov v atmosfére [11]. Priemerný denný priebeh vykazuje len slabú variáciu s maximom o 13. hodine (F=0,43) a minimom neskoro večer až skoro ráno (F=0,32). Priemerné denné vlny ^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi majú prakticky podobný priebeh s maximom v skorých ranných hodinách a minimom popoludní.

Vzťah objemovej aktivity ^{222}Rn a teploty, vlhkosti a rýchlosti vetra súvisí s meniacimi sa podmienkami v spodnej vrstve atmosféry. Priemerný denný priebeh C_{Rn} je v dobrej antikorelácii s priemerným denným priebehom teploty (R^2 = 0,85) a je vidieť aj dobrú koreláciu s priemerným denným priebehom relatívnej vlhkosti vzduchu (R^2 = 0,89), čo úzko súvisí s ohrievaním atmosféry po východe slnka [9].

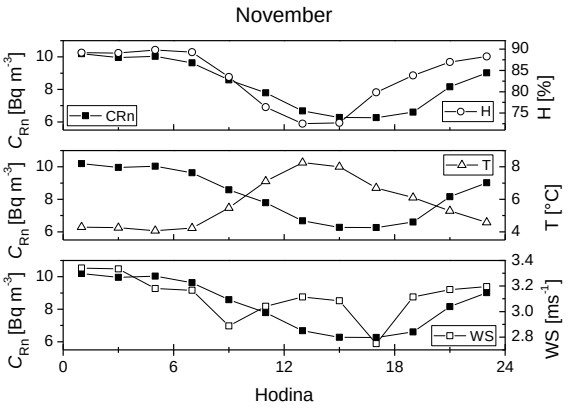
Podľa predpokladov ktoré vychádzajú s práce Jacobiho a Andre [12] je rovnováha medzi ^{222}Rn a jeho krátkožijúcimi produktmi premeny v prízemnej časti atmosféry závislá od turbulentného premiešavania. Avšak zmiešavacie procesy sú mimo iných faktorov, aj funkciou rýchlosti vetra. Na obr. 2 je vykreslená priemerná radónová denná vlna (C_{Rn}) v porovnaní s priemernou dennou vlnou rýchlosti vetra (WS) v mesiaci júl. Z priebehu priemernej dennej vlny WS vidíme že najvyššia rýchlosť vetra je dosiahnutá v poobedňajších hodinách (11:00).



Obr. 2: Priemerný denný priebeh objemovej aktivity ^{222}Rn (C_{Rn}), v porovnaní s priemerným denným priebehom rýchlosti vetra (*WS*), relatívnej vlhkosti (*H*) a teploty vzduchu (*T*), v mesiaci júl.

V tomto období je prirodzene aj radón intenzívnejšie transportovaný s prízemnej vrstvy atmosféry, čoho výsledkom je antikorelácia medzi priemernými hodnotami C_{Rn} a rýchlosťou vetra. Pritom existuje približne 2 hodinové oneskorenie minimálnej C_{Rn} za maximálnou rýchlosťou vetra. Po posune priemerných denných priebehov C_{Rn} dopredu o 2 hodiny bola zistená antikorelácia medzi C_{Rn} a rýchlosťou vetra na úrovni R^2 = 0,93. Priemerné denné priebehy objemových aktivít ^{218}Po, ^{214}Pb a ^{214}Bi, vykazujú podobné priebehy ako priemerné denné priebehy C_{Rn}. Tiež vykazujú maximá v skorých ranných hodinách a minimá v popoludňajších hodinách. Avšak existuje časové oneskorenie priebehov rozpadových produktov za priebehom C_{Rn}. U ^{218}Po je to ~ 0,5 hodina a u ^{214}Pb a ^{214}Bi je to ~ 1 hodina. Po posune C_{Rn} priebehu dopredu o uvedené časy je korelácia medzi dennými priebehmi C_{Rn} a dennými priebehmi jeho produktov premeny na úrovni R^2 = 0,99.

V novembri prevláda v Bratislave typické jesenné počasie. Teplota a rýchlosť vetra sa v dlhodobom priemere počas dňa len málo menia. V priemere teplota v novembri vykazovala maximálnu hodnotu 8,2 C° o 13. hodine a minimálne hodnoty na úrovni 4 C° v nočných hodinách až do východu slnka.



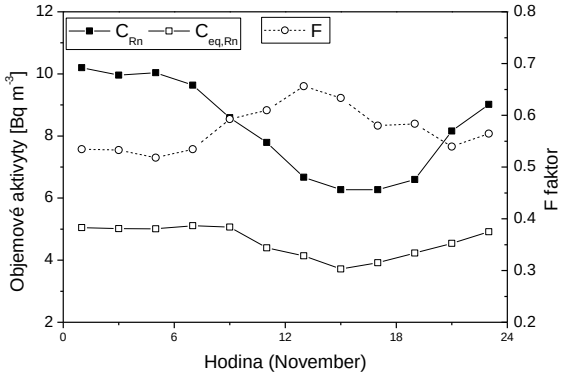
Obr. 3: Priemerný denný priebeh objemovej aktivity ^{222}Rn (C_{Rn}), v porovnaní s priemerným denným priebehom rýchlosti vetra (*WS*), relatívnej vlhkosti (*H*) a teploty vzduchu (*T*), v mesiaci november.

Rýchlosť vetra bola v priemernom dennom priebehu prakticky konštantná a to na úrovni okolo 3,3 m.s^{-1}. Priemerný denný priebeh C_{Rn} vykazuje miernu variáciu s maximom 10 Bq.m^{-3} v nočných hodinách (od 23. hodiny do 5. hodiny rannej) a minimom popoludní o 16. hodine na úrovni 6,2 Bq.m^{-3}. Minimum C_{Rn} bolo oneskorené približne o 1,5 hodiny za maximom teploty v priemernom dennom priebehu. Rovnaký časový posun bol aj medzi minimom relatívnej vlhkosti a minimom C_{Rn} (Obr. 3).

Objemové aktivity ^{218}Po a ^{214}Pb, ^{214}Bi a A_{ekv} boli v nočných hodinách od 23. hodiny až do 9. hodiny rannej prakticky konštantné a to na úrovni okolo 5,1 Bq.m^{-3} a minimálne hodnoty na úrovni okolo 3,37 Bq.m^{-3} sa dosahovali okolo 15. hodiny. Hlavný rozdiel medzi priemernými dennými priebehmi C_{Rn} a koncentráciami jeho produktov premeny respektíve A_{ekv} je v tom, že pokiaľ koncentrácie produktov premeny radónu respektíve A_{ekv} stúpajú s C_{Rn} z popoludňajšieho maxima, tak v ranných hodinách sa medzi ich priebehmi vyskytujú dobre pozorovateľné odlišnosti. C_{Rn} začne klesať už o 7. hodine (čas východu slnka v novembri), zatiaľ čo koncentrácie jeho produktov premeny začnú klesať až po 9. hodine (Obr. 4). To znamená, že (konštantné) koncentrácie produktov premeny radónu, ktoré sú viazané na aerosoly zotrvávajú v atmosfére dlhšie, asi o 2 hodiny v porovnaní s C_{Rn}. To môže byť spôsobené tým, že turbulentné riediace procesy v atmosfére po východe slnka intenzívnejšie odstraňujú s prízemnej vrstvy atmosféry ^{222}Rn ako aerosóly.

Korelačné koeficienty medzi dennými priebehmi koncentrácií produktov premeny radónu a C_{Rn} sú nasledovné : $A_{(218Po)}$ = 0,54 $A_{(222Rn)}$ s R^2 =0,57, $A_{(214Pb)}$ = 0,55 $A_{(222Rn)}$ s R^2 =0,39 a $A_{(214Bi)}$ = 0,54 $A_{(222Rn)}$ s R^2 =0,45.

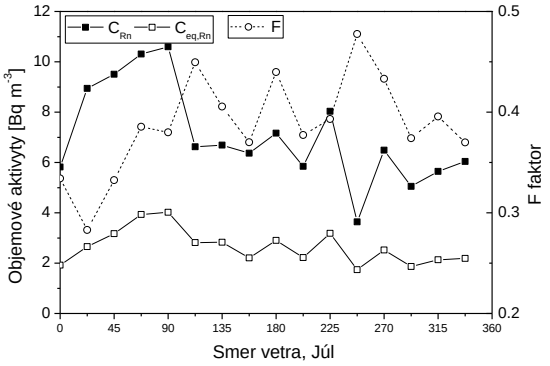
Priemerný denný priebeh rovnovážneho faktora F v novembri dosahuje maximum až neskoršie popoludní medzi 17. až 19. hodinou (F = 0,63) a minimum v skorých ranných hodinách medzi 1. a 5. hodinou (F = 0,48) Priemerná hodnota F faktora v novembri (F = 0,68) je takmer 2 krát vyššia ako v júli (F = 0,37). Priemerný denný priebeh rovnovážneho faktora F pomerne dobre antikoreluje s priemerným denným priebehom C_{Rn} (R^2 = 0,86) a koreluje s denným priebehom teploty (R^2 = 0,6).



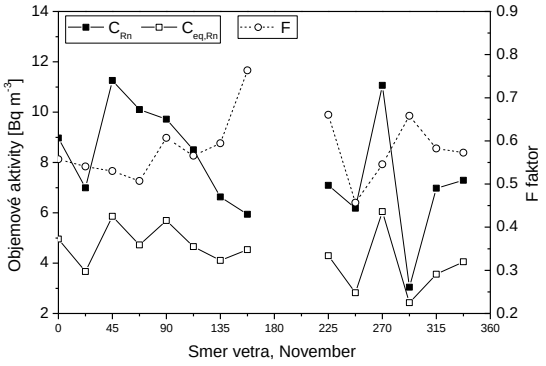
Obr. 4: Priemerný denný priebeh ^{222}Rn (C_{Rn}), ekvivalentnej objemovej aktivity ($C_{eq,Rn}$) a rovnovážneho faktora *F*.

V práci sme tiež vyhodnotili vplyv rýchlosti vetra na smerovú distribúciu objemovej aktivity ^{222}Rn, C_{Rn}, ekvivalentnú objemovú aktivitu $C_{eq,Rn}$ a rovnovážny faktor F. Všetky údaje o rýchlosti a smere vetra boli namerané na fakulte FMFI UK. Údaje o smere vetra boli rozdelené do 16 bodov, od 0° do 360° po 22,5° (0°= sever, 90°= východ, 180°= juh, 270°= západ).

Celková priemerná rýchlosť vetra júli bola 2,67 m s^{-1}. V mesiaci júl bol v Bratislave dominantný severozápadný vietor (3,34 m s^{-1}) a tiež aj východný vietor (3,22 m s^{-1}) a juhovýchodný vietor (3,01 m s^{-1}). Na obr. 5 sú zobrazené priebehy C_{Rn}, $C_{eq,Rn}$ a rovnovážneho faktora F ako funkcie smeru prúdenia vetra.



Obr. 5: Vplyv rýchlosti vetra na smerovú distribúciu objemovej activity ^{222}Rn (C_{Rn}), ekvivalentnej objemovej aktivity ($C_{eq,Rn}$) a rovnovážneho faktora F v mesiaci júl.



Obr. 6: Vplyv rýchlosti vetra na smerovú distribúciu objemovej activity ^{222}Rn (C_{Rn}), ekvivalentnej objemovej aktivity ($C_{eq,Rn}$) a rovnovážneho faktora F v mesiaci november.

Z obrázku je vidieť vplyv dominantného prúdenia vetra zo severozápadu, ktorý mal za následok nižšie hodnoty C_{Rn} a $C_{eq,Rn}$. Tento priebeh je v dobrej zhode s našimi výsledkami v ktorých bola pozorovaná antikorelácia medzi C_{Rn} a WS vzhľadom na intenzívne odstraňovanie radónu a jeho krátkožijúcich produktov premeny pri vysokých rýchlostiach vetra. Opačný efekt pozorujeme v prípade prúdenia slabého severovýchodného vetra (1,40 m s^{-1}) a juhozápadného vetra (1,25 m s^{-1}). Najnižšia hodnota rovnovážneho faktora F je v oblasti prúdenia slabého severovýchodného vetra (F= 0,33) a najvyššiu hodnotu má v oblasti slabého juhozápadného vetra (F= 0,48). Nepozorujeme koreláciu medzi WS a rovnovážnym faktorom, no do úvahy treba brať aj to že vietor zo sebou podľa smeru prúdenia prináša aj zmenu viacerých meteorologických parametrov, ako sú tlak vzduchu, vlhkosť a teplota, ktoré môžu mať vplyv na premiešavanie vzduchu v atmosfére, turbulentnú difúziu a na odstraňovanie produktov premeny radónu z atmosféry, suchou alebo vlhkou depozíciou [2,12].

V mesiaci november bol v Bratislave dominantný severozápadný až západný vietor (4,4 m s^{-1}) a juhovýchodný (3,6 m s^{-1}) až východný vietor (3,9 m s^{-1}). Celková priemerná rýchlosť vetra v tomto mesiaci bola 3,12 m s^{-1}. Znova je možné pozorovať antikoreláciu medzi C_{Rn} a WS ktorá je v zhode s našimi výsledkami. V oblasti juhovýchodného (F=0,76) a severozápadného (F=0,66) smeru prúdenia vetra vidieť najvyššie hodnoty rovnovážneho faktora F, naopak najnižšie hodnoty rovnovážneho faktora sú v oblasti veľmi slabého (0,69 m s^{-1}) západného vetra (F= 0,46) (Obr. 6).

5 Záver

Objemové aktivity radónu a jeho produktov premeny vykazujú typické denné variácie s maximom skoro ráno a minimom popoludní, ktoré sú porovnateľné s výsledkami iných autorov [13]. Potvrdil sa vplyv teploty a rýchlosti vetra na objemové aktivity radónu a jeho produktov premeny. Priemerné denné vlny produktov premeny majú podobný priebeh ako majú priemerné denné vlny C_{Rn} a $C_{eq,Rn}$. Korelácie medzi objemovými aktivitami produktov a C_{Rn} sú vyššie v júli (R^2 ~ 0,8) ako v novembri (R^2 ~ 0,47).

Rovnovážny faktor F vykazuje slabé variácie s maximom popoludní (v čase intenzívneho vertikálneho premiešavania) a minimum v neskorých nočných alebo skorých ranných hodinách [14]. Priemerná hodnota rovnovážneho faktora je v júli (F= 0,37) je približne 1,5 krát nižšia ako v novembri (F= 0,57). Priemerná hodnota rovnovážneho faktora F, vypočítaná zo všetkých hodnôt z júla a novembra je F=0.47±0.18, čo je menej ako F=0,6, čo je odporúčaná hodnota UNSCEAR pre vonkajšiu atmosféru [3].

V mesiaci júl je jasne dominantný vplyv prúdenia vetra zo severozápadu (3,34 m s^{-1}) a tiež aj východný vietor (3,22 m s^{-1}) a juhovýchodný vietor (3,01 m s^{-1}), ktoré mali za následok nižšie hodnoty C_{Rn} a $C_{eq,Rn}$. V novembri boli priemerné rýchlosti dominantných prúdení vyššie, severozápadný až západný vietor (4,4 m s^{-1}) a juhovýchodný (3,6 m s^{-1}) až východný vietor (3,9 m s^{-1}) a rovnako mali tieto rýchlosti za následok nižšie hodnoty C_{Rn} a $C_{eq,Rn}$.

Poďakovanie

Táto práca bola podporená Vedeckou grantovou agentúrov Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR a Slovenskej akadémie vied (VEGA projekt č. 1/0213/18).

Literatúra

1. Porstendorfer, J., Zock, Ch., Reineking, A. Aerosol size distribution of the radon progeny in outdoor air. Journal of Environmental Radioactivity 51, 37-48 (2000).
2. Porstendorfer, J., Butterweck, G., Reineking, A. Diurnal variation of the concentrations of radon and its short-lived daughters in the atmosphere near the ground. Atmos. Environ. 25, 709-713 (1991).
3. UNSCEAR, 2000. Sources and Effects of Ionizing Radiation. United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation to the General Assembly, Vol. I: Sources., United Nations, New York.
4. Mazúr, E., Jakál, J. (Eds.). Atlas Slovenskej Socialistickej Republiky (Atlas of the Slovak Socialist Republic), Slovak Academy of Sciences, Geodesy, Cartography and Cadastre Authority of the Slovak Republic, Bratislava, pp. 296 (1980).
5. Beláň, T., Chudý, M., Ďurana L., Grguľa, M., Holý, K., Levaiová, D., Povinec, P., Richtáriková, M., Šivo, A. Investigations of radionuclide variations in the Bratislava air. In: Povinec, P. (Ed.), Rare Nuclear Processes. World Scientific Publ., Singapore, 345-366 (1992).
6. Holý, K., Vojtyla, P., Chudý, M., Šivo, A., Böhm, R., Richtáriková, M., Polášková, A. Investigation of 14C and 222Rn variations in atmosphere and soil in Slovakia. Final report for the IAEA research contract 9093/RB. UK-JF-129/99. Bratislava, MFF UK, pp. 109 (1999).
7. Ward, D.C., Borak, T.B. Determination of time-varying 222Rn concentrations using flow-through scintillation flasks. Health Phys. 61, 799-807 (1991).
8. Stanys T., Holý K., Petruf P. Alpha spectrometric method for determination of radon and thoron daughter activity concentrations in air. Acta Physica Universitatis Comeniae XXXIX, 97-109 (1998).
9. Garzon, L., Juanco, J.M., Perez, J.M., Fernandez, J.M., Arganza, B. The universal Rn wave. An approach. Health Phys. 51, 185-195 (1986).
10. Tomlain, J., Cimbakova, M. Temperature and wind fields in conditions of Slovakia (in Slovak). Final Report No. A-12-531-804-04/03, Faculty of Mathematics and Physics, Bratislava (1988).
11. Sýkora, I., Holý, K., Ješkovský, M., Müllerová, M., Bulko, M., Povinec, P. P. Long-term variations of radionuclides in the Bratislava air. Journal of Environmental Radioactivity 166, 27-35 (2017).
12. Jacobi, W., André, K. The vertical distribution of radon-222, radon-220 and their decay products in the atmosphere. In Journal of Geophysical Research. 1963, vol. 68, p. 3799 – 3814.
13. Winkler, R., Ruckerbauer, F., Trautmannsheimer, M., Tschiersch, J., Karg, E. Diurnal and seasonal variation of the equilibrium state between short-lived radon decay products and radon gas in ground-level air. Radiation and Environmental Biophysics, 40:115–123 (2001).
14. Kojima, H. The equilibrium factor between radon and its daughters in the lower atmosphere. Environment International, Vol. 22, Suppl. 1, 187-192 (1996).

Parameter	Júl				November			
	Max.	Min.	Priemer	Štandardná odchylka	Max.	Min.	Priemer	Štandardná odchylka
C_{Rn} [Bq m^{-3}]	17.9	0.5	6.56	3.5	15.68	0.5	8.3	3.64
$C_{eq,Rn}$ [Bq m^{-3}]	7.13	0.47	2.34	1.9	9.28	0.75	4.6	1.9
Rovnovážny faktor F	0.61	0.18	0.37	0.08	0.99	0.23	0.57	0.17
C_{Po} [Bq m^{-3}]	7.7	0.25	2.12	1.13	9.31	0.92	4.62	2.5
C_{Pb} [Bq m^{-3}]	7.36	0.28	2.49	1.18	10.15	0.56	4.77	1.89
C_{Bi} [Bq m^{-3}]	6.77	0.44	2.21	1.2	8.88	1.16	4.65	1.95
Teplota T [°C]	33.5	9.75	21.21	5.6	16.65	-0.8	5.67	3.34
Rýchlosť vetra WS [m s^{-1}]	7.36	0.28	2.67	1.32	8.33	0.14	3.12	1.56
Relatívna vlhkosť H [%]	100	30	65	18.8	98	47.5	83.55	12.76

Tab. 1: Štatistickéúdaje sledovaných rádionuklidov a meteorologických parametrov.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 71–82
ISBN 978-8081470936, © 2019 Emil Puha

Secular changes of orbits in the hierarchical quadruple VW LMi

Emil Puha[1]*

Supervisor: Theodor Pribulla[2]†

[1] Department of Astronomy, Physics of the Earth, and Meteorology, FMPH, Comenius University, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

[2] Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 059 60 Tatranská Lomnica

Abstract: VW LMi was classified as an W UMa-type eclipsing binary after the discovery of photometric variability by Hipparcos mission in 1997. Long-term spectroscopy by Pribulla et al. (2006) showed that VW LMi is a quadruple system consisting of a contact eclipsing binary and a non-eclipsing binary. The short outer orbital period (355 days) indicates a presence of significant orbital perturbations in the inner sub-systems. The aim of this thesis is to improve orbital elements and physical parameters of components but also to search for secular changes. First of all, new spectra from Stará Lesná and Skalnaté pleso observatories must be deconvolved to obtain the broadening functions and the radial velocities of the components. The fitting of observed radial velocities as well as light-time effect visible in the photometric data is crucial to determine orbital parameters. These parameters will be used in further numerical simulations to investigate evolution of the system and to constrain mutual inclination of the inner orbits. Multicolour photometric observations will be used not only to measure the light-time effect but also to constrain possible secular inclination-angle changes.

1 Multiple stellar systems

As discussed in Tokovinin (1997), multiple systems are useful objects as they provide precise values of stellar masses and luminosities - properties tied together via relation $L = M^{\alpha}$, which help us understand the processes of the stellar evolution. On the other hand, from the dynamical point of view, these systems aid our understanding of the formation of physical multiples or higher order stellar systems. Two categories of multiple systems are recognized. Chaotic systems, as their name suggests, have chaotic dynamics. These systems, also called trapezia, have strongly interacting orbits, therefore they are dynamically unstable. Chaotic systems only occur in star forming regions, therefore they consist of young stars. On the other hand, hierarchical systems have stable orbits, which could be divided into smaller nested sub-orbits. It is important to note, that the mentioned sub-orbits could be treated as Keplerian two-body problems, whilst chaotic systems must be treated via N-body problem.

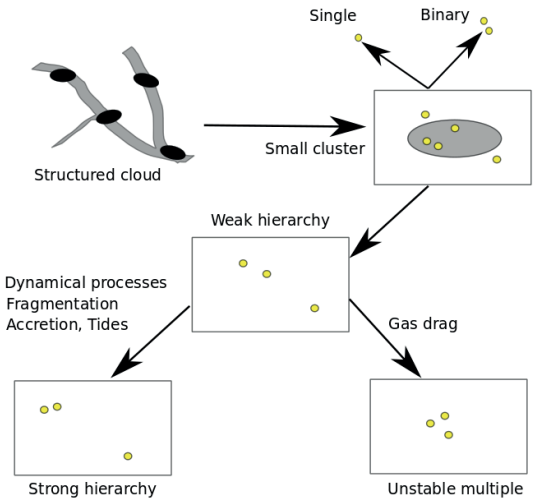


Figure 1: Scenario of multiple star formation. Credit: Tokovinin (2004)

1.1 Mechanisms of quadruple formation

Stars form after gravitational collapse in interstellar gas clouds, while the collapse generally occurs in more regions of the cloud. This means, that multiple stars form from one interstellar cloud and they create loosely bound stellar open clusters. The further fate of these clusters was discussed in Tokovinin (2004). The cartoon showing the current understanding of multiple stars formation is shown in Figure 1.

First of all, stars evolve in a collapsing cloud, which is often part of a larger interstellar gas cloud. The protostars accrete cloud material and fall towards the center of the cloud as the timescale of both processes is roughly $10^4 - 10^5 yrs$. At the first close

*puha4@uniba.sk
†pribulla@ta3.sk

encounter of protostars, interstellar surrounding gas is still present and it significantly affects the further dynamical evolution of the cluster. Single or binary stars may be ejected from this system and some unstable hierarchical multiples may form. Stronger hierarchies may form through dynamics and tidal dissipation. Or the initial weak hierarchies may became unstable as the remaining gas of the cloud interacts with their outer components. Studies of statistical properties of multiple stars lead to comprehension of quadruple stellar systems formation mechanism as published in Tokovinin (2008). It was shown, that dynamical dissipation of stellar clusters leaves behind mostly single stars and just a minority of binary and multiple systems Goodwin and Kroupa (2005). However, other mechanisms for quadruple formation were suggested. The most promising of these mechanisms are rotationally driven fragmentation and migration due to gas accretion. The first promising scenario for quadruple system formation is the rotationally driven fragmentation. In this scenario two binaries are formed in the collapsing interstellar gas with initial separation roughly $10^2 - 10^4$ a.u. They interact with the remnants of the surrounding gas, create spiral waves and transfer their angular momentum outwards, becoming tighter and tighter. This process naturally produces quadruple stars consisting of two binaries. The second scenario is migration of the orbits as a result of accretion of gas to binary, with consequent increase of the mass ratio, and associated braking by the massive circum-binary disc. This scenario might consist of two separate mechanisms: accretion induced migration, which acts on larger scales and a second migration, not associated with accretion, which shortens inner orbital periods. All in all, the outer orbit shrinks by accretion from the envelope, while the gas accreted in the inner binaries inherits it's angular momentum and shrinks the inner orbits.

2 Secular orbital changes

Secular orbital changes, or secular perturbations, are defined as long-term phase average evolutions on timescales much longer than the orbital periods of system's sub-systems Naoz (2016). As secular timescales are longer than the orbital periods, motions of the individual components could be averaged over their orbits. Therefore, only secular changes of the orbital elements should be studied Antognini (2015). Obviously, contemplating secular perturbations has sense for stellar systems with at least three components - triples. In case of a triple stellar system, the system is decomposed to a binary system and its stellar companion bound by gravitational force. As theories and observations confirm, the companion orbiting around the binary system causes secular perturbations in the orbit of the binary.

2.1 The Kozai-Lidov effect

The Kozai-Lidov effect (KLE) emerged from the perturbed three-body problem described by the Hamiltonian:

$$\begin{aligned}\mathscr{H} = &\frac{k^2 m_1 m_2}{2a_{in}} + \frac{k^2 m_3 (m_1+m_2)}{2a_{out}} \\ &+ \frac{k^2}{r_2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_{in}}{r_{out}} \right)^n M_n P_n(\cos\Phi)\end{aligned} \tag{1}$$

Here k^2 is the gravitational constant, P_n are Legendre polynomials, Φ is the angle between r_{in} and r_{out}. M_n is the mass parameter:

$$M_n = m_1 m_2 m_3 \frac{m_1^{n-1} - (-m_2)^{n-1}}{(m_1+m_2)^n}. \tag{2}$$

Consider a three-body system consisting of a binary system and a third companion on a circular orbit. Due to gravitational perturbations from the third companion, secular orbital changes would occur in the inner binary system. In the described systems exchange of the angular momentum from the inner to the outer orbit occurs. The conservation of the z-component of the angular momentum results in oscillations between inner orbit's eccentricity and inclination. The inner orbit becomes more eccentric for lower inclination and vice versa. Also, due to transport of the angular momentum of the inner binary system to the distant perturber (consequence of KLE) the orbit of the inner binary system could shrink until tidal circularisation and non-gravitational effects such as magnetic braking would occur. These effects are directly responsible for the formation of tight or even contact binaries.

The rate of secular changes of eccentricities and inclinations for this case is rather small. If the outer orbit in a hierarchical three-body system has non-zero eccentricity the Hamiltonian in 1 requires the next-level , so called octupole approximation. Non-zero eccentricity leads to changes of the orbital parameters

of the outer orbit (that are much slower than the KL oscillation timescales in the inner orbit). In this approximation the inner orbit could flip it's orientation from prograde to retrograde. As a consequence, the inner orbit's eccentricity could reach very high and not well defined values, as the whole system becomes more chaotic. The mechanism, called the eccentric Kozai-Lidov effect (EKLE) is applicable for far more stellar systems as the KLE. It allows to study eccentric orbits such us exoplanetary orbits, black hole dynamics and higher multiplicity stellar systems.

3 Presenting VW LMi

VW LMi is a spectral type F3-5V hierarchical quadruple with 8.0 maximal visual magnitude Pribulla et al. (2006). It's photometric variability with period 0.477547 days was found by Hipparcos mission in 1997. It was classified as a W UMa - type eclipsing binary. This type of system consists of a contact binary with a common envelope and a characteristic strong tidal distortion is present Ruciński (1973). Later analysis of light curves and determination of system's parameters Dumitrescu (2003) proved that the system is a contact binary. Long-term spectroscopy (1998-2005) by Pribulla et al. (2008) showed the presence of a second non-eclipsing binary system. Thereafter VW LMi was classified as a spectroscopic hierarchical quadruple. However, it was shown, that a nearby star HD95606 forms a loose binary with the quadruple system. It's separation and gravitational effect is such minimal, that from the view of the dynamics of the quadruple system it could be neglected. The periods of the three orbits were determined: contact eclipsing binary with period P_{12} = 0.4775 days, non-eclipsing binary with period P_{34} = 7.93 days, both systems on a tight, 355 days long period mutual orbit. The masses of all four components as well as the light-time effect (LITE) due to mutual revolution were also determined. With its shortest mutual period, VW LMi is the tightest quadruple system ever discoveredTokovinin (2008). The short mutual period is a key parameter of this thesis. The ratio of the outer (mutual) orbital period and inner orbital periods is an important parameter - the value of this fraction is tied to the probability of secular orbital changes in multiple stellar systems. In the discussed system the ratio of outer period P_{1234} and inner non-eclipsing period P_{34} is equal to 44.5. Since systems with outer/inner period ratio higher than five are dynamically stable and have high probability of secular orbital changes as a consequence of mutual gravitational interactions Kiseleva et al. (1998), we expect that secular orbital changes on timescales as short as decades are present in this hierarchical system. Photometric and spectroscopic observations will be used to determine the systems orbital parameters.

3.1 Presence of secular orbital changes

On human timescales, only the secular changes in the orbit of the non-eclipsing binary could be detected. However, long-term observations of VW LMi are available. Pribulla et al. (2008) compared the observations of the quadruple system for a decade from 1998-2008. The important consequences of the results are: the eccentricity remains quite stable, the semi-amplitudes remain stable within error, thus mutual orbit and non-eclipsing orbit are probably very close to coplanar and there is a definite apsidal motion. Further observations, which will expose the precise rate of the apsidal motion of the non-eclipsing binary system are provided in this article. For better view on the secular orbital changes of the quadruple system and to determine the changes in the orbit of the eclipsing binary, which could not been determined from observations yet, we will perform numerical integrations of the quadruple system to reveal the nature and timescales of secular changes in the quadruple system VW LMi.

4 New observations of VW LMi

4.1 Spectroscopic observations

The purpose of acquiring new orbital parameters is to compare them with the decade-old orbital parameters determined by Pribulla et al. (2008). This comparison should expose definite changes in system's orbits. New observations were obtained in season 2017-2018. Leo Minor is in observable altitudes in a period from November up to May. In this period during years 2017 and 2018 several new spectroscopic and photometric observations of VW LMi were obtained at Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences in Tatranská Lomnica and at Thüringer Landessternwarte Tautenburg. Medium and high-dispersion spectroscopy of VW LMi was obtained with three spectrographs. At Stará Lesná observatory the observations were performed at the

G1 pavilion with a 60cm, f/12.5 Zeiss Cassegrain telescope equipped with a fiber-fed échelle spectrograph eShel Pribulla et al. (2015); Thizy and Cochard (2011). The spectrograph has a 4150-7600 Å(24 échelle orders) spectral range and a maximum resolving power of about R = 11,000. The ThAr calibration unit provides about 100 m.s^{-1} radial-velocity accuracy. An Atik 460EX CCD camera, which has 2749×2199 array chip, 4.54 μm square pixels, read-out noise of 5.1 e$^-$ and gain 0.26e$^-$/ADU, was used as the detector. The observations were also performed with a 1.3m, f/8.36, Nasmyth-Cassegrain telescope equipped with a fiber-fed échelle spectrograph at Skalnaté Pleso. Its layout follows the MUSICOS design Baudrand and Bohm (1992). The spectra were recorded by an Andor iKon 936 DHZ CCD camera, with a 2048×2048 array, 13.5μm square pixels, 2.7e$^-$ read-out noise and gain close to unity. The spectral range of the instrument is 4250-7375 Å(56 échelle orders) with the maximum resolution of R = 38,000. Additional spectra were obtained at Thüringer Landessternwarte Tautenburg with the Alfred Jensch 2m telescope and coudé échelle spectrograph. These spectra cover 4510-7610 Åin 51 orders. A 2.2″ slit was used for all observations giving R = 31,500.

4.2 Photometric observations

Multicolour photometric observations were needed not only to measure the light-time effect but also to constrain possible secular inclination-angle changes. CCD *BVI* photometric data of VW LMi were also obtained. The primary goal of the photometry was to better define the timing variability in the outer orbit. The data were obtained at the Stará Lesná observatory with a 18cm f/10 auxiliary Maksutov-Cassegrain telescope attached to the Zeiss 60cm Cassegrain used to obtain the échelle spectroscopy (G1 pavillion). An SBIG ST10 MXE CCD camera and the Johnson-Cousins filters were used. The field of view (FoV) of the CCD camera is 28.5×18.9'. The filter set is also close to the Johnson-Cousins system. Ensamble aperture photometry was performed with respect to 8 stars close to VW LMi.

5 Data processing

The data processing consisted of processing the obtained spectra in IDL to extract the radial velocities of the quadruple system's individual components, global fit to radial velocities and photometric minima times to determine the orbital parameters and the numerical integration of orbits for further study of the system's secular orbital evolution. While spectra deconvolution and radial velocity extraction was done in IDL using routines of Rucinski (1999), for the global fit of data and the numerical integration of orbits own software tools were developed.

5.1 Deconvolution and radial velocity extraction

The reduced spectra of VW LMi were processed in IDL using the routines of Rucinski (1999). The routines are based on the broadening function technique. The broadening function technique is a method of spectra deconvolution worked out by Rucinski (1999). The aim of this method is to find the broadening function, which describes the dependence of line intensity distribution from the radial velocity. The method could be described through convolution:

$$P(\lambda) = S(\lambda) * B(\lambda). \tag{3}$$

The function $S(\lambda)$ is the sharp-line spectrum of a star, in other words, it is how the star's spectrum would look like if there were no physical effects that cause broadening of the spectral lines. The function $P(\lambda)$ is the observed spectrum of a star with broadened spectral lines. Now, we have observed spectrum $P(\lambda)$. If we could produce a synthetic spectrum $S(\lambda)$, which would be the ideal spectrum of the star without broadening effects, from Equation 3 we could determine the broadening function $B(\lambda)$. The broadening function is in fact the dependence of stellar flux on the radial velocity. As we are interested in broadening function caused by the motion of the star, we have to choose spectral lines which are not affected by other broadening effects. For this reason we have to choose a spectrum with narrow metal spectral lines, which are not affected by thermal or pressure broadening. Ideally lines of hydrogen from green to yellow part of the spectrum, spectral range 4900-5500 Å, without disrupting teluric lines. The function$S(\lambda)$ could be obtained by creating a synthetic spectrum or using a template spectrum of a slow-rotating star, which has similar spectral type, metallicity and $\log g$ to our studied star. Broadening functions are a consequence of stellar motion and rotation, which cause

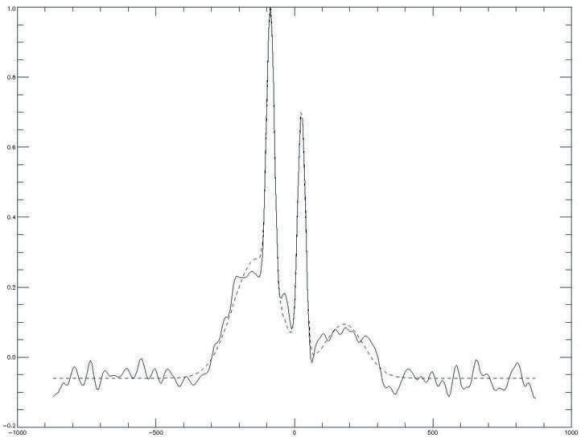


Figure 2: Broadening function (BF) of VW LMi fitted by four Gaussian curves. Two sharp peaks are the BFs of the slow-rotating detached binary, the remaining peaks are the BFs of the contact binary.

Doppler spectral line broadening. As broadening effects caused by micro and macroturbulences, as well as natural and pressure broadening are uniform on the template and observed spectra, after the deconvolution all these effects are eliminated. Thus the remaining broadened profile could be modelled via Gaussian function. However, in case of a solid-body rotation (contact binary) the broadened profile must be modelled via rotational limb-darkened profile Gray (2005). Using this procedure we could obtain the broadening functions, which are caused by the motion of the star and from these broadening functions we could easily determine the radial velocities of the observed star. Broadening function of VW LMi is shown on Figure 2.

From the broadening functions we could determine each component's radial velocity via least-square fit of Gaussian functions. In the case of the contact binary system, the components of the detached binary must be extracted and the remaining peaks should be fitted via stellar rotational profiles Gray (2005). Using this method, we determined the radial velocities of VW LMi's all four components from the new spectra.

5.2 The orbit fitter

From the set of radial velocities, orbital parameters of the quadruple system could be determined via least-square fit of the radial velocity equation to observational data. To obtain more precise values of the orbital parameters, we fitted the observed times of photometric minima together with the observed radial velocities. Now, as VW LMi is a quadruple system consisting of two binaries and the spectra of all four components are observable, the radial velocity equation for this specific system as expressed in Pribulla et al. (2008) is:

$$RV_i = V_0 + K_{12}[e_{1234}\cos\omega_{1234} + \cos(\nu_{1234} + \omega_{1234})] + (-1)^{i+1}K_i[e_{12}\cos\omega_{12} + \cos(\nu_{12} + \omega_{12})], \tag{4}$$

$$RV_i = V_0 - K_{34}[e_{1234}\cos\omega_{1234} + \cos(\nu_{1234} + \omega_{1234})] + (-1)^{i+1}K_i[e_{34}\cos\omega_{34} + \cos(\nu_{34} + \omega_{34})]. \tag{5}$$

The contact binary's elements are denoted with indexes "12", while the detached binary's elements are denoted with indexes "34". The elements of the mutual orbit of the quadruple system are denoted with indexes "1234". The true anomalies could be computed from derivatives by the truncated series up to the second degree in orbital eccentricity as follows:

$$\nu \approx M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M, \tag{6}$$

where $M = 2\pi(t-T)/P$ is the mean anomaly, with t being the observation time, P the orbital period and T the time of periastron passage. The photometric minima times could be obtained from the equation

$$T_{min} = T_{12} + P_{12}E + QE^2 + \Delta T_{12}, \tag{7}$$

here T_{12} is the time of periastron passage, P_{12} the period, Q the coefficient of the quadratic ephemeris, E the epoch and ΔT_{12} is the delay caused by the light-time effect (LITE):

$$\Delta T_{12} = \frac{K_{12}P_{1234}(1-e_{1234})^{3/2}}{2\pi c} \times \frac{\sin(\nu_{1234}+\omega_{1234})}{1+e_{1234}\cos\nu_{1234}}. \tag{8}$$

Orbital parameters were determined via simultaneous fit of all radial velocity datasets and minima times. The sum of normalized χ^2 is the merit function to be optimized:

$$S = \sum_{j=1}^{5}\frac{\sum_{i=1}^{n_j}(O_{ij}-C_{ij})^2}{n_j\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{5}\chi_j^2, \tag{9}$$

where j is index of the dataset, n_j is number of observation for the given dataset, i is index of individual observation and σ^2 is average standard deviation of individual datapoint for the j-th dataset. The *Orbit fitter* software tool was develop in Python, taking an advantage of LMFIT library Newville et al. (2016). Least-squares method of multidimesional function minimization by Olsson and Nelson (1975) provided optimization of the merit function and precise determination of the systems orbital parameters.

5.3 N-body model

The next step was the numerical integration of orbits on scales of decades to study the nature and scales of secular orbital changes. *N-body model* is an object-oriented gravitational modelling toolkit based of Cowell's method of orbit integration developed in Python. Cowell's method, often called direct integration, is the simplest and most straightforward method of orbit integration. It comes up from the N-body problem. Simply, for N gravitationaly interacting bodies, the final force affecting the i-th body is given by the sum of forces from bodies j:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{j=1, i\neq j}^{j=N} \frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|r_i - r_j|^3}, \qquad (10)$$

where m_i, $\vec{r}_i$ are the mass and position vector of the i-th body, m_j, $\vec{r}_j$ are the mass and position vector of j-th body and G is the gravitational constant. Equation 10 is indeed the formulation of Newton's law of gravitational force for the N-body problem. The principle of this method is to numerically integrate the cartesian coordinates of each celestial body. Considering N-body problem, dividing Equation 10 by m_i we gain the acceleration of i-th body to the other $N-1$ bodies. The applied numerical integrator was the fourth-order Runge-Kutta method (RK4). RK4 is in fact an extended Euler method. However, fourth-order Runge-Kutta method calculates new function values in more steps, which eventually increases the accuracy of calculation. Coming out from first order differential equations , we obtain the function values in time $t' = t + h$ from the following equation:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (11)$$

where h is the timestep and the coefficients k_1, k_2, k_3 and k_4 are defined as

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 &= f(t_i + h/2, y_i + k_2/2) \\ k_4 &= f(t_i + h/2, y_i + k_3). \end{aligned} \qquad (12)$$

Coefficients indicate the slope of the function at the beginning, at the midpoint and at the end of the time interval. As there are four coefficients, the fourth-order Runge Kutta method requires four calculations at each step of size h. The final function value determined from Equation 11 is much more precise than the function value determined from the Euler method. The error in each step of this method is proportional to $O(h^5)$. Smaller error means, that the methods remains stable even if we use larger timesteps during the integration.

Orbital parameters of VW LMi were transformed to cartesian position and velocity vectors at a given initial epoch using basic equations of celestial mechanics Danby (1992). Numerical integration of orbits was then performed for at least twenty years in order to expose secular orbital changes in the orbit of the detached binary system, which are present on timescales of decades. What is more, apart from the developed *N-body model* we also used ReboundX integrator Tamayo et al. (2016) for further numerical integrations of VW LMi.

6 Results

Using routines presented in Section 5.1 we deconvolved new spectra and obtained radial velocities of the individual components. The quality of spectra from various spectrographs differs widely - the best spectra were from Thüringer Landessternwarte Tautenburg. However, since there were only few spectra available, we neglected the further use of the Tautenburg spectra. Thus, our results come from the spectra from the eShel échelle spectrograph at Stará Lesná observatory and the MUSICOS échelle spectrograph at Skalnaté Pleso. Although these spectra provided less precise radial velocities, there were more spectra available. Thus, the fit of the radial velocity equation was more reliable.

6.1 Spectroscopic orbital parameters

Average uncertainty of a datapoint for individual datasets was estimated fitting separately times of minima and radial velocities. After the estimation of average uncertainties, the global fit of the data was performed using Nelder-Mead simplex search algorithm. To check the accuracy of our method, we firstly performed the fit of data from 2008. As the determined orbital parameters were in close match with the parameters determined by Pribulla et al. (2008), we concluded that our *Orbit fitter* provides precise results. The new data from eShel and MUSICOS spectrographs were fitted separately due to substantial differences in the dispersion of data. In Table 6.1 we present the newly determined orbital parameters compared to the orbital parameters of VW LMi from Pribulla et al. (2008). In Figures 3, 4 and 5 are shown the best fits of data for each dataset.

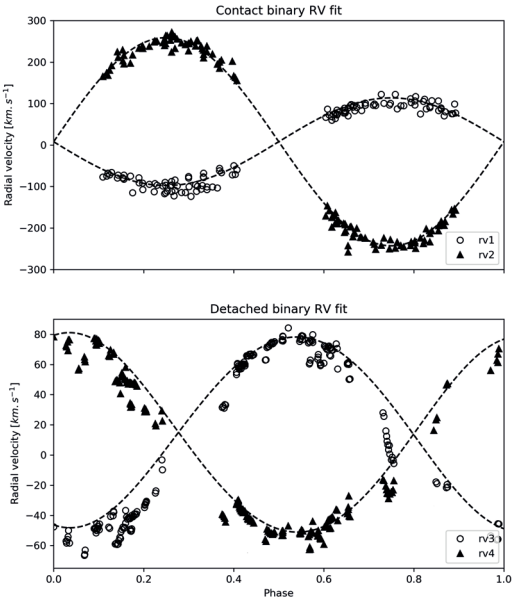


Figure 3: Radial velocities of all four components and their best fits. *Orbit fitter* results from 2008 data.

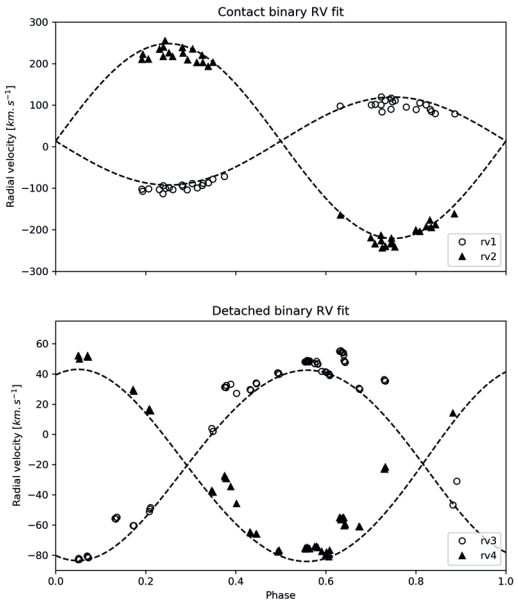


Figure 4: Radial velocities of all four components and their best fits. *Orbit fitter* results from 2018 eShel data.

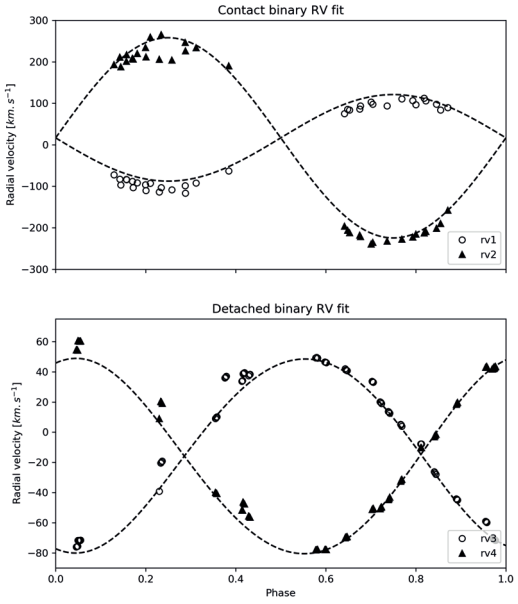


Figure 5: Radial velocities of all four components and their best fits. *Orbit fitter* results from 2018 MUSICOS data.

Parameter	2008	2008*	eShel	MUSICOS	Unit
V_0	−0.15(25)	−0.149	−2.35	−2.5	[km.s^{-1}]
Q	1.63(9) 10^{-10}	1.633 10^{-10}	−5.99 10^{-12}	1.4 10^{-11}	[days]
P_{12}	0.47755106(3)	0.47755127	0.47755454	0.47755409	[days]
T_{12}	2 452 500.1497(2)	2 452 500.15	2 452 500.14	2 452 500.14	[HJD]
K_1	105.8(1.0)	105.58	105.82	104.29	[km.s^{-1}]
K_2	250.2(1.2)	250.95	234.55	241.32	[km.s^{-1}]
K_{12}	21.61(49)	21.59	21.11	22.48	[km.s^{-1}]
P_{34}	7.93063(3)	7.93018	7.93027	7.929	[days]
T_{34}	2 452 274.54(11)	2 553 960.66	2 452 220.43	2 452 221.56	[HJD]
e_{34}	0.035(3)	0.035	0.0398	0.042	
K_3	63.99(23)	63.87	62.55	63.80	[km.s^{-1}]
K_4	63.53(27)	65.48	64.09	65.24	[km.s^{-1}]
K_{34}	23.22(33)	23.18	23.23	21.31	[km.s^{-1}]
ω_{34}	1.90(9)	1.90	2.80	2.84	[rad]
P_{1234}	355.02(17)	355.008	356.06	356.78	[days]
T_{1234}	2 453 046(6)	2 471 861.32	2 453 009.98	2 453 092.29	[HJD]
e_{1234}	0.097(11)	0.097	0.0262	0.049	
ω_{1234}	2.20(12)	2.21	2.025	3.60	[rad]
$\chi^2_v(RV1)$	1.086	1.21	1.08	1.02	
$\chi^2_v(RV2)$	1.058	1.02	1.00	1.01	
$\chi^2_v(RV3)$	0.862	1.09	1.06	1.31	
$\chi^2_v(RV4)$	0.851	0.86	1.16	0.75	
$\chi^2_v(MIN)$	1.086	1.05	0.81	0.97	

Table 1: Orbital parameters from global fit compared to the orbital parameters of VW LMi from Pribulla et al. (2008). 2008* are the parameters determined from 2008 data via *Orbit fitter*.

6.2 Light-time effect

The performed fit of photometric minima times from 2004 until 2018 is shown in Figure 6. Figure 6 is an $(O-C)$ diagram, which shows the changes in photometric minima times after the removal of quadratic ephemeris represented by Equation 7.

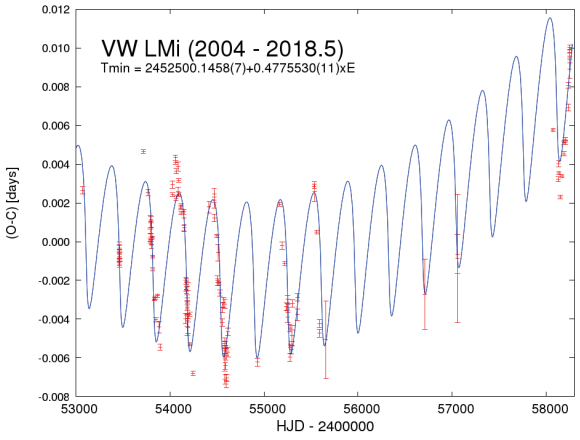


Figure 6: Best fit of minima times.

Data were fitted via Equation 8, which represents the changes in photometric minima times caused by the LITE. As we see, the times of photometric minima vary due to LITE (blue line) and due to the exchange of mass in the contact binary system (parabolic trend). Photometric observations were important to determine precise values of the orbital parameters of VW LMi. During the spectroscopic conjunction, when the RVs of the components are not measurable as presented on Figure 7, we can observe photometric minima giving the radial distance of the eclipsing binary in the outer orbit. Therefore we can obtain information about the orbital elements during spectroscopic conjunctions, too.

6.3 Numerical integration of orbits

From the determined orbital parameters shown in Table 6.1 we obtained cartesian position and velocity vectors of each component at given epoch. These positions and velocities were determined with respect to the plane of sky, which is our reference plane. To transform position and velocity vectors of components we performed rotations around angles of inclination i, argument of periapsis ω and the longitude of the ascending node Ω with respect to our reference

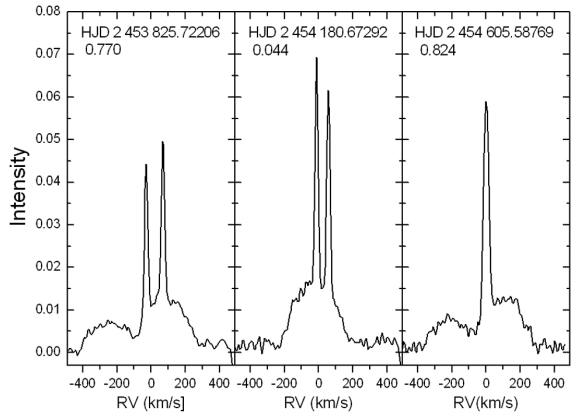


Figure 7: BFs of VW LMi. From left to right: all components visible, contact binary in conjunction (time of photometric minimum), detached binary in conjunction.

plane. The transformation of coordinates as shown in Hilditch (2001) is as follows:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos\Omega\cos(\omega+\nu) - \sin\Omega\sin(\omega+\nu)\cos i) \\ y &= r(\sin\Omega\cos(\omega+\nu) + \cos\Omega\sin(\omega+\nu)\cos i) \\ z &= r(\sin i\sin(\omega+\nu)), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{xhe}{rp}\sin\nu - \frac{h}{r}\cos\Omega\sin(\omega+\nu) \\ &\quad + \sin\Omega\cos(\omega+\nu)\cos i \\ v_y &= \frac{yhe}{rp}\sin\nu - \frac{h}{r}\sin\Omega\sin(\omega+\nu) \\ &\quad - \cos\Omega\cos(\omega+\nu)\cos i \\ v_z &= \frac{zhe}{rp}\sin\nu - \frac{h}{r}\cos(\omega+\nu)\sin i, \end{aligned} \tag{14}$$

where r is the components distance from the system's barycenter, p is the parameter of the orbital ellipse, e is the numerical eccentricity and ν is the true anomaly determined from Equation 6. Once the initial positions and velocities were defined, we set up the timestep of the integration during one orbital revolution. During the integration we focused on the orbital changes of the detached binary as modelling the contact binary system would require a different gravitational model, with built in solid-body model of the stars, which is not implemented in the current version of our *N-body model*. Thus, we took the contact binary system as one point mass and we studied the changes in the orbit of the detached binary. As $P_{34} = 7.929$ days, the timestep of the integration must be chosen to be much smaller than period P_{34}. Further, as the Kozai timescale of the secular orbital changes in the detached binary system is on scale of decades, we had to integrate the orbit for several decades to observe secular changes in the orbital elements. From spectroscopy one cannot determine the values of the longitudes of the ascending nodes. As the scale of secular orbital changes in the orbit of the detached binary directly depends on the difference of the longitudes of ascending nodes Ω_{34} and Ω_{1234}, we set $\Omega_{34} = 0$ and integrated the orbits for various values of Ω_{1234}. The result of the integrations were the positions and velocities of components, which were then transformed to Keplerian orbital elements. Various values of Ω_{1234} resulted in various Keplerian elements of the quadruple system. The true value of Ω_{1234} will be chosen after acquiring the best match of the integrational elements with the orbital elements determined from spectroscopy in Table 6.1. To envision the scale of the quadruple system VW LMi, we present the integration in Figure 9.

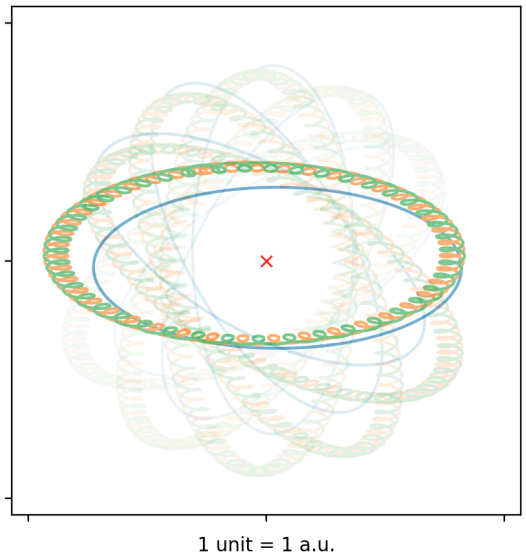


Figure 8: One period integrations for various values of Ω_{1234}. Red cross is the center of mass of the quadruple system, green and orange lines are the orbits of the detached binary and the blue line is the orbit of the contact binary.

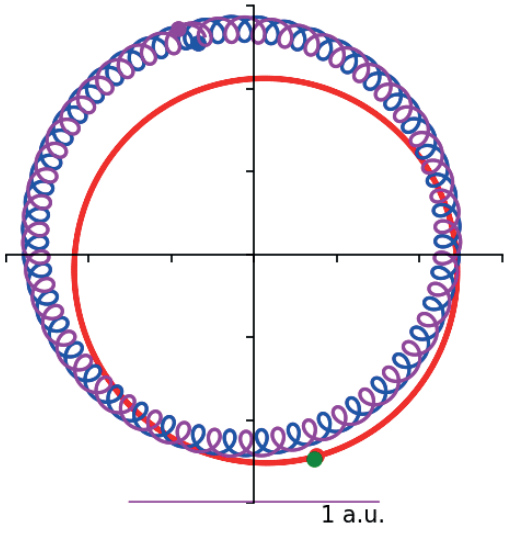


Figure 9: One period integration with $i = 0$ and $\Omega = 0$, perpendicular view to the mutual orbit of two binary systems.

Figure 9 displays how tight is the quadruple system VW LMi. The separation between the mass centres of the contact and detached system is only 1.62 a.u., the separation of components in the detached binary system is 0.1 a.u., while the separation of mass centres of the contact binary is only 0.004 a.u. (approximately twice of the Earth-Moon distance). With these separations, VW LMi is the tightest quadruple system discovered yet. The configuration shown in Figure 9 is not the true projection of VW LMi on the plane of sky. The true projection is one from the configurations shown in Figure 8. After acquiring the true value of Ω_{1234}, we will process the results of integration for the determined value of Ω_{1234} in order to obtain the time dependence of all Keplerian orbital parameters.

7 Conclusion

New observations of the quadruple VW Leonis Minoris proved the presence of secular orbital changes in this tight quadruple system. Obtained data included spectroscopic and photometric observations. To acquire spectroscopic elements of the system and to study their secular changes, new software tools had to be developed. In this final section we discuss the accuracy of our software tools and take a closer look on the obtained data.

7.1 Spectra deconvolution

New spectra were processed in IDL using broadening function routines of Rucinski (1999). The routines provided highly precise results. One-dimensional linearized spectra were firstly rectified and cleaned of cosmic spikes. Star HD128167 served as the source for the template spectrum, which was acquired with the same instrument and resolution as the spectra of VW LMi. HD128167 has similar metallicity and $\log g$ as VW LMi. The deconvolution of the object spectra was done through singular-value decomposition of the template spectrum and thus, broadening functions (BFs) of the components were obtained. BFs were smoothed by convolution with Gaussian functions of various width. Afterwards, we computed heliocentric dates of middle exposure, heliocentric radial velocity corrections and orbital phases of periodic variables. Profiles of individual components in BFs were fitted by Gaussian (in case of the detached binary) and rotational profiles (in case of the contact binary). From the optimized fitting parameters of these functions we finally obtained the radial velocities of the components. Routines of Rucinski (1999) are a reliable and precise IDL tools for obtaining radial velocities of objects from spectroscopic observations. We were able to process most of new spectra. The only exceptions were spectra, where BFs of individual components were blended, because of an occurring conjunction of the objects.

7.2 Fit of radial velocities and minima times

The next step was to fit the obtained radial velocities and the photometric minima times in order to determine orbital parameters of VW LMi. A new software tool, *Orbit fitter* was developed, specially customized to produce a global fit of radial velocities of quadruple stellar systems. We had available radial velocities from spectra from three different observatories. Unfortunately, wed had lack of the most precise data from Thüringer Landessternwarte Tautenburg. Therefore we produced the global fit of the RVs from the data from Stará Lesná and Skalnaté Pleso observatories. These data were less precise, however we had available bigger datasets of radial velocities. Using significant amount of radial velocities implied higher precision of the global fit. As the quality of

spectra from Stará Lesná and Skalnaté Pleso observatories was quite different, we fitted data from both observatories separately. Using Nelder-Mead method of function minimization, we obtained the spectroscopic orbital elements of the quadruple system VW LMi as shown in Table 6.1. In Table 6.1, the first set of orbital parameters (2008*) was determined to trial our developed software tool. As obtained parameters were satisfactory, compared with the parameters of Pribulla et al. (2008), we proceeded to fit the new datasets of radial velocities. Orbital parameters from new observations shown in columns (eShel) and (MUSICOS) proved, that striking orbital changes are present in the quadruple system VW LMi. Substantial orbital changes occur in the orbit of the detached binary system and in the mutual wide orbit of the whole system. These changes are the direct consequence of the Kozai-Lidov effect as these changes are induced by the contact binary, which acts as a disturber on the detached binary system. Definite apsidal motion is present in the detached and mutual orbits as well as changes in the both orbit's eccentricities.

7.3 Numerical model of VW LMi

To study the rate and scale of orbital changes we developed the software tool *N-body model*. This object-oriented Python tool uses direct method of orbit integration, which is based on integration of cartesian components of the position and velocity vectors. The acceleration of each included body is computed in each step from Newton's law of gravitational interaction. To provide numerical integration, we implemented the 4^{th} order Runge-Kutta integrator. *N-body model* was tested on the Solar system. 4^{th} order Runge-Kutta integrator (RK4) provided precise orbits of all planets included in the model. However, as VW LMi is an extremely tight system, RK4 failed to provide precise orbits for larger timescales. Integrations of VW LMi for some periods were stable, although we needed to integrate the orbits for decades. Thus, the longer timescale orbital integrations were performed using ReboundX tool. ReboundX is a Python and C based gravitational simulator. With it's 15^{th} order adaptive stepsize Runge-Kutta integrator *ias15* we were able to numerically integrate the orbits of VW LMi for several decades and centuries. To study the rate and scale of the orbital changes we have to implement a method which transforms cartesian vectors of positions and velocities to Keplerian orbital elements. At the time of writing of this contribution, the method was not implemented yet.

7.4 Overview

VW LMi is an exceptionally interesting stellar system. It is the tightest quadruple stellar system yet discovered and striking secular changes occur in it's orbits. Both the tightness and the secular orbital changes are the aftermaths of a captivating physical perturbation - the Kozai-Lidov effect. Both of the system's inner binaries acts as perturbers on each other, thus causing secular orbital perturbations in each others orbits. In our work we proved the existence and the scale of these secular changes. However, some additional questions arose. First of all, the existence of the contact binary could be a consequence of the Kozai-Lidov effect. Due to transport of the angular momentum of the (now) contact system to the distant perturber, it's orbit could have shrank until the two stars reached the Roche-limit and eventually became a contact binary. As stated in Section 1.1, the transport of the angular momentum is directly caused by the Kozai-Lidov effect. Secondly, even the mutual wide orbit of the quadruple system is extremely tight (1.62 a.u.). This tightness could have been caused by an extra and yet unknown companion of the quadruple system, which "stole" the inner angular momentum. This means that VW LMi is, or at some time interval was even a quintuple stellar system. However, both of these questions/theories are difficult to answer. The first question would require a large-scale backward integration of the system, while the second one requires observations of VW LMi's closest stellar neighbours. All in all, we see that the Kozai-Lidov effect has various interesting implications in multiple stellar systems and it is worthwhile to study this effect.

Acknowledgments

I would like to express my deep gratitude to RNDr. Theodor Pribulla, Csc., my research supervisor, for his patient guidance, enthusiastic encouragement and useful critiques of this research work.

References

Antognini, J. M. (2015). Timescales of kozai–lidov oscillations at quadrupole and octupole order in the

test particle limit. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452(4):3610–3619.

Baudrand, J. and Bohm, T. (1992). MUSICOS - A fiber-fed spectrograph for multi-site observations. *Astron. Astrophys.*, 259:711–719.

Danby, J. (1992). Fundamentals of celestial mechanics. *Richmond: Willman-Bell,— c1992, 2nd ed.*

Dumitrescu, A. (2003). Photometric Study of the Eclipsing Binary VW Leonis Minoris . *Romanian Astronomical Journal*, 13:119–123.

Goodwin, S. P. and Kroupa, P. (2005). Limits on the primordial stellar multiplicity. *Astronomy & Astrophysics*, 439(2):565–569.

Gray, D. F. (2005). *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*.

Hilditch, R. W. (2001). *An Introduction to Close Binary Stars*.

Kiseleva, L., Eggleton, P., and Mikkola, S. (1998). Tidal friction in triple stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 300(1):292–302.

Naoz, S. (2016). The eccentric kozai-lidov effect and its applications. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54:441–489.

Newville, M., Stensitzki, T., Allen, D. B., Rawlik, M., Ingargiola, A., and Nelson, A. (2016). Lmfit: non-linear least-square minimization and curve-fitting for python. *Astrophysics Source Code Library*.

Olsson, D. M. and Nelson, L. S. (1975). The nelder-mead simplex procedure for function minimization. *Technometrics*, 17(1):45–51.

Pribulla, T., Baluďanský, D., Dubovský, P., Kudzej, I., Parimucha, Š., Siwak, M., and Vaňko, M. (2008). VW LMi: tightest quadruple system known. Light-time effect and possible secular changes of orbits. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 390:798–806.

Pribulla, T., Garai, Z., Hambálek, L., Kollár, V., Komžík, R., Kundra, E., Nedoroščík, J., Sekeráš, M., and Vaňko, M. (2015). Affordable échelle spectroscopy with a 60 cm telescope. *Astronomische Nachrichten*, 336(7):682–689.

Pribulla, T., Rucinski, S. M., Lu, W., Mochnacki, S. W., Conidis, G., Blake, R. M., DeBond, H., Thomson, J. R., Pych, W., Ogłoza, W., and Siwak, M. (2006). Radial Velocity Studies of Close Binary Stars. XI. *Astron. J.*, 132:769–780.

Rucinski, S. (1999). Spectral broadening functions. *Turkish Journal of Physics*, 23(2):271–288.

Ruciński, S. M. (1973). The W UMa-type Systems as Contact Binaries. I. Two Methods of Geometrical Elements Determination. Degree of Contact. *Acta Astron.*, 23:79.

Tamayo, D., Rein, H., and Shi, P. (2016). Reboundx: A library for adding additional effects to n-body simulations. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting# 47*, volume 47.

Thizy, O. and Cochard, F. (2011). Spectrographs for small telescopes. In Neiner, C., Wade, G., Meynet, G., and Peters, G., editors, *Active OB Stars: Structure, Evolution, Mass Loss, and Critical Limits*, volume 272 of *IAU Symposium*, pages 282–283.

Tokovinin, A. (1997). Msc-a catalogue of physical multiple stars. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 124(1):75–84.

Tokovinin, A. (2004). Statistics of multiple stars. In *International Astronomical Union Colloquium*, volume 191, pages 7–14. Cambridge University Press.

Tokovinin, A. (2008). Comparative statistics and origin of triple and quadruple stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389(2):925–938.

Tokovinin, A. (2008). Comparative statistics and origin of triple and quadruple stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 389:925–938.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 83
ISBN 978-8081470936, © 2019 Dominik Babál

Measurement of the differential cross section of $t\bar{t}$ production in association with Z boson (Extended Abstract)

Dominik Babál[1*]

Supervisor: Pavol Bartoš[1†]

[1] Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Properties of the top quark have been explored by the Large Hadron Collider [Evans and Bryant, 2008] and previous collider experiments in great detail. With increasing center-of-mass energy and luminosity, some yet unmeasured properties of most massive quark become accessible. This analysis is focused on evaluating differential cross section of one of the very rare processes in Standard Model (SM), namely the associated production of top-quark pair and Z boson ($t\bar{t}Z$) [1]. Since cross section depends on the top-quark coupling constant to Z boson, obtained results can either verify or exclude the SM prediction.

The analysis is performed using simulated Monte Carlo samples and data with integrated luminosity of 139 fb^{-1} collected by ATLAS detector [ATLAS collaboration, 2008] in proton-proton collisions at center-of-mass energy $\sqrt{s} =$ 13 TeV.

In our analysis, the signal events are required to contain three or four charged leptons. Two charged leptons comes from Z boson decay (only $Z \to e^+e^-$ or $Z \to \mu^+\mu^-$ are taken into account), while the other lepton(s) come(s) from semileptonic decay of at least one of the top or antitop quarks.

The differential cross section measurement is performed by unfolding variables from detector level to truth level (in particular particle or parton level). The technique chosen for this procedure is called Iterative Bayesian Unfolding (IBU) [D'Agostini, 2010]. It is based on the well-known Bayes theorem:

$$P(C_i|E_j) = \frac{P(E_j|C_i)P(C_i)}{\sum_{l=1}^{n_C} P(E_j|C_l)P(C_l)} \qquad (1)$$

where $P(C_i|E_j)$ is the probability to obtain yield C_i in bin i (cause bin) of truth spectrum (our hypothesis) while measuring yield E_j in j-th bin of the detector-level distribution. The term $P(E_j|C_i)$ denotes conditional probability to measure content of detector-level bin while considering certain truth distribution. The second term in nominator ($P(C_i)$) represents the prior probability of truth-level spectrum. The denominator only serves as the normalisation factor. An estimate of truth spectrum $\hat{n}(C_i)$ can be then unfolded from detector-level $n(E_j)$ as follows:

$$\hat{n}(C_i) = \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^{n_E} n(E_j)P(C_i|E_j) \qquad (2)$$

where sum goes over bins of detector-level distribution and term in the denominator ($0 \leq \varepsilon_i \equiv \sum_{j=1}^{n_E} P(E_j|C_i) \leq 1$) accounts for the inefficiency of detecting each event in the detector. After evaluating the estimator of truth spectrum we can improve prediction of prior probability as $\hat{P}(C_i) = \frac{\hat{n}(C_i)}{\hat{N}_{true}}$, where $\hat{N}_{true} = \sum_{i=1}^{n_C} \hat{n}(C_i)$. The main idea behind IBU is therefore to proceed iteratively until χ^2 between new and previous estimator of truth spectrum is reasonably small. The number of iterations need to be controlled in order to prevent unfolding from strengthening statistical fluctuations.

References

[ATLAS collaboration, 2008] ATLAS collaboration (2008). The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider. JINST, 3:S08003.

[D'Agostini, 2010] D'Agostini, G. (2010). Improved iterative Bayesian unfolding. In Alliance Workshop on Unfolding and Data Correction Hamburg, Germany, May 27-28, 2010.

[Evans and Bryant, 2008] Evans, L. and Bryant, P. (2008). LHC Machine. JINST, 3:S08001.

*dominik.babal@cern.ch

†pavol.bartos@cern.ch

[1] Z boson can be radiated by (anti)quark in initial or final state. Radiation by intermediate fermion propagator is also possible.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 84
ISBN 978-8081470936, © 2019 Pavol Mošať

Spontaneous fission of rutherfordium isotopes - total kinetic energies (Extended Abstract)

Mgr. Pavol Mošať[1*]

Supervisor: doc. Mgr. Stanislav Antalic, PhD.[1†]

[1] Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Detailed spectroscopic studies of nuclei near the deformed shells $Z = 100$ and $N = 152$ where the presence of so called K isomers was found, serve us as a strong tool for investigations into the superheavy elements properties. In deformed, axially symmetric nuclei, the quantum number K is defined as the projection of total nuclear spin Ω, provided by unpaired nucleons, onto the symmetry axis. By breaking nucleon pairs, multi-quasiparticle (qp) configurations with relatively high-K value are possible (typically 2-qp or 4-qp configuration for even-even and 3-qp for odd isotopes). The rules for de-excitation requires the multipolarity of the decay radiation at least as large as the change in the K value. This selection rule gives rise to K isomers, the metastable, relatively long-lived states with high K. The existence of K-isomeric states was confirmed in several even-even (e.g. ^{252}No [1], ^{254}No [2], ^{256}Rf [3]) and also odd isotopes (e.g. ^{253}No [4, 5], ^{255}Lr [4], ^{257}Rf [6].

We produced ^{255}Rf in fusion-evaporation reaction ^{50}Ti + ^{207}Pb via 2n evaporation channel. Collected statistics of several hundreds nuclei allowed the investigation of K isomerism in this isotope by γ ray and conversion electron spectroscopy using the detection setup at SHIP experiment in GSI Darmstadt [7]. The crucial task for evaluation of isomeric state excitation energy is precise measurement of electrons from internal conversion and γ rays.

The low-energy (0 – 16000 keV) calibration of Si focal plane detector is done by implanted α activities with precision of few keV. When measuring fast decays (up to 500 μs) a pile-up of signals from implanted evaporation residue (ER) and consequent decay (e.g. α decay or internal conversion) appears as the signal from the decay "lays" on the tail of ER signal resulting in incorrectly measured energies. We studied this effect on the α decay of ^{216}Ac for which we collected high statistics in the reaction ^{50}Ti + ^{170}Er. Isotope ^{216}Ac has a well separated peak at 9118 keV and short half-life of (440 ± 16) μs,

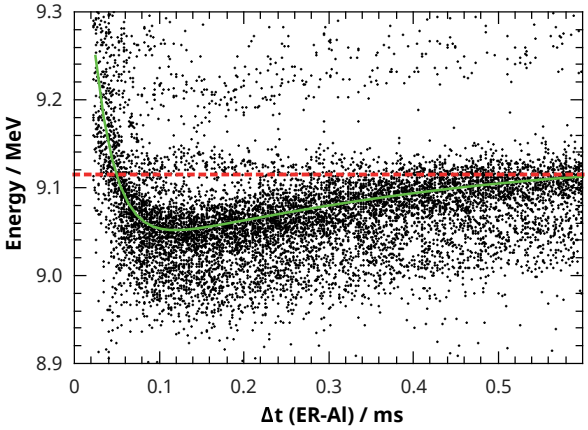


Figure 1: Time difference between an implantation of ER and following α decay of ^{216}Ac.

which made ^{216}Ac a perfect candidate for this purposes. The plot of α particle energy as a function of the time between the implantation of ER and α decay is shown in fig. 1. A clear dependence can be seen, influencing the energy of decays faster than 500 μs after the implantation of ER. Using the energy correction to this effect we were able to identify at least one new isomer in ^{255}Rf, which we interpreted as a 3-qp high-K isomer with excitation energy estimated to (800 – 1200) keV and half-life of (38 ± 4) μs. Further details of ^{255}Rf spectroscopic study as well as comparison with isomers found in neighbouring isotopes will be presented within the talk at Student Science Conference 2019.

References

[1] B. Sulignano, et al., *Eur. Phys. J. A* **33**, 327 (2007).
[2] R. D. Herzberg, et al., *Nature* **442**, 896 (2006).
[3] H. B. Jeppesen, et al., *Phys. Rev. C* **79**, 031303 (2009).
[4] S. Antalic, et al., *Eur. Phys. J. A* **47**, 62 (2011).
[5] A. Lopez-Martens, et al., *ibid.* **32**, 245 (2007).
[6] J. Rissanen, et al., *Phys. Rev. C* **88**, 044313 (2013).
[7] S. Hofmann, G. Münzenberg, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 733 (2000).

*pavol.mosat@fmph.uniba.sk
†stanislav.antalic@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 85
ISBN 978-8081470936, © 2019 Zuzana Bardačová

Neutrino Induced Cascade Reconstruction in the Neutrino Telescope Baikal GVD (Extended Abstract)

Zuzana Bardačová* Consultant: Lukáš Fajt†

Supervisor: Rastislav Dvornický‡

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Baikal GVD

Gigaton Volume Detector (GVD) is an underwater neutrino telescope installed at the bottom of Lake Baikal [1]. Using a three-dimensional array of 1440 optical modules, it can detect neutrinos of all flavors by collecting the Cherenkov light emitted by the relativistic charged secondary particles produced in their interactions. These interactions include both, the Charged Current (CC) and the Neutral Current (NC) interactions.

Cascade Events

Interacting neutrinos produce one of two topologically distinct signatures: tracks and cascades [2]. CC ν_μ interactions yield muons that can travel several kilometers through the water producing an elongated track signature in the detector. CC interactions of other neutrino flavors, and all NC interactions, yield hadronic and electromagnetic showers that typically range less than a few meters.

The aim of our research is to study shower signatures since the majority of detected events are cascades. Moreover, the most energetic events occur in the cascade channel. These showers produce a nearly spherically symmetric light signature, which allows to estimate both, the incoming neutrino energy and direction as well as the spatial and time coordinates of the interaction.

Reconstruction procedure

In our work, we developed the cascade reconstruction procedure for the Baikal GVD. Reconstruction algorithm is a multi-step fitting procedure, which is based on the Chi-Square minimization and Maximum Likelihood methods.

Hits pre-selection has to be taken into account by different algorithms (i.e. thresholds on hit charge and time) that select caussally connected hits, which significantly reduces the background component. For the position reconstruction, the Chi-Square function is used:

$$\chi^2 = \frac{1}{N_{hits}-4} \sum_{i=1}^{N_{hits}} \left[\frac{t_i - T_i(\vec{R}, t_0)}{\sigma} \right]^2 , \qquad (1)$$

where t_i is experimentally measured and calibrated time of the impulse, T_i is theoretically calculated time of detection of unscattered photon, which depends on the unknown position of cascade $\vec{R}$ and also on time when the shower started t_0 (i.e. four parameters are fitted $\vec{R} = (X, Y, Z)$ and t_0). The reconstruction precision of the described methods is tested with LED matrix calibration source (position is known), which artificially produces flashes of light, whose structure is identical with the cascades produced by neutrinos.

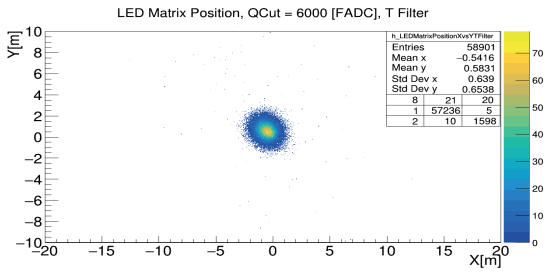


Figure 1: Difference between real and fit LED matrix X, Y coordinates

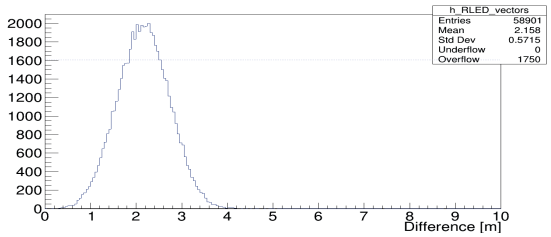


Figure 2: Distance between real and reconstructed position of the LED matrix.

References

[1] Baikal-GVD Gigaton Volume Detector in Lake Baikal, Scientific-Technical Report (2012)

[2] U. F. Katz, Ch. Spiering - High-Energy Neutrino Astrophysics: Status and Perspectives, arXiv:1111.0507 [astro-ph.HE] (2011)

*zuzanabardacova@gmail.com
†Lukas.Fajt@fmph.uniba.sk
‡Rastislav.Dvornicky@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 86
ISBN 978-8081470936, © 2019 Eliška Eckerová

Double pulse detection with Boosted Decision Trees in the Baikal-GVD (Extended Abstract)

Eliška Eckerová[1]
Consultant: Lukáš Fajt[1]*
Supervisor: Rastislav Dvornický[1]†
[1] Department of Nuclear Physics and Biophysics, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Baikal-GVD is the state of the art neutrino telescope installed in Lake Baikal. It is a 3D array of photomultipliers. Since neutrinos do not have electric charge, they can be detected only indirectly through Cherenkov radiation of the secondary particles originated in the interactions of the neutrinos with matter.

The detected pulses can be divided to two types - Single Pulses (SP), created by a single particle and Double Pulses (DP), produced by more than one particle.

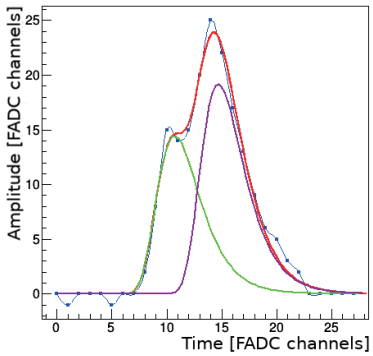


Figure 1: An example of the measured DP waveform together with the fit of the individual pulses (green and purple curve) and their sum (red curve).

Selection of the aforementioned types of pulses can provide us useful information for instance whether one muon or bunch of muons are passing through the volume instrumented by the detector. This recognition can significantly improve event reconstruction and background suppression. The new Double Pulse Detection Techniques (DPDTs) can also help us with analysis of attributes of photomultipliers installed in the detector. Moreover, DPDTs can be used to search for the high energy astrophysical tau neutrinos which can in the charged current interactions produce double pulses. It is the most challenging application of DPDTs because the high energy astrophysical tau neutrinos have not been observed yet. Detection of the high energy tau neutrinos is a very promising way how to verify the existence of astrophysical neutrinos.

The current pulse extraction algorithm can not distinguish SPs and DPs thus large portion of information is lost. Implementation of effective DPDT to the data processing framework can have significant impact on ongoing observations.

This work deals with development of the new technique for the double pulse detection based on machine learning with emphasis on the Boosted Decision Trees (BDTs) [1]. The BDT is a type of multivariate technique which according to the chain of the decisions sorts dataset to the signal and the background file. The decisions are taken according to the chosen variables which sufficiently characterize the different aspects of SPs and DPs.

For proper training and testing of the BDTs, the huge datasets are required. In this process identification of possible DPs is limited by the production of the local minimum. Even after a possible DP is tagged it is hard to decide if this pulse is real DP or it is just noise oscillation. As a consequence, the pulse fitting with Gumbel function was added to the classification procedure. The new extension helps to separate individual pulses as well as to improve SP versus DP identification. (see Fig. 1).

The properly trained BDTs classify pulses according to one number, the BDT response, which is calculated for every pulse. The preliminary signal and background datasets were created and the preliminary results show very promising classification capabilities of the BDTs (see Fig. 2).

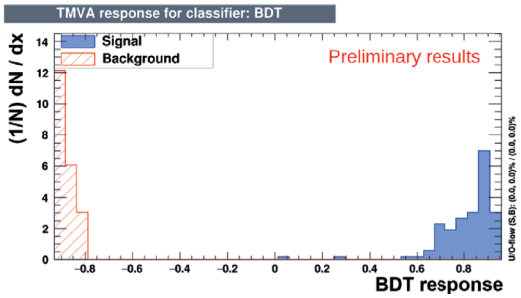


Figure 2: Preliminary BDT response function values for SP (background) and DP (signal) datasets.

References

[1] A. Hoecker et al., TMVA 4 - Toolkit for Multivariate Data Analysis with ROOT, Users Guide.ArXiv:physics/0703039 (2017).

*lukas.fajt@fmph.uniba.sk
†rastislav.dvornicky@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 87
ISBN 978-8081470936, © 2019 Zdenko Híveš

Štúdium časového rozlíšenia detektora STRAW v experimente NA62 (rozšírený abstrakt)

Zdenko Híveš[1]*

Školiteľ: Mgr. Michal Kovaľ, Ph.D.[2]†

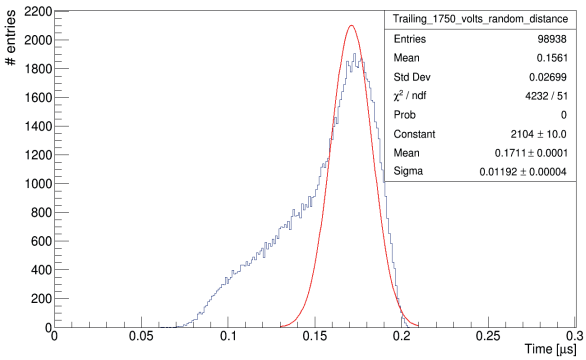
[1] Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
[2] European Organization for Nuclear Research (CERN), Espl. des Particules 1, 1217 Meyrin, Switzerland

NA62 je experiment sídliaci v CERN-e ktorého hlavným cieľom je odmerať pravdepodobnosť veľmi zriedkavého rozpadu nabitého kaónu $K^+ \to \pi^+ \nu\overline{\nu}$. Jedným z najdôležitejších detektorov experimentu je Straw spektrometer (STRAW), ktorého úlohou je čo najpresnejšie zmerať hybnosti nabitých častíc, ktoré cez neho prechádzajú.

Základnou súčiastkou detektora STRAW je slamka vyrobená z plastu (mylar) s priemerom 1 cm a dĺžkou 2.1 m. Vnútorná stena slamky je pokovovaná vrstvou medi a zlata a jej stredom je vedený volfrámový drôt. Na kovovú vrstvu a drôt je aplikované vysoké napätie, ktoré vytvára silné elektrické pole vo vnútri slamky. V slamke prúdi plyn ionizovaný prechodom nabitých častíc. Signál tvorený pohybujúcimi sa iónmi zaznamenáva špeciálna elektronika a je ho možné použiť na zrekonštruovanie miesta prechodu častice slamkou. STRAW sa skladá zo štyroch slamkových komôr, pričom každá z komôr obsahuje 1792 slamiek, ktoré sú rozmiestnené a natočené tak, aby bolo možné s veľkou presnosťou odmerať miesto prechodu častice komorou. Medzi druhou a treťou komorou je umiestnený silný magnet, ktorý zakrivuje trajektórie častíc. Z odmeraného zakrivenia sa dá zrekonštruovať pôvodná hybnosť častice.

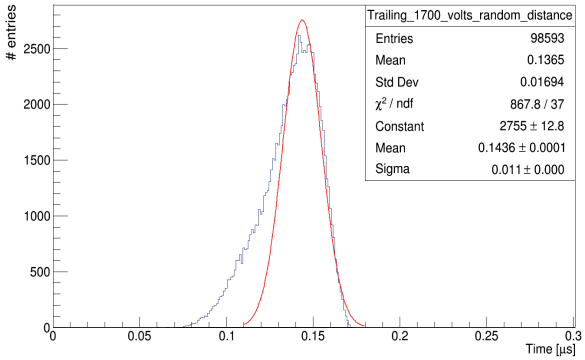
V tomto príspevku sa zaoberáme štúdiom časového rozlíšenia STRAW na úrovni jednej slamky pomocou Monte-Carlo simulácií, pričom hlavným predmetom skúmania je vplyv rozličných parametrov na časové rozlíšenie. Medzi skúmané parametre patrí intenzita elektrického poľa, zloženie plynu v slamke, koncentrácia jednotlivých zložiek plynu, celkový tlak plynu a tiež použitá čítacia elektronika. Na simulácie sú použité programy HEED, Garfield a Ngspice. Cieľom práce je nájsť optimálne hodnoty parametrov, ktoré by zlepšili časové rozlíšenie STRAW oproti aktuálnemu nastaveniu detektora: plyn: Ar (70%) CO2 (30%), tlak 1000 mbar, napätie 1750 V.

*hives4@uniba.sk
†michal.koval@cern.ch



Obr. 1: Časové rozlíšenie zbiehavej hrany signálu pre: Ar-70% CO2-30%, 1000 mbar, 1750 V, časová konštanta elektroniky: 15 ns

Na Obr. 1. a 2. sú prezentované rozdelenia časov zbiehavej hrany signálu v slamke získaných pomocou simulácií pri rozdielnych relatívnych koncentráciách argónu. Vidíme, že zvýšená koncentrácia argónu mierne zlepšuje časové rozlíšenie získané ako paramater fitu Gaussovskym rozdelením: $\sigma_1 = 11.92$ ns vs. $\sigma_2 = 11.0$ ns, ale najmä vylepšuje celkový tvar distribúcie zbehových hrán. Zvýšenie podielu argónu je preto jedným z možných spôsobov zlepšenia časového rozlíšenia STRAW detektora.



Obr. 2: Časové rozlíšenie zbiehavej hrany signálu pre: Ar-80% CO2-20%, 1000 mbar, 1700 V, časová konštanta elektroniky: 15 ns

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 88–94
ISBN 978-8081470936, © 2019 Adam Kerdík

Vplyv nízkoteplotnej plazmy na vlastnosti sójových bôbov

Adam Kerdík[1]*
Školiteľ: Juliána Tomeková[1‡]

[1] Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

Využitie plazmy v rôznych odvetviach priemyslu v posledných rokoch výrazne narastá. Osobitý význam má použitie plazmy na opracovanie biologických materiálov za účelom dekontaminácie ich povrchu a zlepšenia ich rastových vlastností. Cieľom našej práce je skúmanie vplyvu nízkoteplotnej plazmy na vlastnosti sójových bôbov. Nízkoteplotnú plazmu sme generovali pomocou Difúzneho koplanárneho povrchového bariérového výboja a Kapacitne viazaného rádiofrekvenčného výboja. Medzi skúmané vlastnosti sme zaradili imbibíciu vody, kontaktný uhol a rast rastlín pri rôznych expozičných časoch. Štúdium vplyvu plazmy na rastlinné semená sme doplnili elektrickými a optickými meraniami za účelom charakteristiky použitých zdrojov plazmy.

Kľúčové slová: DCSBD, RF výboj, imbibícia, kontaktný uhol, optická spektroskopia, elektrické charakteristiky

1 Úvod

Sója patrí medzi najdôležitejšie bezmäsité zdroje bielkovín. S rastúcou populáciou rastie aj dopyt po tejto surovine. Na zabezpečenie dostatočnej produkcie sa aplikujú mechanické a chemické úpravy za účelom zlepšenia klíčivosti. Tieto metódy však zanechávajú chemické zvyšky, sú časovo náročné alebo ekonomicky nevýhodné [Ling, L. et al., 2014]. V posledných rokoch sa intenzívne študuje vplyv nízkoteplotnej plazmy na biologické materiály. Štúdie ukazujú pozitívny vplyv nízkoteplotnej nerovnovážnej plazmy na vlastnosti rôznych druhov strukovín [Bormashenko et al., 2012, Zahoranová, A. et al., 2014]. Výsledky výskumu preukazujú pozitívny vplyv na klíčivosť semien, zmenšenie kontaktného uhla a väčšiu imbibíciu [Surovčík, J., 2016]. Taktiež bola pozorovaná redukcia kolónií mikroorganizmov na povrchu semien [Zahoranová, A. et al., 2016]. V našich experimentoch sme na generovanie plazmy použili Rádiofrekvenčný výboj a Difúzny koplanárny povrchový bariérový výboj, ktorý sa ukázal ako mimoriadne výhodným zdrojom na opracovanie povrchov rôznych materiálov [Černák, M. et al., 2004]. Za pracovný plyn sme zvolili okolitý vzduch. Výhoda nízkoteplotnej nerovnovážnej plazmy, ktorú tieto zdroje generujú, spočíva práve v rozdielnych teplotách ťažkých častíc (ióny a molekuly) a elektrónov. Celková teplota plazmy je určená nízkou teplotou ťažkých častíc, kým vysoká energia elektrónov iniciuje vznik rôznych reaktívnych častíc v plazme [Zahoranová, A. et al., 2016]. V našej práci skúmame vplyv plazmy na imbibíciu semien, kontaktný uhol a rast rastlín. Ako biologické vzorky sme zvolili sójové bôby (Glycine max L.). Taktiež sme skúmali elektrické a optické vlastnosti použitých zdrojov plazmy. Z elektrických vlastností sme sa zamerali na priebeh napätia, prúdu a určenie reálneho výkonu dodávaného do plazmy. Optickú emisnú spektroskopiu sme použili na meranie spektier žiarenia plazmy.

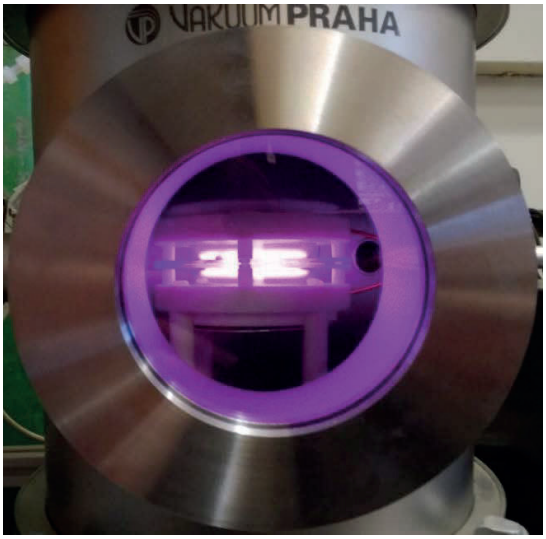
2 Experiment

2.1 Difúzny koplanárny povrchový bariérový výboj

Ako sme už spomenuli, jedným zo zdrojov použitých pri opracovaní bol Difúzny koplanárny povrchový bariérový výboj (DCSBD), vytvorený skupinou prof. Černáka, ktorý generuje plazmu pri atmosférickom tlaku [Černák, M. et al., 2004]. DCSBD tvoria pravidelne sa striedajúce elektródy chladené olejom na vysokom napätí a uzemnené elektródy umiestnené v jednej rovine. Na povrchu elektród je dielektrická vrstva, ktorú tvorí Al_2O_3. Takéto usporiadanie umožňuje generovať plazmu na prakticky neobmedzenej ploche. Plazma horí paralelne s povrchom dielektrika (Obrázok 1). Výboj má formu mikrofilamentov v tvare písmena H. Ich hustota a objemový výkon sa s rastúcim príkonom zdroja zväčšujú. Vzorky boli opracované pri príkone zdroja 400W, pri ktorom sa plazma javí ako makroskopicky homogénna. Vďaka týmto vlastnostiam nám pri opracovaní materiálov stačia kratšie expozičné časy, ktoré sme zvolili v rozsahu 30-120s. Väčšiu homogenitu opracovania zabezpečovala trepačka, vďaka ktorej vzorky pri opracovaní menili aktívnu plochu styku s plazmou.

* adam.kerdik@gmail.com
‡ juliana.tomekova@fmph.uniba.sk

Obrázok 1: Plazma generovaná DCSBD výbojom



Obrázok 2: Plazma generovaná RF výbojom

2.2 Kapacitne viazaný rádiofrekvenčný výboj

Druhým zdrojom použitým na opracovanie vzoriek v našom experimente bol kapacitne viazaný rádiofrekvenčný výboj (RF výboj) zostavený na Katedre experimentálnej fyziky na Fakulte matematiky fyziky a informatiky Univerzity Komenského za účelom aktivácie polymérov. RF výboj generuje plazmu pri nízkych tlakoch. Je to objemový výboj tvorený dvoma rovnobežnými elektródami (Obrázok 2), ktoré si vďaka striedavému napájaniu pravidelne vymieňajú charakter katódy a anódy. So zvyšujúcim sa vstupným príkonom rastie hustota generovanej plazmy. V našich experimentoch sme pracovali pri tlaku 50Pa. Vzhľadom na nízky tlak bol pri opracovaní vzoriek potrebný dlhší expozičný čas ako pri DCSBD. Pre naše experimenty sme zvolili časy opracovania vzoriek v rozsahu 1-10 min. Taktiež sme určili hodnotu prietoku vzduchu komorou. Komoru sme postupne napúšťali vzduchom a merali hodnoty tlaku v jednotlivých časoch. Prietok sme následne vypočítali podľa vzťahu:

$$q = \frac{V\Delta p}{p_a \Delta t}$$

kde q je prietok plynu, V objem komory, p_a atmosférický tlak a Δp rozdiel tlaku za čas Δt.

2.3 Imbibícia

Pod imbibíciou rozumieme absorbciu vody semenami. Referenčné a opracované vzorky sme najprv odvážili a následne zaliali 100ml deionizovanej vody. Každá vzorka pozostávala zo 40 kusov semien sóje. Počas prvých piatich hodín sme ich v pravidelných 60 minútových intervaloch z vody vybrali, osušili, odvážili a opäť zaliali. Posledné meranie bolo uskutočnené po 24 hodinách od prvého zaliatia. Pre jednotlivé časy namočenia sme následne určili hmotnostný prírastok vody na základe vzťahu:

$$\delta = \frac{m - m_0}{m_0} 100\%$$

kde δ je hmotnostný prírastok, m_0 počiatočná hmotnosť pred namočením a m aktuálna hmotnosť po namočení do deionizovanej vody.

2.4 Kontaktný uhol

Kontaktný uhol je uhol na rozhraní troch prostredí: kvapaliny, vzduchu a povrchu skúmanej vzorky. Zviera ho povrch vzorky s dotyčnicou k povrchu kvapky, vedenou z bodu styku kvapky s rozhraním. V našom experimente sme kvapku vody s objemom 2µl kvapli na povrch referenčnej vzorky a vzoriek opracovaných plazmou. Uskutočnili sme 10 meraní pri každom expozičnom čase opracovania a výsledky štatisticky vyhodnotili. Kontaktný uhol bol určený pomocou prístroja Drop Shape Analysis DSA30 (Krüss GmbH) napojený na počítač s príslušným programovým vybavením.

2.5 Rast rastlín

Pre názornú ukážku vplyvu plazmy sme referenčné a plazmou opracované vzorky zasadili do plastových kvetináčov do hĺbky približne 1 cm pod povrch zeminy. Každú vzorku sme zalievali rovnakým

množstvom vody tak, aby mali semená dostatok vlahy. Priebeh rastu sme zaznamenávali fotograficky a následne porovnali.

2.6 Optická spektroskopia

Chemické zloženie a procesy prebiehajúce v generovanej plazme sme skúmali pomocou optickej emisnej spektroskopie. Vo všeobecnosti, vlnová dĺžka žiarenia zodpovedá prechodom atómov, iónov alebo molekúl z excitovaných stavov do nižších energetických stavov [Martišovitš, V., 2006]. Žiarenie z plazmy bolo privádzané optickým vláknom do spektrometra napojeného na počítač, za účelom merania spektra žiarenia plazmy. V prípade DCSBD sme optické vlákno umiestnili do vzdialenosti ≈ 4.2cm kolmo nad povrch dielektrika. Pri RF výboji bolo optické vlákno napojené na príslušný kanál umiestnený v úrovni horiacej plazmy. Vo vnútri kanála je kremenné sklo, ktoré umožňuje prechod UV žiarenia. Spektrum v rozmedzí 200-1100 nm sme merali spektrometrom Stellar Net EP 2000. Namerané dáta boli následne vyhodnotené programom Spectrum analyzer 1.7 [Navratil, Z. et al., 2016] a na základe článkov Machala, Z. et al., 2007, Danko, M. et al., 2010, Tučeková, Z. et al., 2015.

2.7 Elektrické charakteristiky

Pri meraní elektrických charakteristík sme sledovali reálny výkon dodávaný do plazmy, priebeh napätia a prúdu. Pri DCSBD sme na svorky vysokonapäťového zdroja umiestnili vysokonapäťové sondy Tektronix P6015A a prúdovú sondu tzv. "Rogovského krúžok" na vodič medzi elektródou a zdrojom. Sondy boli zároveň pripojené na osciloskop Tektronix TDS 2024B, pomocou ktorého sme elektrické chrakteristiky zaznamenali. Príkon zdroja bol meraný pomocou digitálneho wattmetra. Nakoľko v zdroji dochádza k energetickým stratám, príkon nameraný wattmetrom nemožno považovať za reálny výkon dodávaný do plazmy. Pomocou okamžitých hodnôt napätia a prúdu znázornených na osciloskope však vieme určiť strednú hodnotu výkonu dodávaného do plazmy podľa vzťahu:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

kde T je perióda, u(t) hodnota napätia v čase t a i(t) hodnota prúdu v čase t. Pomer výkonu a príkonu zdroja udáva účinnosť zariadenia.

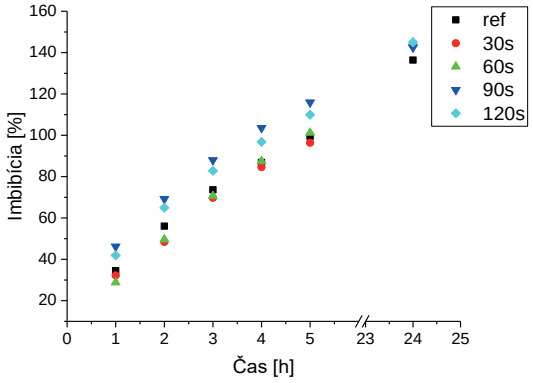
Pri RF výboji sme postupovali obdobne, no narozdiel od DCSBD boli použité napäťové sondy Agilent N2890A, nakoľko RF výboj generuje plazmu pri nízkych napätiach. Prúdovú sondu nebolo možné použiť, pretože meraný prúd bol mimo jej rozsah. Prúd I sme vypočítali zo zmeranej hodnoty kapacity C=220pF a údajov napätia U nameraných osciloskopom na základe vzťahu:

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

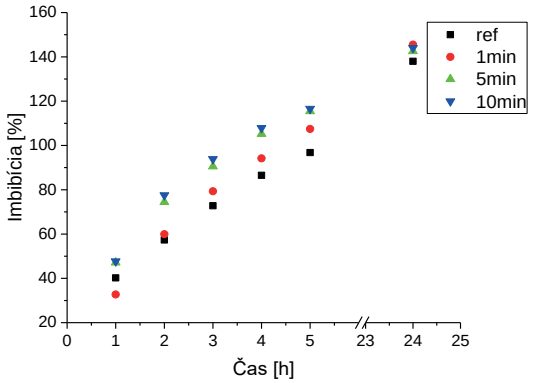
3 Výsledky

3.1 Imbibícia

Na obrázkoch 3 a 4 sú znázornené závislosti imbibície od doby ponorenia vzoriek do deionizovanej vody pre jednotlivé expozičné časy. Pri dlhších expozičných časoch sme namerali väčšiu absorbciu vody v porovnaní s referenčnými vzorkami, zatiaľ čo vzorky vystavené kratším expozičným časom (30s a 60s pri DCSBD, 1min na RF) spočiatku naberali menej vody, no postupne predbehli referenčné vzorky. Po 24h bola imbibícia všetkých opracovaných vzoriek väčsia ako referenčných. Pri 5 a 10 min časoch opracovania na RF výboji sme pozorovali výrazný rozpad vzoriek.



Obrázok 3: Graf závislosti imbibície od doby ponorenia po opracovaní DCSBD výbojom

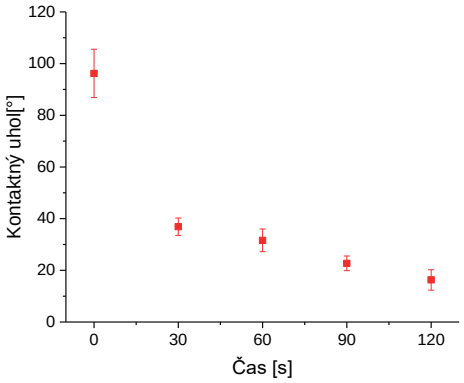


Obrázok 4: Graf závislosti imbibície od doby ponorenia po opracovaní RF výbojom

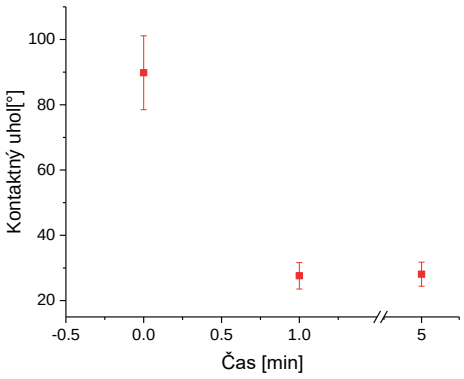
3.2 Kontaktný uhol

Závislosť kontaktného uhla od expozičného času opracovania v plazme DCSBD výboja je zobrazená

na obrázku 5 a v plazme RF výboja na obrázku 6. V oboch prípadoch sme pozorovali výrazné zmenšenie kontaktného uhla plazmou opracovaných vzoriek. Pri DCSBD sa so zvyšujúcim expozičným časom kontaktný uhol zmenšoval. Pri RF výboji sme pozorovali výrazné zmenšenie kontaktného uhla už po 1 minúte opracovania. Pri expozičnom čase 10min sa kvapky na povrchu vzorky hneď rozliali čo spôsobilo nemerateľnosť kontaktného uhla a pri expozičnom čase 5 min sa väčšina kvapiek taktiež rozliala, merateľných bolo len pár vzoriek, ktoré však mali porovnateľný kontaktný uhol so vzorkami opracovanými plazmou 1min.



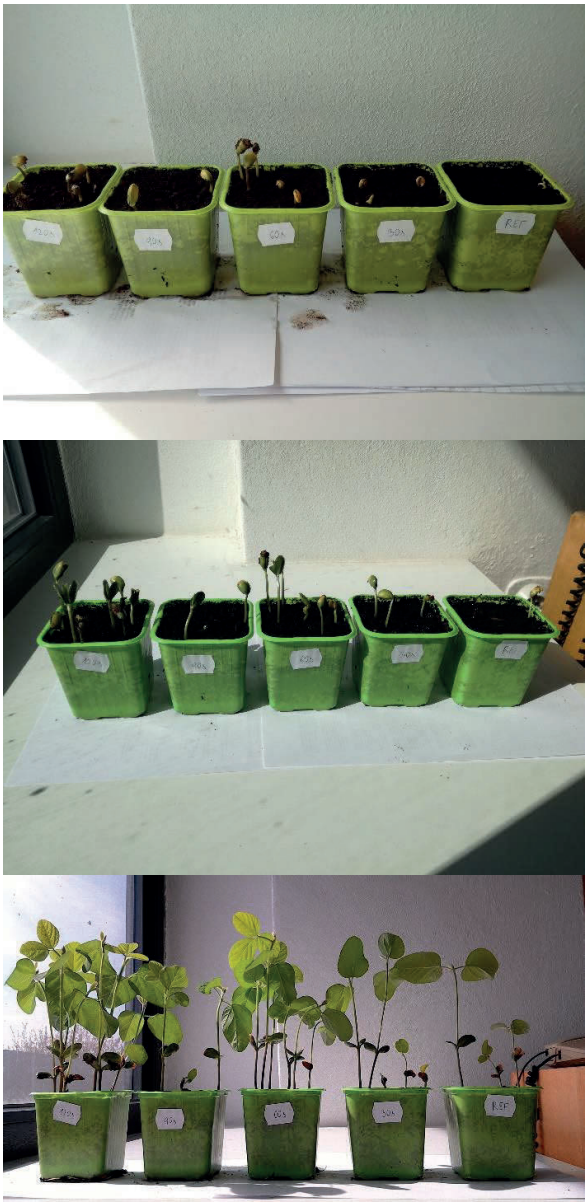
Obrázok 5: Graf závislosti kontaktného uhla od doby opracovania v DCSBD výboji



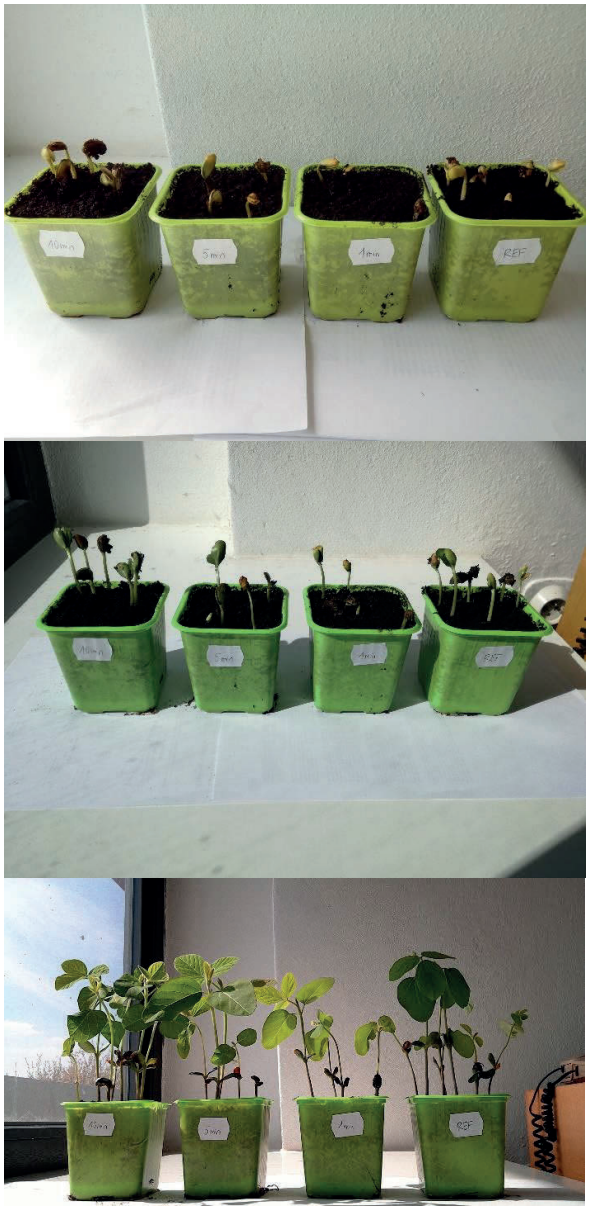
Obrázok 6: Graf závislosti kontaktného uhla od doby opracovania v RF výboji

3.3 Rast rastlín

Na zasadených semienkach sóje sme pozorovali rýchlejší rast a väčší priemer listov vzoriek opracovaných plazmou. Najrýchlejší rast sme zaznamenali pri vzorkách s expozičným časom 120s na DCSBD a 10min na RF výboji. Fotografie so zasadenými vzorkami sú zobrazené na obrázkoch 7 a 8.



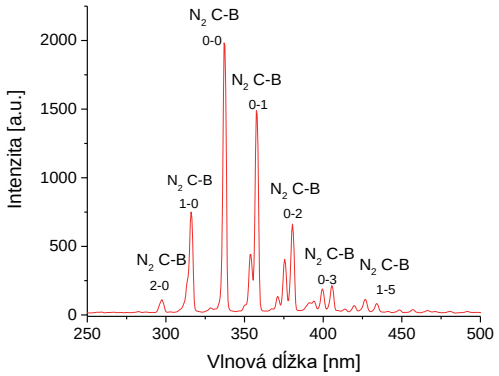
Obrázok 7: Rast sóje opracovanej na DCSBD v 4. deň, 8. deň, 13. deň od zasadenia



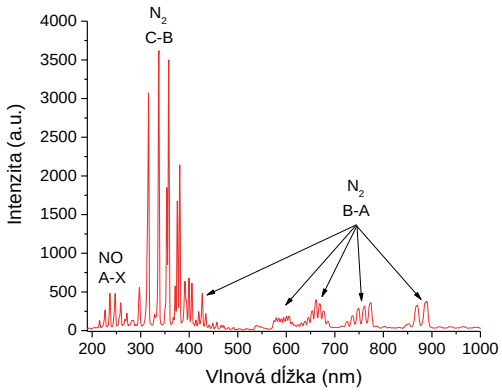
Obrázok 8: Rast sóje opracovanej na RF výboji v 4. deň, 8. deň, 13. deň od zasadenia

3.4 Optická spektroskopia

Emisné spektrum DCSBD výboja je zobrazené na obrázku 9 a RF výboja na obrázku 10. Spektrum DCSBD výboja bolo dominované spektrálnymi čiarami zodpovedajúcimi druhému pozitívnemu systému dusíka N_2 (C-B). Pri RF výboji čiary s najväčšou intenzitou zodpovedali taktiež druhému pozitívnemu systému dusíka. Nameraný bol aj prvý pozitívny systém dusíka N_2 (B-A) a NO (A-X) systém.



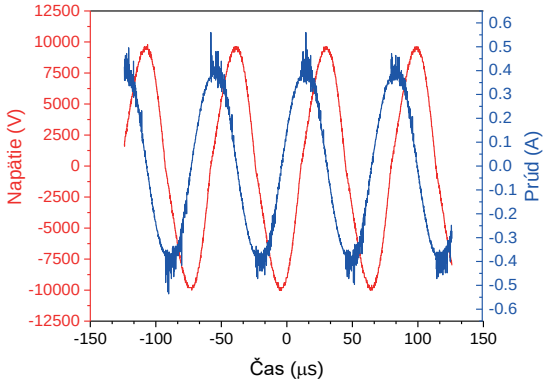
Obrázok 9: Emisné spektrum DCSBD výboja



Obrázok 10: Emisné spektrum RF výboja

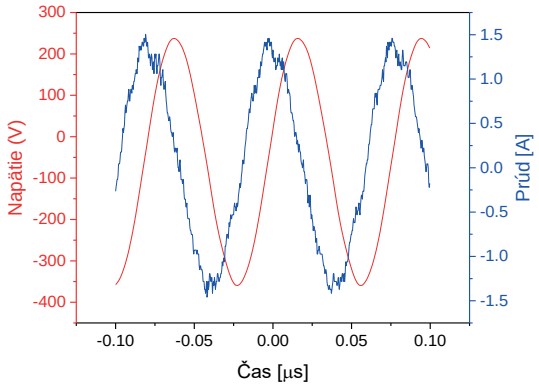
3.5 Elektrické charakteristiky

Na obrázku 11 je znázornený časový priebeh prúdu a napätia DCSBD. Na prúdovej krivke sú pozorovateľné charakteristické píky spôsobené horením mikrovýbojov. Pri príkone 402W bola stredná hodnota výkonu dodávaného do plazmy 333,5W a účinnosť zariadenia 85,5%.



Obrázok 11: Časový priebeh prúdu a napätia na DCSBD

Na obrázku 12 je vykreslený priebeh napätia a prúdu na RF výboji. Stredná hodnota výkonu dodávaného do plazmy bola 39,98W.



Obrázok 12: Časový priebeh prúdu a napätia na RF výboji

4 Diskusia

V našich experimentoch sme pozorovali priaznivý vplyv nízkoteplotnej plazmy na vlastnosti sójových bôbov. Počas prvých piatich hodín sa so zvyšujúcou dobou opracovania plazmou zväčšovala imbibícia semien. Pri DCSBD výboji absorbovali najviac vody vzorky s expozičnými časmi 90s a 120s a pri RF výboji semená s dobou opracovania 5min a 10min. Po 24 hodinách bola imbibícia referenčných a opracovaných vzoriek približne rovnaká, no všetky opracované vzorky absorbovali viac vody ako referenčné. Pri RF výboji mohla byť zvýšená imbibícia vody vzoriek s časom opracovania 5min a 10min spôsobená výrazným rozpadom vzoriek a teda väčšou absorbčnou plochou. Výrazné zníženie kontaktného uhla sme zaznamenali už pri krátkych expozičných časoch (30s pri DCSBD a 1min pri RF výboji). S rastúcim expozičným časom sa kontaktný uhol zmenšoval len minimálne. Po dlhšom opracovaní na RF výboji (5min a 10min) sme pozorovali úplné rozliatie kvapky na povrchu vzorky a teda nemerateľný kontaktný uhol. Kým kvapka na povrchu vzorky opracovanej 10min sa rozliala vždy, pri niektorých vzorkách opracovaných 5min sa nám kontaktný uhol podarilo zmerať, čo môže byť spôsobené nehomogenitou opracovania. Väčšia imbibícia vody a zväčšenie kontaktného uhla pozitívne vplýva na rast rastlín. Pri opracovaných vzorkách, ktoré sme zasadili sme so zväčšujúcim sa expozičným časom pozorovali rýchlejší rast rastlín. Výnimkou bola vzorka opracovaná na DCSBD výboji 90s. Jedna z referenčných vzoriek rástla rýchlejšie ako väčšina opracovaných vzoriek s výnimkou 120s na DCSBD a 10min na RF výboji. Avšak rast rastlín je komplikovaný proces na ktorý vplýva množstvo ďalších faktorov. Pre lepšie určenie vplyvu plazmy na rast rastlín by boli potrebné kontrolovanejšie podmienky a väčšie množstvo vzoriek, čo by umožňovalo štatistické vyhodnotenie a teda presnejší výsledok. Emisné spektrá, ktoré sme zmerali pomocou optickej emisnej spektroskopie zodpovedajú dusíkovým systémom typickým pre plazmu generovanú pri atmosférickom vzduchu [Machala, Z. et al., 2007]. Z elektrických charakteristík sme určili strednú hodnotu DCSBD výboja P=335,5W a RF výboja P=39,98W. Pri RF výboji sme taktiež určili prietok plynu komorou na 17,7 ml/min. Pozitívny vplyv plazmového opracovania na hydrofílne vlastnosti sójových bôbov sa pri použitých výbojoch výrazne nelíšil. Napriek tomu považujeme DCSBD výboj za časovo a ekonomicky výhodnejší, pretože horí pri bežných podmienkach a nevyžaduje dlhé časy opracovania. Nevýhodou RF výboja mohlo byť aj nehomogénne opracovanie, keďže narozdiel od DCSBD výboja, pri ktorom bola použitá trepačka, boli vzorky počas celej doby opracovania v plazme umiestnené rovnako.

5 Záver

V našej práci sme ukázali, že úprava sójových bôbov plazmou môže mať pozitívny vplyv na vlastnosti ako imbibícia vody, kontaktný uhol a rast rastlín. Najlepšie vlastnosti preukazovali vzorky s najväčšími expozičnými časmi: 120s na DCSBD a 10min na RF výboji. V spektre oboch použitých výbojov bol dominantný druhý pozitívny systém dusíka. Stredný výkon dodávaný do plazmy bol pri DCSBD 333,5W a pri RF výboji 39,98W.

Poďakovanie

Chcel by som sa poďakovať svojej školiteľke Mgr. Juliáne Tomekovej za zaškolenie do problematiky, pomoc pri experimentoch a analýze dát, doc. Mgr. Dušanovi Kováčikovi, PhD. za pomoc pri meraní elektrických vlastností a Mgr. Ľubomírovi Staňovi za asistenciu pri práci na RF výboji. Moja vďaka patrí aj doc. RNDr. Anne Zahoranovej, PhD., RNDr. Veronike Medveckej, PhD., RNDr. Beáte Feilhauerovej, PhD. a Mgr. Jurajovi Surovčíkovi za rady a pomoc pri práci na jednotlivých prístrojoch. Táto práca bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. APVV-16-0216.

Literatúra

[Surovčík, J., 2016] Surovčík, J., (2016). Štúdium interakcie nízkoteplotnej plazmy s biologickým materiálom - bakalárska práca, školiteľ: Medvecká V., Fakulta matematiky fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave

[Potočňáková, L., 2012] Potočňáková, L., (2012). Studium plazmového zdroje buzeného povrchovou vlnou - diplomová práca, školiteľ: Kudrle V., Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita

[Martišovitš, V., 2006] Martišovitš, V., (2006). Základy fyziky plazmy, Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1983-X, 2006.

[Ling, L. et al., 2014] Ling, L. et al., (2014). Effect of cold plasma treatment on seed germination and seedling growth of soybean. *Scientific Reports 4,* 5859. DOI: 10.1038/srep05859

[Bormashenko et al., 2015] Bormashenko et al., (2015). Interaction of cold radiofrequency plasma with seeds of beans (Phaseolus vulgaris), *Journal of Experimental Botany*, pp.4013–4021

[Bormashenko et al., 2012] Bormashenko et al., (2012). Cold Radiofrequency plasma Treatment Modifies Wettability and Germination Speed of Plant Seeds, *Scientific Reports 2*, 741

[Tomeková, J. et al., 2018] Tomeková, J. et al., (2018). Spectroscopic Study of Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge Plasma Used for Treatment of Pea Seeds, *WDS'18 Proceedings of Contributed Papers — Physics*, pp.124–129

[Černák, M. et al., 2004] Černák, M. et al., (2004). Generation of Thin Surface Plasma Layers for Atmospheric-Pressure Surface Treatments, *Contrib.Plasma Phys*., pp.492-495,

[Zahoranová, A. et al., 2014] Zahoranová, A. et al., (2014). Study of low temperature plasma treatment of plant seed, *In Hakone XIV Proccedings*, pp. 139-143,

[Zahoranová, A. et al., 2016] Zahoranová, A. et al., (2016). Effect of Cold Atmospheric Pressure Plasma on the Wheat Seedlings Vigor and on the Inactivation of Microorganisms on the Seeds Surface, *Plasma Chem Plasma Process*, pp.397–414

[Navratil, Z. et al., 2016] Navratil, Z. et al., (2016). A software for optical emission spectroscopy – problem application to plasma diagnostics. *Czechoslovak Journal of Physics*, 56, B944, DOI 10.1007/s10582-006-0308-y, 2016.

[Machala, Z. et al., 2007] Machala, Z. et al., (2007). Emission spectroscopy of atmospheric pressure plasmas for bio-medical and environmental applications, *Journal of Molecular Spectroscopy,* pp.194-201

[Tučeková, Z. et al., 2015] Tučeková, Z. et al., (2015). Parameters of Plasma Generated by Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge Used for Inactivation of Escherichia Coli, *WDS'15 Proceedings of Contributed Papers — Physics*, pp.187-191

[Danko, M. et al., 2010] Danko, M. et al., (2010). Electron impact excitation of the second positive system of N_2, *HAKONE 2010 - 12th International Symposium on High Pressure Low Temperature Plasma Chemistry*, pp.103-107

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 95–99
ISBN 978-8081470936, © 2019 Viktor Šroba

Supertvrdé TaB_x vrstvy pripravené pomocou technológie HiTUS

Viktor Šroba[1]*
Školiteľ: Marián Mikula[1‡]

[1] Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

Tenké vrstvy na báze diboridov a nitridov prechodových kovov z III až VIB skupiny sú vďaka výborným mechanickým vlastnostiam a vysokej teplotnej stabilite atraktívne ako funkčné povlaky na rezné hrany obrábacích nástrojov predlžujúce ich životnosť. Fyzikálne depozície z pár (magnetrónové naprašovanie) patria k najpoužívanejším depozičným technikám na nanášanie takýchto vrstiev. V príspevku sa zaoberáme prípravou a skúmaním štruktúry a mechanických vlastností perspektívnych tvrdých vrstiev na báze TaB_x, vytváraných odprašovaním stechiometrického TaB_2 terča pomocou urýchlených Ar^+ iónov. Veľká atómová hmotnosť tantalu spôsobuje odrazenie Ar častíc od terča do rastúcej vrstvy, čo vedie k rozprašovaniu ľahkého bóru a vytváraniu podstechiometrických, vakancie obsahujúcich TaB_x vrstiev ($x < 2$), čo môže mať negatívny dopad na ich mechanické vlastnosti. V našej práci sme použili depozičnú technológiu HiTUS (High Target Utilisation Sputtering), ktorá nám, na rozdiel od iných technológií, umožňuje nezávisle meniť kinetickú energiu Ar^+ a ovplyvňovať tak chemické zloženie TaB_x vrstiev a ich výslednú štruktúru a vlastnosti. Regulovaním urýchľovacieho napätia na terči sme menili kinetickú energiu Ar^+ iónov dopadajúcich na terč, vďaka čomu sme pripravili TaB_x vrstvy v širokom kompozičnom rozsahu ($x \sim 1{,}6 \div 3{,}2$). Výsledné vrstvy mali nanokompozitný charakter, kde bola štruktúra tvorená kolomnárnymi TaB_2 zrnami s hexagonálnou štruktúrou α-AlB_2 typu, obklopená bórovou fázou (matricou). Všetky vrstvy sú extrémne tvrdé s najvyššou hodnotou tvrdosti 48,6±1,7 GPa pre $TaB_{1,8}$ a najnižšou 42,2±1,9 GPa pre $TaB_{2,1}$. Vrstvy majú, žiaľ, typický krehký charakter vyjadrený vysokými hodnotami Youngovho modulu pružnosti, s najvyššou hodnotou 491,2±21,4 GPa pre $TaB_{3,2}$. TaB_x vrstvy svojou tvrdosťou výrazne prevyšujú priemyselne pripravované tvrdé vrstvy najmä na báze nitridov a vďaka vysokej teplotnej stabilite TaB_2 fázy predstavujú veľmi sľubný materiál pre povlaky určené na vysokoteplotné aplikácie.

Kľúčové slová: tvrdé vrstvy, tantal diborid, nanokompozit, HiTUS

1 Úvod

Bór (B) vytvára s prechodovými kovmi (TM) z IIIB až VIB skupiny periodickej tabuľky (napr. Ti, Zr, Ta, Nb, atď) tzv. diboridy (TMB_2), ktoré vynikajú výbornými mechanickými vlastnosťami a teplotnou stabilitou, čo ich robí atraktívnymi na použitie v strojárenskom obrábacom priemysle vo forme funkčných povlakov na rezné hrany obrábacích nástrojov (fréz, vrtákov, atď.), vďaka ktorým je možné zvýšiť odolnosť a teda aj životnosť takýchto nástrojov. Diboridy majú zväčša hexagonálnu α-AlB_2 alebo ω-W_2B_{5-x} štruktúru. Obe štruktúry pozostávajú zo striedajúcich sa vrstiev atómov kovu TM, ktoré sú viazané kovovými väzbami TM-TM, a vrstvami atómov B, ktoré sú medzi sebou viazané silnými kovalentnými väzbami do šesťuholníkového vzoru podobného včelím plástom. Pri štruktúre ω sú avšak bórové vrstvy striedavo hladké (ako pri α) a zvrásnené (puckered). Tenké diboridové vrstvy sú extrémne tvrdé (60 GPa pre TiB_2 [1], 42 GPa pre NbB_2 [2]) avšak počas deformácie vykazujú slabú schopnosť plasticky sa deformovať a majú krehký keramický charakter, ktorý je možné vyjadriť vysokými hodnotami Youngovho modulu pružnosti (napr. 580 GPa pre NbB_2 [2], 526 GPa pre MoB_2 [3])

Na prípravu tenkých diboridových vrstiev sa najčastejšie používajú plazmou asistované fyzikálne depozície z pár (PVD), ako napríklad magnetrónové naprašovanie, oblúkové odparovanie, atď. Pri použití týchto metód na prípravu diboridových vrstiev sa na výslednej chemickej kompozícií a štruktúre podieľajú rôzne faktory. Jedným z nich je rôzna uhlová distribúcia odprášených atómov TM a B, kvôli ich výrazne odlišným hmotnostiam. Pri odprašovaní atómov zo stechiometrického terča TMB_2 dopadajúcimi iónmi inertného plynu (napr. Ar), je v normálovom smere na terč odprášené väčšie množstvo ľahších bórových atómov ako ťažších atómov TM (napr. Ti), ktoré sú viac rozptýlené. Toto môže spôsobiť že výsledné vrstvy obsahujú prebytok bóru a sú nadstechiometrické

* viktor.sroba@gmail.com
‡ marian.mikula@fmph.uniba.sk

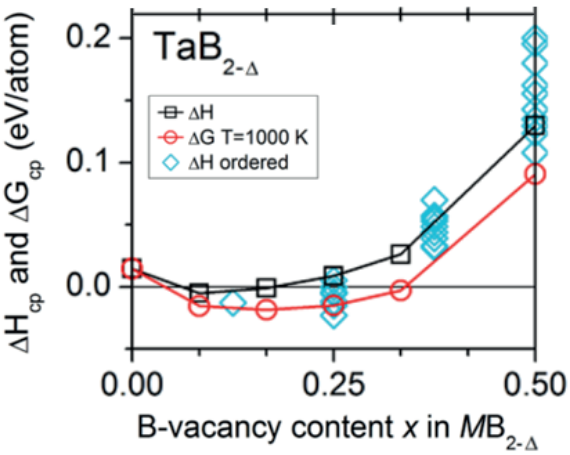
$TMB_{2+\Delta}$ [1]. Naopak podstechiometrické vrstvy $TMB_{2-\Delta}$ s deficitom bóru, vznikajú pri depozícií z diboridových terčov obsahujúcich prvky, ktoré sú výrazne ťažšie (Ta, W, Mo, atď.) v porovnaní s Ar atómami. V tomto prípade nezohráva dominantnú úlohu uhlová distribúcia, ale odraz Ar iónov od terča, ktoré sú urýchlené el. napätím, pred dopadom na terč sa neutralizujú, a od ťažkých atómov (Ta, W) sa odrazia smerom k substrátu. Ich veľká kinetická energia spôsobí, že sa správajú ako projektil a určité množstvo bórových atómov vyrazia (odprášia) z rastúcej vrstvy [4].

Pri konvenčných depozičných technológiách ako napr. magnetrónové naprašovanie je kinetická energia dopadajúcich iónov, a teda aj odrazených neutrálov, priamo previazaná s množstvom dopadajúcich iónov na terč. Ak je napätie na terči príliš nízke, v blízkosti magnetrónu bude podkritické množstvo iónov, nebude horieť tlecí výboj a depozícia nebude možná. Pri technológii HiTUS sú ióny tvorené, pomocou helikónového výboja v oddelenej časti zariadenia, vďaka čomu je možné regulovať ich kinetickú energiu (urýchľovacie napätie na terči) nezávisle od ich koncentrácie. Týmto riešením získavame veľké množstvo iónov a zároveň dochádza k efektívnemu odprašovaniu pri natoľko nízkom urýchľovacom napätí na terči, a teda tak nízkej energii dopadajúcich iónov, že bude potlačený vplyv odrazených neutrálov Ar na rast vrstvy.

V práci sme sa zamerali na výskum TaB_x vrstiev, ktorých štruktúra a mechanické vlastnosti nie sú príliš preskúmané avšak poznatky o vysokej teplotnej stabilite, chemickej odolnosti a mechanických vlastnostiach objemovej TaB_2 fázy predpokladajú excelentné vlastnosti aj v podobe tenkej vrstvy. Grančič a kol. [5] pripravili TaB_x vrstvy magnetrónovým naprašovaním. Avšak výrazný vplyv rozprašovania rastúcej vrstvy Ar neutrálmi viedol k výraznému deficitu bóru ($x = 1,2 \div 1,7$), čo sa prejavilo formovaním amorfnej štruktúry namiesto kryštalickej, Maximálna tvrdosť nameraná na $TaB_{1.7}$ bola 42 GPa. V našom prípade boli vrstvy pripravené technológiou HiTUS. Koncentrácia chemických prvkov, štruktúra a mechanické vlastnosti pripravených TaB_x boli skúmané pomocou rôznych analytických metód. Na meranie chemickej kompozície bola použitá vlnovo disperzná röntgenová spektroskopia (WDS), štruktúra vrstiev bola analyzovaná pomocou röntgenovej difrakcie (XRD) a mechanické vlastnosti ako tvrdosť a Youngov modul pružnosti boli merané pomocou nanoindentácie.

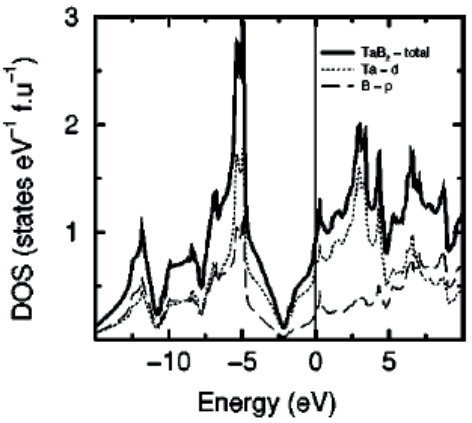
2 Ab initio predikcie

V termodynamike je stabilita materiálového systému (fázy), jej štruktúry (usporiadania atómov v mriežke) definovaná Gibbsovou voľnou energiou ΔG. Fáza je najstabilnejšia, keď je jej Gibbsova energia najnižšia. Je zaujímavé, že v prípade TaB_x s hexagonálnou štruktúrou α-AlB_2 typu sa zdá byť štruktúra najstabilnejšia ak obsahuje v mriežke bórové vakancie ($x \sim 1,8$ na obr. 1). Avšak s klesajúcim ($\Delta = 0.0$) resp. narastajúcim množstvom bórových vakancií ($\Delta = 0.5$) je štruktúra nestabilná a má tendenciu sa rozpadať ($\Delta G > 0$).



Obrázok 1: Závislosť Gibbsove voľnej energie ΔG od množstva vakancií v hexagonálnej $TaB_{2-\Delta}$ typu α-AlB_2. Upravené z [6].

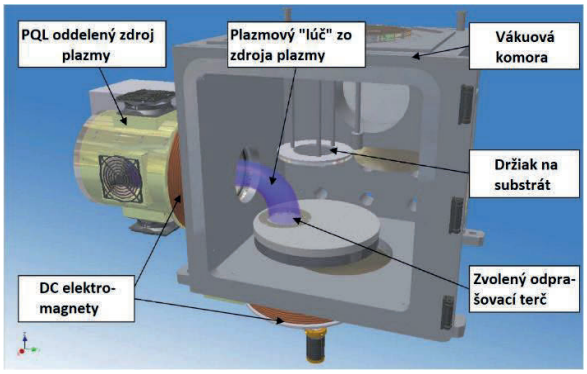
Na stabilitu hexagonálnej TaB_2 fázy sa dá pozrieť aj pomocou projektovanej hustoty elektrónových stavov (DOS) na obr. 2, ktorá zobrazuje energetické rozdelenie delokalizovaných valenčných elektrónov tvoriacich väzby medzi Ta a B. V prípade DOS pre TaB_2 je dôležitá oblasť (-2,5 eV), kde sa nachádza výrazné lokálne minimum (pseudogap), čo naznačuje prítomnosť antiväzobných stavov (-2,5 eV ÷ 0 eV), ktoré sú zodpovedné za nestabilitu štruktúry. Je to v dôsledku príliš vysokému počtu valenčných elektrónov. Pridávaním vakancií sa znižuje počet valenčných eletrónov, pseudogap sa posúva k Fermiho hladine a stabilita hexagonálnej štruktúry TaB_2 sa zvyšuje. To tiež poukazuje na skutočnosť, že TaB_x je stabilnejšie ako podstechiometrické ($x < 2$), čo koreluje s výsledkami pre Gibbsovu energiu zobrazenými na obr.1 [6], [7].



Obrázok 2: Projektovaná hustota elektrónových stavov pre TaB_2 s α-AlB_2 štruktúrou. Vertikálna čiara zobrazuje hodnotu Fermiho energie E_f. Upravené z [7].

3 Príprava TaB_x vrstiev

Vrstvy TaB_x diskutované v tomto príspevku boli prípravné pomocou plazmou asistovanej depozičnej technológií HiTUS zobrazenej na obr. 3. Do vákuovej komory vyčerpanej na tlak < 3 x 10^{-3} Pa bol kontinuálne napúšťaný a odčerpávaný argón prietokom 100 sccm. Vysoko koncentrovaná plazma ($10^{11\text{-}12}$ cm^{-3}) bola generovaná pomocou helikónového výboja, tvoreného rf anténou s výkonom 1500 W, v oddelenej časti zariadenia. Ióny Ar^+ sú pomocou dvojice Helmholtzových cievok, ktorými prechádza prúd 150 A a 75 A, usmerňované na stechiometrický keramický TaB_2 terč (s čistotou 99,5 at. % a s priemerom 100 mm), odkiaľ odprašujú atómy Ta a B, ktoré dopadajú na substráty vyhriate na 400°C uložené na držiaku oproti terču (viď. obr. 3), na ktorých rastie TaB_x vrstva.



Obrázok 3: Schéma depozičného zariadenia HiTUS.

Ako substráty boli použité elektrolyticky leštené zafírové (Al_2O_3) a kremíkové wafery. Tie boli pred depozíciou čistené pomocou ultrazvukovej čističky v acetóne, izopropylalkohole, ďalej boli opláchnuté destilovanou vodou a zvyšky vody boli sfúknuté stlačeným vzduchom.

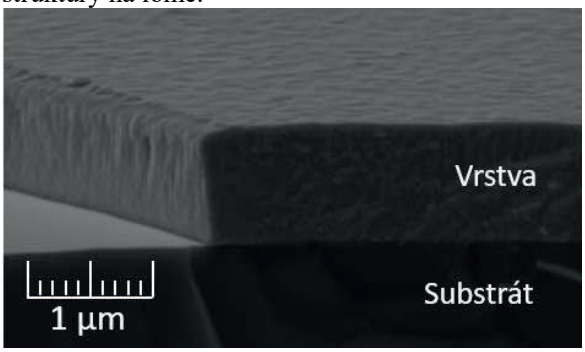
Prúd na terči je daný koncentráciou dopadajúcich iónov a je takmer konštantný ~ 1,3 A, keďže je daný nemenným výkonom rf antény (1500 W). Pomocou pulzného DC zdroja sa regulovalo urýchľovacie napätie medzi terčom a komorou (~ 230 V ÷ 680 V), ktoré bolo ekvivalentné kinetickej energii Ar častíc s akou dopadajú na terč, odprašujú ho a zároveň sa odrážajú smerom k rastúcej vrstve. Týmto spôsobom sme pripravili sériu TaB_x vrstiev vo veľmi širokom koncentračnom rozsahu x ~ 1,6 ÷ 3,2, kde x = B[at.%]/Ta[at.%].

4 Výsledky

V nasledujúcej časti príspevku sú popísané výsledky získané pomocou jednotlivých analýz použitých na skúmanie koncentrácie prvkov vo vrstvách, ich štruktúry a mechanických vlastností.

4.1 Morfológia vrstiev

Pomocou skenovacej elektrónovej mikroskopie (SEM) bola zhotovená snímka lomu vrstvy, vďaka ktorej bolo možné nahliadnuť na morfológiu vrstvy a taktiež určiť jej hrúbku. Na obr. 4 je zobrazená $TaB_{3,2}$ vrstva rastená pri urýchľovacom napätí na terči 230 V, ktorej hrúbka je približne 900 nm, čo nám spolu s depozičným časom 2 hod. udáva depozičnú rýchlosť približne 7,5 nm/min. Topografia povrchu vrstvy je veľmi jemná, zároveň je možné všimnúť si náznak hustej, kolumnárnej štruktúry na lome.

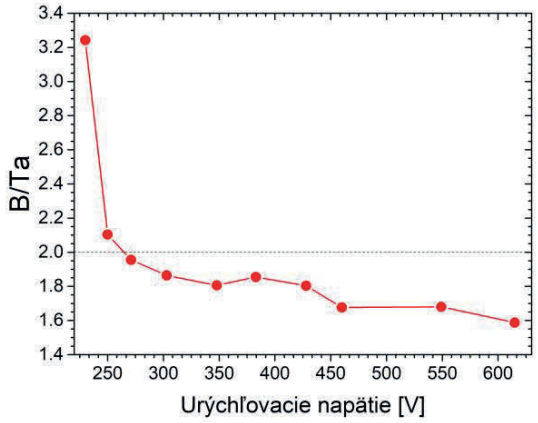


Obrázok 4: SEM snímka lomu $TaB_{3,2}$ vrstvy pripravenej pri urýchľovacom napätí na terči 230 V.

4.2 Koncentrácia chemických prvkov vo vrstvách TaB_x

Na určenie chemického zloženia, charakterizovaného vzájomným pomerom B/Ta vo vrstvách, bola použitá metóda WDS. Najskôr bol spektrometer kalibrovaný stechiometrickým terčom TaB_2. Softvér následne porovnával intenzity píkov pre jednotlivé prvky vrstvy s intenzitou nameranou na terči, z čoho bolo možné dostať spoľahlivé výsledky pre koncentrácie B a Ta a teda aj pre vzájomný pomer B/Ta. Na obr. 5 je zobrazená závislosť vzájomnej koncentrácie B/Ta od urýchľovacieho napätia. Ako

je možné vidieť na grafe, aplikovanie nízkeho urýchľovacieho napätia < 250 V vedie k eliminácii vplyvu odrazených Ar neutrálov, ktoré nemajú dostatočnú energiu na bombardovanie a odprašovanie rastúcej vrstvy. Výsledkom sú nadstechiometrické TaB_x vrstvy s x v intervale 2,1÷ 3,25. Pri vyšších urýchľovacích napätiach sa už začína prejavovať vplyv odrazených neutrálov, bór je z vrstvy odprašovaný a výsledný pomer B/Ta s rastúcim urýchľovacím napätím postupne klesá k ~ 1,6.

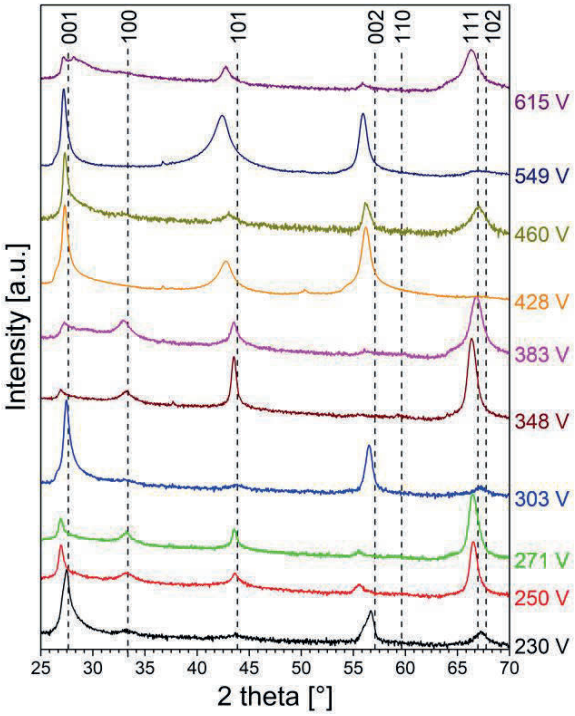


Obrázok 5: Závislosť pomeru B/Ta od urýchľovacieho napätia na terči. Horizontálna čiara zobrazuje stechiometrický pomer B/Ta = 2.

4.3 Štruktúra TaB_x

Na štruktúrnu analýzu bola použitá XRD v móde Bragg-Brentano (BB). Na obr. 6 sú zobrazené XRD záznamy jednotlivých vrstiev pripravených pri rôznom urýchľovacom napätí v intervale 2 theta 25° ÷ 70°. Už na prvý pohľad je vidieť, že TaB_x vrstvy majú kryštalický charakter, kde jednotlivé difrakčné maximá sú lokalizované v blízkosti reflexií patriacich tabuľkovým hodnotám pre TaB_2 s hexagonálnou štruktúrou α-AlB_2 typu. To je výrazný rozdiel oproti TaB_x vrstvám pripravených magnetrónovým naprašovaním, ktoré boli amorfné [5]. Väčšina vrstiev pripravených HiTUSom mala textúrny charakter, kedy bola orientácia rastu preferovaná smerom 001. Posun maxím 001 do nižších uhlov je spôsobený rozdielom v stechiometrii oproti TaB_2 fáze, zmenou mriežkového parametra a makronapätiami, ktoré sa generujú vo vrstve vplyvom rôznych defektov. XRD záznam pre $TaB_{1,6}$ vrstvu rastenú pri najvyššom napätí 615 V zobrazuje výrazné rozširovanie píku 001. To naznačuje zmenšovanie rozmerov kryštalickej fázy a smerovanie k tvorbe amorfnej štruktúry v dôsledku veľkého deficitu bóru kvôli rozprašovaniu Ar neutrálmi.

Publikované výsledky z analýzy pomocou transmisnej elektrónovej mikroskopie (TEM) pre nadstechiometrické $TiB_{2,4}$ [1] ukázali, že vrstvy majú nanokompozitný charakter, kde TiB_2 nanokolumnárne zrná sú vnorené v amorfnej matrici tvorenej prebytočným bórom. Je zaujímavé, že rovnaká nanokompozitná štruktúra bola pozorovaná aj na podstechiometrických $NbB_{1,8}$ napriek deficitu bóru [2]. Súvisí to práve s uvedenými ab initio predikciami, že aj NbB_2 vytvorí stabilnú hexagonálnu štruktúru, keď obsahuje vakancie. Rovnako formovanú štruktúru tvorenú TaB_2 nanokolumnárnymi zrnami s vakanciami a bórovou matricou očakávame aj v našom prípade. Bude však potrebná TEM analýza, na ktorej sa už pracuje.

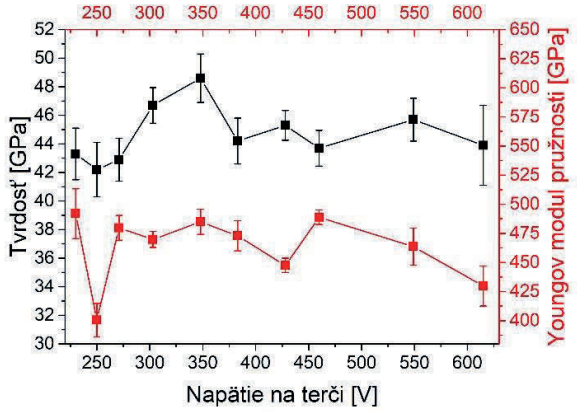


Obrázok 6: Difrakčné zaznámy pre vrstvy TaB_x v závislosti od urýchľovacieho napätia. Vertikálne čiary a príslušné Millerove indexy predstavujú polohy jednotlivých kryštalických rovín.

4.4 Tvrdosť a Youngov modul pružnosti

Tvrdosť a Youngov modul pružnosti boli merané pomocou nanoindentačnej metódy. Všetky pripravené vrstvy sú supertvrdé (tvrdosť > 40 GPa) (obr. 7). Je možné si všimnúť, že hodnoty tvrdosti TaB_x vrstiev s x > ~ 1,9 sú približne rovnaké ~ 43 GPa. S miernym poklesom množstva bóru tvrdosť výrazne narastá, kedy max. hodnota 48,6±1,7 GPa bola nameraná na vrstve $TaB_{1,8}$. Interpretáciu týchto výsledkov je možné vysvetliť na publikovaných TiB_x vrstvách [1], [8], kde je supertvrdosť podmienená okrem tvrdej TiB_2 fázy aj prítomnosťou amorfnej bórovej matrice. Matrica pôsobí vo vrstve ako „lepidlo“ a zvyšuje kohéznu pevnosť medzi TiB_2 zrnami. Sila kohéznej pevnosti je determinovaná jej objemom, resp. hrúbkou,

ktorou sú oddelené jednotlivé zrná. Existuje kritická hrúbka, kedy je kohézna pevnosť najväčšia. Po jej prekročení (zväčšení alebo zmenšení objemového podielu bórovej matrice) sa kohézna pevnosť zmenšuje a tvrdosť klesá. To je možné pozorovať aj na TaB_x vrstvách, kedy pri x < 1,8 dochádza k poklesu tvrdosti, ktorá sa už ďalej príliš nemení, ~ 44 GPa. Youngov modul pružnosti TaB_x vrstiev sa pri zmene x, a teda pri zmene objemového podielu bórovej matrice, výrazne nemenil a dosahoval vysoké hodnoty ~ 470 GPa. Pri nižších množstvách bóru (x < 1,7) je možné vidieť monotónne klesanie modulu pružnosti ku hodnote 425 GPa pre $TaB_{1,6}$. To pravdepodobne súvisí aj so zvýšeným množstvom vakancií v kryštalickej fáze. Lokálne minimá zobrazené na obr. 7 (250 V a 428 V) sú pravdepodobne spôsobené nedostatočnou adhéziou vrstvy na substrát, čo môže výrazne ovplyvniť meranie modulu pružnosti. Vysoký modul pružnosti svedčí o krehkom charaktere vrstiev pri deformácií.



Obrázok 7: Závislosť tvrdosti a Youngovho modulu TaB_x vrstiev od urýchľovacieho napätia na terči.

5 Záver

TaB_x vrstvy boli pripravené pomocou technológie HiTUS, ktorá nám umožnila regulovať vplyv odrazených neutrálov na koncentráciu chemických prvkov, štruktúru a mechanické vlastnosti. Podarilo sa nám pripraviť TaB_x vrstvy v širokom koncentračnom rozsahu x (1,6 ÷ 3,2). Z pohľadu štruktúry boli všetky vrstvy nanokompozitné, tvorené hexagonálnou TaB_2 fázou a bórovou matricou. Vrstvy boli supertvrdé s tvrdosťou vyššou ako 40 GPa, kedy najvyššia tvrdosť 48,6±1,7 GPa bola dosiahnutá na vrstve $TaB_{1,8}$ a najnižšia 42,2±1,9 GPa na vrstve $TaB_{2,1}$. Žiaľ, na vrstvách bol nameraný vysoký Youngov modul pružnosti, čo hovorí o ich krehkom keramickom charaktere. TaB_x vrstvy sú vďaka vysokej tvrdosti a ďalším výborným vlastnostiam potencionálnymi kandidátmi na funkčné povlaky rezných nástrojov.

Poďakovanie

Chcel by som sa poďakovať svojmu školiteľovi Mariánovi Mikulovi za trpezlivý prístup a ochotu pri konzultovaní problémov. Ďalej by som sa rád poďakoval Martinovi Truchlému, Tomášovi Rochovi, Leonidovi Satrapinskému a Martinovi Sahulovi za vykonanie analýz a hodnotné rady pri vyhodnocovaní ich výsledkov.

Tento výskum bol finančne podporený grantovou Agentúrou pre vedu a výskum [APVV-17-0320].

Literatúra

[1] P. H. Mayrhofer, C. Mitterer, J. G. Wen, J. E. Greene, and I. Petrov, "Self-organized nanocolumnar structure in superhard TiB2 thin films," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 86, no. 13, pp. 1–3, 2005.

[2] N. Nedfors *et al.*, "Superhard NbB2-x thin films deposited by dc magnetron sputtering," *Surf. Coatings Technol.*, vol. 257, pp. 295–300, 2014.

[3] U. Jansson, P. Malinovskis, P. O. Å. Persson, J. Palisaitis, and E. Lewin, " Synthesis and characterization of MoB 2−x thin films grown by nonreactive DC magnetron sputtering ," *J. Vac. Sci. Technol. A Vacuum, Surfaces, Film.*, vol. 34, no. 3, p. 031511, 2016.

[4] R. Bruce, S. Eicher, and W. D. Westwood, " Effect of resputtering on composition of WSi x films deposited by multilayer sputtering ," *J. Vac. Sci. Technol. A Vacuum, Surfaces, Film.*, vol. 6, no. 3, pp. 1642–1645, 2002.

[5] B. Grančič *et al.*, "Stoichiometry, structure and mechanical properties of co-sputtered Ti1-xTaxB2±Δ coatings," *Surf. Coatings Technol.*, 2019.

[6] M. Dahlqvist, U. Jansson, and J. Rosen, "Influence of boron vacancies on phase stability, bonding and structure of MB 2 (M = Ti, Zr, Hf, V, Nb, Ta, Cr, Mo, W) with AlB2 type structure," *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 27, no. 43, p. 435702, 2015.

[7] P. Vajeeston, P. Ravindran, C. Ravi, and R. Asokamani, "Electronic structure, bonding, and ground-state properties of AlB2-type transition-metal diborides," *Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.*, vol. 63, no. 4, 2001.

[8] M. Mikula *et al.*, "The influence of low-energy ion bombardment on the microstructure development and mechanical properties of TiBx coatings," *Vacuum*, vol. 85, no. 9, pp. 866–870, 2011.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 100–104
ISBN 978-8081470936, © 2019 Tomáš Fiantok

Teslova cievka so statickým iskrišťom (Spark gap tesla coil - SGTC)

Tomáš Fiantok[1*]

Školiteľ: František Kundracík[1†]
[1] Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: Teslovou cievkou (TC, v literatúre sa možno stretnúť aj s pojmom Teslov transformátor) označujeme rezonančný vysokofrekvenčný vzduchový transformátor, slúžiaci na generovanie veľmi vysokých napätí. Základ TC tvoria dva navzájom induktívne zviazané rezonančné obvody. Keďže transformátor pracuje na základe rezonančného princípu, kvôli najefektívnejšiemu prenosu energie je potrebné jednotlivé časti obvodu správne "naladiť". TC so statickým iskrišťom je klasické zapojenie, navrhnuté a používané srbsko-chorvátskym géniom Nikola Teslom. V tejto práci sú zhrnuté výsledky našej snahy zostrojiť a "naladiť" TC so statickým iskrišťom, podľa klasického návrhu Nikola Teslu. Našou ambíciou je zrozumiteľným spôsobom popísať a demonštrovať vlastnosti zostrojenej TC.

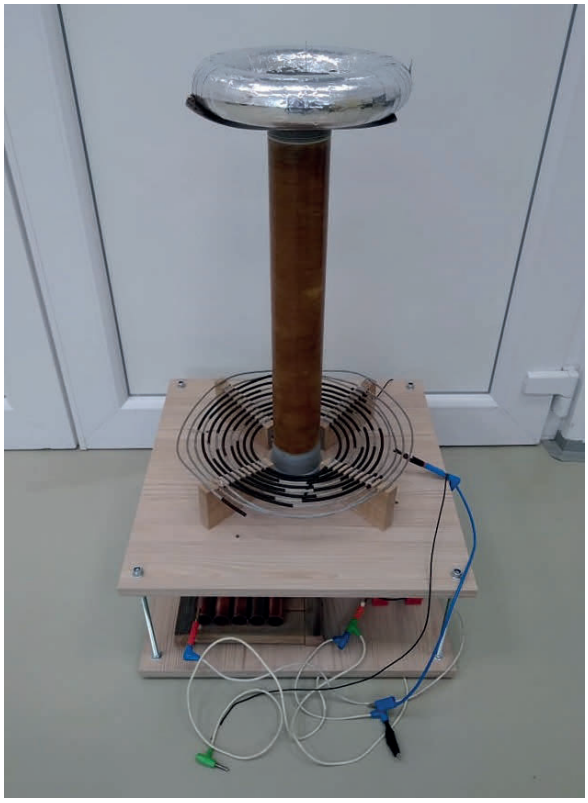
Kľúčové slová: teslova cievka, vysoké napätie, rezonancia, tranformátor

1 Úvod

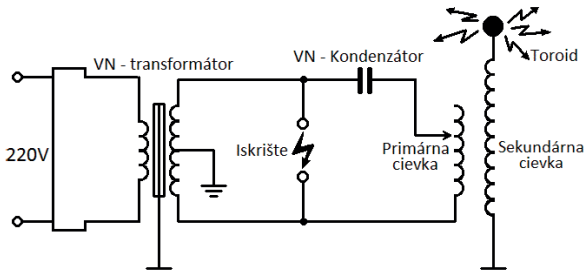
SGTC pozostáva z primárneho obvodu (ktorý obsahuje vysokonapäťový (VN) tranformátor, iskrište, kondenzátory a primárnu „laditeľnú" cievku) a sekundárnej cievky s toroidom. Jednotlivé komponenty, sú v našom prípade uložené v špeciálne navrhnutom drevenom „boxe" (obr. 1,2).

1.1 Princíp fungovania SGTC

Primárny obvod je napojený na zdroj vysokého napätia. Zdroj napätia nabíja kondenzátor. Po dosiahnutí prahového napätia na kondenzátore, preskočí iskrišťom iskra a elektrický náboj uložený v kondenzátore sa začne vybíjať cez primárnu cievku. Prúd pretekajúci primárnou cievkou vytvorí magnetické pole a to vyvolá vznik napätia na niekoľko cm vzdialenej sekundárnej cievke. Sekundárna cievka obsahuje veľký počet závitov, to znamená že výstupné napätie na sekundárnej cievke je oveľa väčšie ako vstupné napätie na primárnej cievke. V prípade ak je primárny aj sekundárny obvod navyše ešte vyladený do rezonancie, výstupné napätie môže dosiahnuť státisíce, až milión voltov [1].



Obr. 1: SGTC - teslova cievka so statickým iskrišťom



Obr. 2: Schéma zapojenia SGTC

*fiantok1@fmph.uniba.sk
†Frantisek.Kundracik@fmph.uniba.sk

2 Stavba SGTC

2.1 Sekundárna cievka

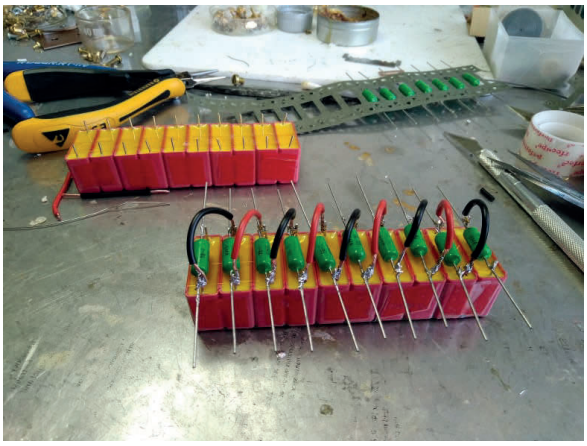
Ako základ bola použitá novodurová rúra, dlhá približne 50 cm, s priemerom 7 cm, na ktorú bol navinutý medený drôt s priemerom 0,03 cm, do výšky približne 40 cm (obr.1). Cievku tak tvorí približne 1300 závitov. Následne bol zakúpený lodný lak na drevo a na cievku nanesené tri vrstvy, kvôli dostatočnej elektrickej izolácií a mechanickej pevnosti. Rezonančná frekvencia sekundárnej cievky bola odmeraná osciloskopom a jej hodnota je približne 258 kHz.

2.2 Primárna cievka

Primárnu cievku tvorí 11 závitov, štandardného koaxiálneho kábla s hrúbkou 0,5 cm (obr. 1). Vypočítaná hodnota indukčnosti je približne 96μH. Koaxiálny kábel bol následne zbavený tieniaceho opletu, čím sme odhalili vodivú časť koaxiálneho kábla. To nám umožnilo pripojiť sa na ľubovoľnú časť koaxiálneho kábla, resp. "meniť dĺžku primárnej cievky". Zmenou dĺžky vodiča primárnej cievky, meníme indukčnosť, teda meníme rezonančnú frekvenciu primárneho obvodu, čo nám umožňuje ladiť primárny obvod do rezonancie so sekundárnym (pričom k rezonancii došlo po pripojení sa na 7. závit, čomu odpovedá indukčnosť primárnej cievky približne 50 μH).

2.3 VN - Kondenzátor

Kondenzátor v primárnom obvode musí ”zniesť” vstupné napätie na úrovni 3 – 5 kV. Keďže takéto kondenzátory je obtiažne (resp. cenovo nedostupné) zaobstarať, rozhodli sme sa vyskladať MMC kondenzátor (multi mini capacitor – kondenzátor vyskladaný z viacerých kondenzátorov) [2]. Ako základ boli použité FKP1 22N/1250V, ktoré sú predurčené ”znášať” rýchle zmeny napätia v čase, ako aj veľký pulzný výkon, čím su predurčené pre SGTC. MMC tvoria dve paralelné vetvy po 10 v sérií zapojených kondenzátorov FKP1 22N/1250V (obr.3). Celková kapacita MMC bola 8,8 nF a sú schopné ”vydržať” napätie až 6 kV jednosmerného (3 kV striedavého) napätia. Kondenzátory sme kvôli bezpečnosti premostili odpormi s hodnotou 6.8MΩ. Po vypnutí transformátora sa tak zvyšná energia uložená v kondenzátoroch vyžiari do okolia vo forme tepelnej energie.



Obr. 3: Sériová vetva 10-tich kondenzátorov FKP1 22N/1250V premostených odpormi s hodnotou 6.8MΩ

2.4 Iskrište

Iskrište pozostáva z 5 tenkostenných medených rúrok dlhých 20 cm (obr. 4). Oproti štandardne používanému iskrišťu (dve od seba vzdialené metalické gule) je v iskrišti z medených rúrok výboj rovnomerne rozdelený podĺž rúrok, čím dochádza k lepšiemu rozdeleniu tepla a spomaleniu degradácie materiálu iskrišťa [2]. Pre rúrky sme vytvorili špeciálny drevený držiak, kvôli presnej kontrole vzdialenosti medzi jednotlivými rúrkami, čo je pre nás veľmi dôležité. Tým sa zabezpečí náhodnosť preskoku výbojov pozdĺž medených rúrok. V prípade rôznych medzier medzi rúrkami, by si výboj vybral preferenčne ”najvýhodnejšie” miesto preskoku.

Obr. 4: Iskrište vyskladané z 5 medených rúrok na posuvnom drevenom držiaku

Časti tranformátora (iskrište, kondenzátory) boli uložené do špeciálne navrhnutého dreveného „boxu“

s držiakmi na závity primárnej cievky. Je dôležité aby boli jednotlivé komponenty pevne uchytené, pretože akákoľvek nepatrná zmena vzdialenosti komponentov voči sebe môže mať vplyv na rezonančnú frekvenciu.

2.5 Zdroj VN

Ako prvý sme pre napájanie SGTC využili zdroj zapožičaný z Katedry experimentálnej fyziky SPELLMAN - SL150, oddelenia fyziky plazmy. Tento inteligentný zdroj výkonnostne postačuje, avšak žiaľ, disponuje ”ochranou pred výbojmi”. V prípade preskoku výboja, (resp. kvôli toku spätných vysokofrekvenčných prúdov tečúcich z primárneho obvodu cez väzbu transformátora naspäť do zdroja) zdroj kvôli svojej ochrane okamžite zníži svoje napätie na nulu. Následne opäť narastie na prahové napätie preskoku výboja, a napätie znovu padá. Tento zdroj, hoci funkčný, rozhodne nie je dlhodobým riešením.

V súčasnosti optimalizujeme zapojenie využívajúce ako zdroj VN Ruhmkorffov induktor. Ruhmkorffov induktor je generátor jednosmerného napätia na úrovni 5 - 100kV napojený na 220V striedavého napätia. Výboje zo sekundárnej cievky s induktorom dosahujú dĺžku cez 20cm. Problémom tohoto zapojenia je, že v okamihu zapnutia induktora si TC ”vyžaduje” priveľký prúd, ktorý tečie rovno zo siete cez induktor, ktorý takto veľký prúd nie je schopný "vydržať", a kvôli ochrane induktora sa v ňom do niekoľkých sekúnd od zapnutia vyradia poistky. Zaradenie odporových vetiev s vysokými hodnotami odporov, kvôli limitácií vysokého prúdu sa neukázalo ako vhodné, nakoľko kvôli vysokému napätiu dochádzalo k prierazom na odporoch. V blízkej budúcnosti plánujeme zaradiť do obvodu, kvôli limitácií prúdu tlmivky.

V blízkej budúcnosti by sme radi vyskúšali napájať TC 4-vysokonapäťovými transformátormi z mikrovlnných rúr, pričom hodnota vstupného napätia a prúdu bude na úrovni 3kV a 1A. Pri tak vysokých výkonoch (3kW) očakávame mohutné výboje dĺžky viac ako 50 cm.

3 Hlavné výsledky

Po vyladení do rezonancie, so zapožičaným zdrojom SPELLMAN, dosahujeme výboje (pri atmosférickom tlaku) z hrotu transformátora s dĺžkou na úrovni 5 cm (obr. 5). To odpovedá napätiu na úrovni 50kV

Tabuľka 1: Zhrnutie parametrov zostrojenej SGTC

Sekundárna cievka	
Priemer	7cm
Výška	50cm
Výška vynutia	40cm
Priemer drôtu	0.03cm
Počet závitov	1300
Indukčnosť	18mH
Rezonačná frekvencia	258KHz
Primárna cievka	
Priemer	39cm
Priemer kábla	0,5cm
Počet závitov	11
Indukčnosť	96mikoH
VN - kondenzátor	
Kapacita	8.8nF / 3kV (AC)
VN - zdroj SPELLMAN SL150	
Napätie	2.2kV
Elektrický prúd	7mA

[2]. TC generuje okolo seba silné elektrické pole, čo dokazujeme ”zapálením” neónovej trubice, viac ako meter vzdialenej. Najnižšia ionizačná energia atómu neónu je 2080.7 kJ/mol. Po konverzii na eV možno odhadnúť prahovú hodnotu napätia pre 60cm dlhú neónovú trubicu na hodnotu približne 20V (pre druhú energetickú hladinu atómu neónu by to bol približne dvojnásobok, v [3] uvádzajú dokonca hodnotu napätia potrebnú na zapálenie výboja v neónovej trubici 55-110V - AC). Z hodnoty prahového napätia pre zapálenie výboja v trubici možno odhadnúť hodnotu intenzity elektrického poľa vo vzdialenosti 1m od TC na hodnotu 33V/m a hodnotu intenzity elektrického poľa na povrchu cievky na hodnotu 16kV/10cm (pri uvažovaní priebehu poľa $\frac{1}{r^2}$, kde r je vzdialenosť od osi sekundárnej cievky). Napriek veľmi hrubým odhadom, konštatujeme že prvotný odhad výstupného napätia na sekundárnej cievke - 50 kV, rádovo sedí s výpočtami s použitými aproximáciami. Magnetické polia sú (kvôli nízkym elektrickým prúdom tečúcim v závitoch sekundárnej cievky) v okolí TC zanedbateľné.

Poďakovanie

Táto práca by nemohla vzniknúť bez udeleného mimoriadneho štipendia od FMFI UK, ktorej by som sa chcel aj týmto spôsobom poďakovať. Ďakujem

Obr. 5: Ukážka činnosti zostrojeného SGTC

svojmu konzultantovi pánu doc. RNDr. Františkovi Kundracikovi, CSc. za cenné rady a pripomienky, Mgr. Palovi Neilingerovi, PhD. za jeho cenné skúsenosti a vedomosti v oblastí fyziky vysokých frekvencií. Ďakujem svojmu súčasnému školiteľovi dizertačnej práce doc. RNDr. Dr. Tomášovi Rochovi za nadšenie, ktoré prejavil pri mojej stavbe TC a pomoc pri vypožičaní zdoja VN. Ďakujem mamke, priateľke a mladšej sestre za pomoc pri zaobstarávaní jednotlivých komponentov.

Literatúra

[1] Tilbury, M., *The ultimate tesla coil design and construction guide*, (2008), 978-0071497374.

[2] http://www.vn-experimenty.eu/

[3] Neon Lamps, Gilway Technical Lamp Engineering Catalog 169

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 105
ISBN 978-8081470936, © 2019 Robin Menthéour, Barbora Tarabová

Enhancement of antibacterial effect of plasma activated water with pulsed electric field

Robin Menthéour, Barbora Tarabovà
Supervisor: Zdenko Machala

Contact : robin.mentheour@gmail.com

[1] FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Operative bacterial infections are still responsible for several thousand deaths per year, requiring the use of disposable medical equipment or more reliable sterilization. Non-thermal plasma of Transient Spark (TS) discharge induced by several kilovolts drop during 20 ns and driving a current of several tens of amperes demonstrated a significant antibacterial effect when combined with water electrospray. However, the mechanisms have not been clearly identified yet. Previously we observed significant bacteria reduction after direct exposure of *E. coli* bacterial suspension to plasma compared to only Plasma Activated Water (PAW) produced by TS with water electrospray. The difference between the results may be due to different plasma products, such as electrons, ions, UV, acidic condition, electric field, heating, Reactive Oxygen and Nitrogen Species (RONS), which were clearly identified as having strong antibacterial effects individually.

However, there are synergies between the different plasma products, which explain the stronger effect of direct exposition. Here we focus on the antibacterial effect of RONS in PAW coupled with the effect of electric field. RONS are known to damage the cell membrane, proteins and DNA that explains this antibacterial effect of PAW. Applying a high electric field moves the lipid bilayer of the cell membrane; which expands the membrane pore size depending on the length of the pulse and the electric field intensity. These pores allow the penetration of molecules, scuh as RONS, DNA or drugs into the cell.

To highlight this antibacterial effect accentuation due to the coupling between the RONS and electric field we have carried out repeated experiments with 4 conditions:

1)control where bacteria are incubated for 15 minutes in Deionized water (DW).

2) bacteria in DW are exposed to pulsed electric field and incubated for 15 minutes

3) bacteria are incubated for 15 minutes in PAW

4) bacteria in PAW are exposed to pulsed electric field and incubated for 15 minutes

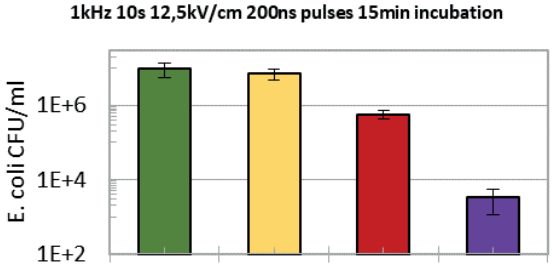


Figure 1: *E. coli* antibacterial effect of electric pulses, PAW and their combination. CFU/ml in log scale and standard deviations as error bars.

After incubation, the liquids containing the bacteria after treatments were deposited on petri dishes containing agar gel mixed with bacterial nutrient (Lauria-Bertani broth). After one-night incubation, counting of the survived bacteria is done, each of which is a macroscopic colony. The results (Figure 1) are presented for 5kV/cm pulses length for a duration of 200 ns at 1 kHz during 10 s.

The results illustrate a stronger antibacterial effect when RONS are coupled with high electric field pulses.

References

This work was supported by Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, and Slovak Research and Development Agency APVV-17-0382.

References

[Machala Z, Tarabová B, Sersenova D, Janda M, Hensel K 2019] J Phys D: Appl Phys 52 034002

[Dower W J, Miller J F and Ragsdale C W. 1988] Nucleic Acids Research 16

[Kolb J F and Stacey 2012] in Plasma for bio-decontamination, medicine and food security, eds: Z. Machala, K. Hensel, Y. Akishev, p. 365

[P.E. HERNANDEZ & P. LOPEZ-LORENZO 1984] Journal of Applied Bacteriology 56, 175-177

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 106
ISBN 978-8081470936, © 2019 Ondrej Mráz, Dominik Michálek

Štúdium oxidu grafénu modifikovaného aptamérmi s potenciálom využitia pre biomedicínske aplikácie (rozšírený abstrakt)

Ondrej Mráz[1]* Dominik Michálek[1†]
Školiteľ: Zuzana Garaiová[1‡]
Konzultant: Tibor Hianik[1§]

[1] Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oxid grafénu (GO) je relatívne nový materiál, ktorý preukazuje vysoký potenciál využitia v rôznych biomedicínskych aplikáciách. Jednou z oblastí, kde si GO získal špeciálnu pozornosť je cielený prenos liečiv. Bolo preukázané, že GO môže byť použitý ako efektívny nosič pre nanočastice nesúce rôzne terapeutické látky ako aj pre aptaméry – funkčné oligonukleotidy, ktoré sa špecificky viažu na cieľové molekuly alebo bunky [1, 2].

GO v kombinácii s aptamérmi špecificky sa viažucimi na nádorové bunky predstavuje sľubnú platformu pre jednoduché a účinné diagnostikovanie rakoviny. V prípade použitia fluorescenčne značených aptamérov sa využíva tzv. OFF-ON koncept biodetekcie [3]. Dôležitým javom v tomto koncepte je schopnosť GO zhášať fluorescenčný signál. Fluorescenčnou značkou modifikované aptaméry po naviazaní sa na štruktúry GO strácajú svoj fluorescenčný signál – signál OFF. Preferenčné viazanie aptamérov na svoje cielené molekuly/bunky má však za následok vzdialenie molekuly od zhášača a nastáva obnovenie signálu – signál ON.

V našej práci sme pripravili kompozit GO s aptamérmi cielenými na PTK7 receptor v membráne buniek akútnej lymfoblastickej leukémie (Jurkat T-bunky) a modifikovanými fluorescenčnou značkou ATTO542. V prvom kroku sme preskúmali zhášanie fluorescencie ATTO542-aptaméra pod vplyvom rôznej koncentrácie GO. Pripravené kompozity následne preštudujeme z hľadiska obnovenia fluorescencie po pridaní Jurkat T-buniek.

Získané výsledky budú použité k optimalizácii protokolu smerom k precíznej a ľahko dostupnej diagnostike leukémie na báze GO a aptamérov.

Poďakovanie. Táto práca bola podporená Agentúrou na podporu výskumu a vývoja, projekty číslo APVV-14-267 a SK-PL-18-0080.

Literatúra

[1] Gu, Y., Guo, Y., Wang, CH., Xu, J., Wu, J., Kirk, T. B., Ma, D., Xue W.: *A polyamidoamne dendrimer functionalized graphene oxide for DOX and MMP-9 shRNA plasmid co-delivery*, Material Sci. Eng. C, 70 (2017) 572-585.

[2] Gao, L., Qin Li, Q., Li, R., , Lirong Yan, L., Zhou, Y., Chen, K., Shi, H.: *Highly Sensitive Detection for Proteins Using Graphene Oxideaptamer Based Sensors*, Nanoscale 7 (2015) 10903-10907.

[3] Tan, J., Lai, Z., Zhong, L., Zhang, Z., Zheng, R., Su, J., Huang, Y., Huang, P., Song, H., Yang, N., Zhou, S., Zhao, Y.: *A Graphene Oxide-Based Fluorescent Aptasensor for the Turn-on Detection of CCRF-CEM*, Nanoscale Res. Lett. 13 (2018) 66.

* ondrejmraz98@gmail.com
† domin.michalek@gmail.com
‡ garaiova.zuzana7@gmail.com
§ Tibor.Hianik@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 107
ISBN 978-8081470936, © 2019 Barbora Stachová

Emission of molecular hydrogen induced by electron impact

Barbora Stachová[1]*
Supervisor: Juraj Országh[1‡]

[1] FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

The aim of this paper was to examine emission continuum of electron-excited molecular hydrogen H_2 ($a^3\Sigma_g^+ \rightarrow b^3\Sigma_u^+$). This continuum was studied in a crossed-beams experiment in the range of wavelengths within 200-800 nm at electron energies below the thresholds of other excitation processes. Furthermore, relative cross sections were measured for selected wavelengths.

Hydrogen is the most abundant chemical substance in the universe, that is why it is essential to study its properties and behaviour. [Kwok et al., 1986] proposed that transition $a^3\Sigma_g^+ \rightarrow b^3\Sigma_u^+$ of molecular hydrogen is a major contributor to the opacity in stellar atmospheres and an important source of emission in laboratory experiments and possibly in the ultraviolet spectrum of the Jovian planets.

Regarding previous research, J. M. Ajello and D. E. Shemansky [Ajello et al., 1992] studied the continuum in the vacuum ultraviolet from 11-30 eV and broadened cross section data to 60eV. Middle ultraviolet and visible regions (175-530 nm) obtained at 14, 19 and 100 eV were studied by G. K. James [James et al., 1998] and the absolute cross sections of selected transitions were measured as well.

For this study, a crossed-beams setup was used [Danko et al., 2013]. Trochoidal electron monochromator was used as a source of electrons and the beam collided with H_2 molecules causing their excitation and subsequent deexcitation during which a photon was emitted. To obtain only single step excitations the strictly linear dependence of light intensity on the pressure of measured gas had to be sustained.

Our study provides new, extended data on the continuum ranging from the vacuum ultraviolet up to the near infrared region. The continuum was measured at several electron energies. Electron energies up to 14 eV solely lead to the continuum of H_2, however at higher energies, in our case 15.5 eV, the Fulcher bands start to occur. In addition, the continuum was corrected for the apparatus function and the energy of the background noise was subtracted, as shown in Figure 1. Relative cross sections at chosen wavelengths were measured as well and are depicted in Figure 2.

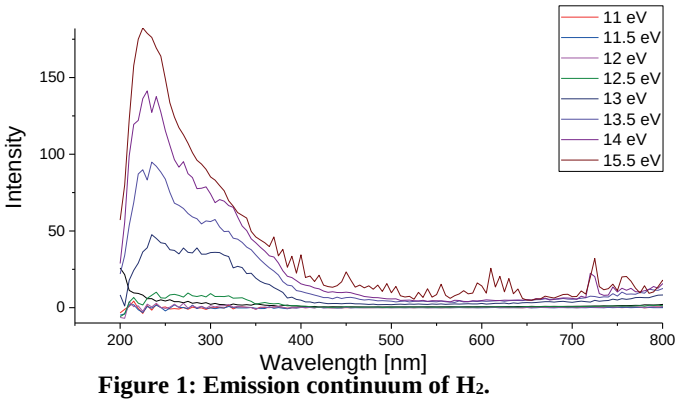


Figure 1: Emission continuum of H_2.

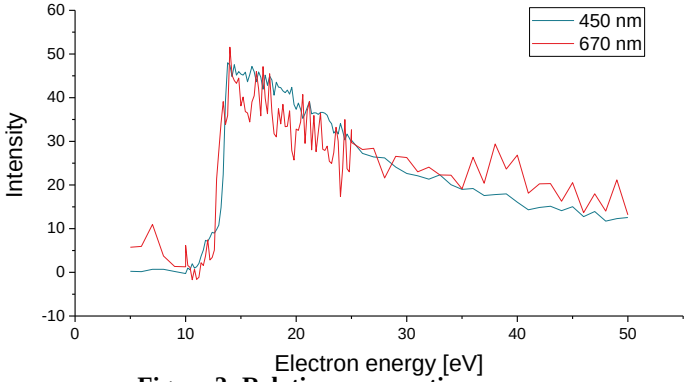


Figure 2: Relative cross sections.

References

[Kwok et al., 1986] T. L. Kwok, S. Guberman et al. (1986). Dipole moments and transitions probabilities of the $a^3\Sigma_g^+ \rightarrow b^3\Sigma_u^+$ system of molecular hydrogen. *Physical review A*, volume 34, number 3.

[Ajello et al., 1992] J. M. Ajello, D. E. Shemansky (1992). Electron excitation of the H_2 ($a^3\Sigma_g^+ \rightarrow b^3\Sigma_u^+$) continuum in the vacuum ultraviolet. *The astrophysical journal*, 407:820-825.

[James et al., 1998] G. K. James, J. M. Ajello et al. (1998). The middle ultraviolet-visible spectrum of H_2 excited by electron impact. *Journal of geophysical research*, vol. 103, 20,113-20,123.

[Danko et al., 2013] M. Danko, J. Orszagh, M. Ďurian et al. (2013). Electron impact excitation of methane: determination of appearance energies for dissociation products. *Journal of physics B: Atomic, molecular and optical physics*, 46 (2013) 045203 (10pp).

* stachovab@gmail.com
‡ juraj.orszagh@uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 108
ISBN 978-8081470936, © 2019 Mostafa Elsayed Hassan

Investigation of the Electro-sprayed Water Micro-droplets Using Optical Methods (Extended Abstract)

Mostafa Elsayed Hassan*
Supervisor: Zdenko Machala†, Mário Janda

Department of Astronomy, Earth Physics and Meteorology, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Atmospheric air plasma created in contact with water creates acidic solutions containing reactive oxygen and nitrogen species (RONS), which are effective in killing bacteria in biomedical applications [Burlica R et al., 2010].

The transport phenomena of various RONS from the plasma into water, which have various Henry's law solubility coefficients, is determined by the water droplet size [Machala Z et al., 2019].

We apply two optical techniques to control the electro-sprayed deionized water droplet size and density and investigate the transport of the gaseous plasma species into the liquid through the plasma-liquid interface.

The first technique is the photodetector method which used to detect the light intensity signal decrease caused by passing the electro-sprayed water droplets through the light beam of the strong white LED. The second technique is the fast camera imaging method which records photographs (CASIO EXILIM, with typical record parameters 60 fps and shutter speed 40,000) of the magnified electro-sprayed water droplets using a convex lens during illumination with the strong white LED.

The diameter (d) of the electro-sprayed water droplets is estimated in the first technique from the relative decrease of light intensity that is directly proportional to the ratio of droplet shadow size and the active detector area, while in the second technique from the photograph sequences after processing and analyzing by software (Microsoft Office Picture Manager and GIMP). The droplet size distribution histograms were created for each technique after analysis of several waveforms and 20 groups of photographs (60 photos for each group), as shown in Figure 1.

We found the most abundant droplets are with d=20-40 μm using both techniques. We assume the camera did not detect all droplets with a diameter <20 μm correctly because some of the microdroplets deviated from the focusing plane of the lens and camera. Also, the camera exposure time=25 μs is not short enough to detect all droplets precisely and so they appear elongated.

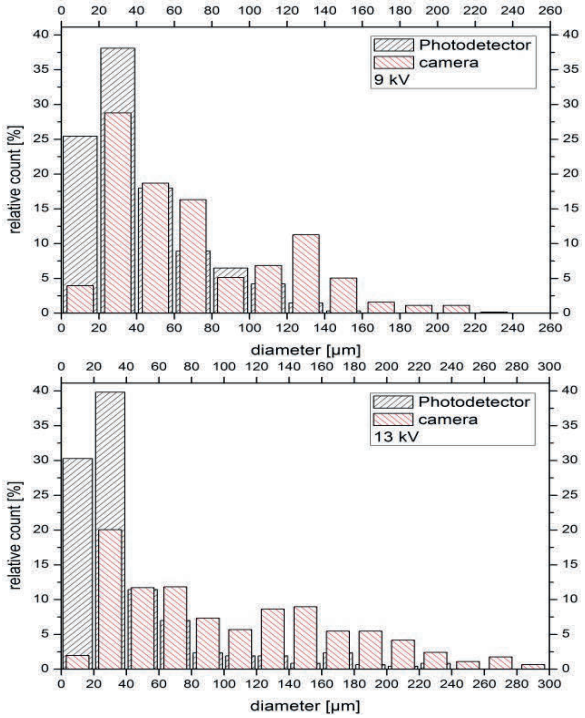


Figure 1: Microdroplet size distribution

The camera imaging technique demonstrated a good correlation with the size distributions measured by the photodetector technique.

References

[Burlica R et al., 2010] Burlica R, Grim R G, Shih K-Y, Balkwill D and Locke B R (2010). Bacteria Inactivation Using Low Power Pulsed Gliding Arc Discharges with Water Spray. *Plasma Process. Polym.* **7** 640–9

[Machala Z et al., 2019] Machala Z, Tarabová B, Sersenová D, Janda M and Hensel K (2019). Chemical and antibacterial effects of plasma activated water: correlation with gaseous and aqueous reactive oxygen and nitrogen species, plasma sources and air flow conditions. *J. Phys. D. Appl. Phys.* **52** 034002

* Mostafa.Hassan@uniba.sk
† machala@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 109
ISBN 978-8081470936, © 2019 Richard Cimerman, Emanuel Maťaš

Generovanie výboja v štruktúrach podobným automobilovým katalyzátorom (rozšírený abstrakt)

Richard Cimerman* Emanuel Maťaš
Školiteľ: Karol Hensel‡

Katedra astronómie, fyzike Zeme a meteorológie, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

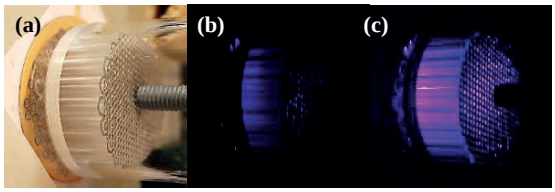
Plazmová katalýza, t. j. kombinácia plazmy s chemickou katalýzou, nachádza uplatnenie v mnohých environmentálnych aplikáciách. Jej prínosom je kombinovanie vysokej katalytickej selektivity s vysokou plazmovou reaktivitou, čo vedie k vyšším účinnostiam odstraňovania nežiaducich zložiek s nižšou energetickou náročnosťou v porovnaní s len katalytickými alebo plazmatickými metódami.

V našej práci sme experimentálne skúmali možnosti kombinovania nerovnovážnej plazmy generovanej elektrickými výbojmi pri atmosférickom tlaku s voštinovými katalyzátormi, ktoré sa používajú v automobilovom priemysle na čistenie výfukových plynov, za účelom zlepšenia ich účinnosti a predĺženia ich životnosti. Tvar týchto katalyzátorov (paralelné úzke kanáliky) však výrazne sťažuje podmienky generovania stabilnej plazmy v ich vnútri, napríklad v dôsledku strát nabitých častíc v interakciách so stenami katalyzátora [Hensel, 2009].

V našom výskume sme pre jednoduchosť tvar katalyzátora nahradili zväzkom úzkych sklenených kapilár (dĺžka 20 mm, priemer 2,8 mm), čo nám umožnilo uskutočniť optickú diagnostiku výbojov generovaných v ich vnútri. V minulosti sme výboj v kapilárach generovali prostredníctvom dielektrického bariérového výboja generovaného v lôžku keramických peletiek a aplikáciou jednosmerného vysokého napätia (HV) pozdĺž kapilár [Sato, 2009]. Z fyzikálneho hľadiska sa preto výboj v kapilárach dá považovať za superpozíciu dielektrického bariérového a korónového výboja. V súčasnosti ako pomocný zdroj plazmy používame povrchový bariérový výboj generovaný perforovaným keramickým elementom (*Kyocera*), ktorý je napájaný striedavým (AC) HV s amplitúdou 3 – 6 kV s frekvenciou 1000 Hz. Mriežková elektróda umiestnená na kapilárach bola napájaná jednosmerným (DC) HV s amplitúdou 11 – 17 kV a meniteľnou +/– polaritou. Ako nosný plyn sme použili vzduch s rôznou relatívnou vlhkosťou (RH) v rozsahu 0 – 80 % a rôznym prietokom (0,5; 1 a 2,4 L/min). Chemická aktivita výbojov v plynoch (produkcia O_3 a NOx) bola vyhodnocovaná pomocou infračervenej spektroskopie (FTIR) a v prípade O_3 aj UV absorpciou (254 nm).

Cieľom práce bolo študovať základné elektrické (výkon výboja, amplitúda a početnosť prúdových pulzov) a optické charakteristiky (optická emisná spektroskopia) povrchového bariérového výboja a výboja v kapilárach, ako aj ich chemickú aktivitu v plynoch pri rôznych podmienkach. Ďalším cieľom bolo vyhodnotiť efekt prietoku a RH plynu, ako aj polarity DC HV, na intenzitu (stabilitu, kvalitu) a distribúciu výboja v kapilárach.

Merania odhalili, že s rastom prietoku a RH plynu rástla intenzita aj stabilita výboja generovaného v kapilárach. Intenzita výboja bola vyššia v prípade použitého kladného DC HV. V prípade suchého vzduchu sa výboj v kapilárach vôbec neformoval a to aj napriek najväčšej stabilite a intenzite pomocného povrchového bariérového výboja. Vyhodnotenie chemickej aktivity výbojov ukázalo, že produkcia O_3 bola vždy vyššia v prípade generovania výboja v kapilárach (t. j. pri aplikovaní AC aj DC HV), ako v prípade aplikovaného len AC alebo len DC HV.



Obr. 1: Keramický element so sklenenými kapilárami (a) bez výboja; (b) s aplikovaným AC HV (4 kV @ 1 kHz); (c) s aplikovaným AC aj DC HV (4 kV @ 1 kHz; +16 kV) (vzduch RH 60 %, 2.4 L/min) [Expozícia 8 s, f/5.6, ISO 400].

Literatúra

[Hensel, 2009] Hensel, K. (2009). Microdischarges in ceramic foams and honeycombs. *Eur. Phys. J. D.*, 54:141–148.

[Sato, 2009] Sato, S., Hensel, K., Hayashi, H., Takashima, K., and Mizuno, A. (2009). Honeycomb discharge for diesel exhaust cleaning. *J. Electrostat.*, 67:77–83.

* cimerman@fmph.uniba.sk
‡ hensel@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 110–121
ISBN 978-8081470936, © 2019 Lukáš Gajdošech

Inspection and Editing of 3D Reconstructions in VR

Lukáš Gajdošech*

Supervisor: Martin Madaras†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstract: Point clouds are sets of points in space, usually obtained by a 3D scanner in varying quality and detail. As with any widely used data structure, a quality processing tool is needed. Since it is a representation of a 3D spatial data, a flat 2D monitor is evidently not the ideal displaying device. On the other hand, virtual reality can provide a much better environment for evaluating such data visually. Our motivation in this implementation-oriented bachelor thesis was to develop a tool which will be part of the existing object reconstruction pipeline. After an object is scanned from multiple angles and scans are automatically aligned, the user can load the result into our tool to inspect it, fix the errors, adjust the alignment manually and delete potential outliers. We developed it using Unreal Engine 4, which provides a robust and powerful framework.

The resulting software can be controlled with classical mouse and keyboard approach or with motion controllers in virtual reality. Two different graphical interfaces are implemented for these two different use-cases. For working with point clouds consisting of a huge amount of points, several accelerating structures are evaluated. Octree best suited our needs, so a custom version is implemented. We also use several ray-object intersection algorithms to select a point with its neighborhood using a mouse or a controller.

Keywords: point cloud, c++, virtual reality, motion controllers

1 Introduction

Point cloud data is often converted into more practical representation of a 3D surface [Berger et al., 2016], such as a triangular mesh [Cignoni, 2009]. Among other reasons, meshes are easier and more unambiguous to render, they are better at representing a continuous surface and they can be easily materialized and textured. However, our goal here is to implement a tool, which works with the raw data from scanners as it is, without any pre-processing or conversion. There are even some advantages to using points as a display primitive [Levoy and Whitted, 1985].

Conversion of detailed scans to meshes can be notably time demanding. Working directly with the raw data can save this conversion time. Also, there are already many programs for working with meshes available. The number of software for processing point clouds is significantly lower and only few of them exploit the potential of virtual reality. Trying to create such tool is worthwhile and our motivation is a specific usage in the object reconstruction pipeline.

We started the development with a choice of technology and with gathering of the required theoretical knowledge. We decided to build the tool using Unreal Engine 4. The author of this thesis did not have any previous experience with this technology. A big part of this work was learning to use this framework. Developing for virtual reality proposed yet another challenge, not to mention the need of a stable real-time performance. As with any other implementation-oriented thesis, the developed software tool is an inseparable part of this work.

2 Theoretical Background

In this section we describe the theory behind some of the tools, designs, structures and algorithms used in the tool developed with this bachelor thesis.

2.1 GUI in Virtual Reality

User Interface is the representation of the program for the user. By clicking, pressing keyboard buttons or using any special hardware, the user is communicating with the software. In a case of a VR application, actions such as using motion controllers and looking around in the world extend the ways of interaction. Quality of the UI can have a great impact on whether the user decides to use a given software [Sajedi et al., 2008].

Graphical user interface is a form of user interface. It provides all sorts of graphical elements and han-

*l.gajdosech@gmail.com
†madaras@skeletex.xyz

dles their drawing on the screen. It also deals with recognizing the position of interface tools, such as motion controllers. Implementing this functionality is time demanding, thus UI design packages exists [Sajedi et al., 2008]. One such tool is the Unreal Motion Graphics UI Designer found in Unreal Engine 4 [UE4 Documents, 2019].

UI design metaphors are commonly used as a reference to a familiarity of a UI component to something from our day-to-day life. In a typical application GUI is usually laid over the rest of the environment, which can be a three dimensional space in case of a 3D processing software. This is known as a 2D UI metaphor, namely a heads-up-display (HUD) [Kopciak, 2015]. Kopciak in his research paper describes several differentiations of GUI metaphors especially for VR. Some of them are more suitable for games. For a 3D processing tool, categorization based on the location of elements is worth noting:

- *In the world:* element is placed in the world as an ordinary object. It can be a button or lever, or something more exclusive to the virtual reality, like a hovering tag.
- *In the hand:* element is linked to the hand of the user, in which he holds a motion controller. This location type is unobtrusive and represents a natural way of interaction.
- *In front of the view:* element is displayed at a screen depth. This is the simplest conversion of familiar 2D interface to virtual reality (HUD).
- *On the Panel:* several elements are grouped on a plane. This metaphor can be combined with any of the preceding ones. An example is a in-world menu panel.

In the front of the view which is inspired by the classical approach may not be ideal for a VR application [Kopciak, 2015]. GUI is rendered at a screen depth, which yields the necessity of depth jumps between the GUI and the surrounding environment, resulting in a clumsy and unpleasant experience. In our tool, we want the user to be able to visually evaluate point clouds without any GUI elements obstructing his view. *In the hand* and *on the panel in world* seem to be the two most suitable metaphors.

This theoretical knowledge together with other guidelines on building a user interface with good usability provides a solid basis for developing a friendlier software [Sajedi et al., 2008]. It allows us to develop two separate user interfaces for using our tool on a 2D display with mouse and keyboard and in the VR using motion controllers.

2.2 Accelerating Structures

There are usually hundreds of thousands of points in every point cloud scan. Software intended to work with this data must be able to do operations over it in a reasonable time. We have to both search for a point at given coordinates and also have a way to determine, if a ray from the controller collides with some point. This enables the user to do actions like selecting a certain area of points and editing them.

A specific example is a nearest neighbor search (NNS). It is a problem of finding a point within a given set closest to some coordinates. Implemented naively, NNS runs in $O(n)$ time. We can extend it to a problem of finding several points within a given radius, forming a neighborhood. Even though $O(n)$ is a linear complexity, for large point clouds it can still take a lot of time. We can avoid exploring all points by employing spatial data structures [Elseberg et al., 2012]. They divide a space by certain rules, creating a tree-like hierarchy, in which proximity search operations can be done quicker, usually in $O(\log n)$. In this section we present two such structures.

Since we are making a point cloud processing software, we are interested in building these structures over 3D data. Moreover, the time-complexity for queries like the NNS grows quite rapidly with higher dimensions. The O-notation hides constant factors that are exponential in the number of dimensions, therefore an approximate algorithms are worth considering in high-dimensional applications [Arya et al., 1998].

2.3 Kd-tree

Kd-trees were invented in 1970 and the “k” in their name denotes the dimension of a given tree [Kingsford, 2019]. So a Kd-tree over a three-dimensional data is a 3d-tree. Each node of the kd-tree splits the space alongside an axis-aligned hyperplane. Points to the left of this plane are represented by the left subtree and points to the right are represented by the right subtree. Usual strategy is to cycle through the axes used to select the splitting planes as one goes down the tree.

However, there is no definitive rule for where exactly these splits should occur. Therefore there

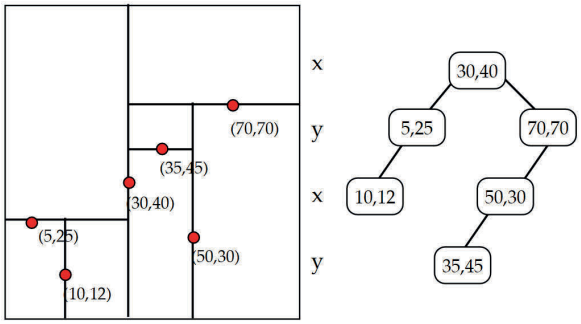


Figure 1: Example of the 2d-tree.

is not a unique way of constructing the kd-tree [Elseberg et al., 2012]. One can either pick a median from remaining points with respect to their coordinates in the axis being used to create the splitting plane, often resulting in a balanced tree. Disadvantage of this strategy is the additional time for sorting points and finding the median. To avoid this, picking a random point is also a valid strategy. Another splitting rule is the so called midpoint rule, which merely splits the current volume in half along its longest dimension. In this last strategy, nodes of the tree are implicit splitting planes with points only in leaf nodes.

In Fig. 1 we present a simple example of a 2d-tree, where a splitting point is chosen at random and each node represents a point at which we split. We start with a point at (30, 40) as our root node. Here we divide the space into two halves, creating a splitting plane parallel to the y-axis. Now we proceed with points with x-coordinate less or equal to 30. As we mentioned earlier, we cycle through the dividing axes as we go down the three. Point (5, 25) divides the space alongside its y-coordinate of 25. With no points of y-coordinate greater than 25, only point (10, 12) remains, which splits the space alongside its x-coordinate and ends this branch. We form the right part of this tree in a similar fashion.

To find a point at coordinates (x,y) using this structure, one simply traverse down the tree and compare the coordinate from the cutting dimension at each level. Clearly, this query takes time in $O(\log_2 n)$. However, if we are asked to find a point closest to some arbitrary location Q, the solution is not so straight-forward. Reason is that the nearest point to Q in space may be far from Q in the tree. For example, let's consider a Q location of (5, 5). Now imagine that the root node of our tree would split the space along its x-coordinate of 4. We would then naturally traverse down its right subtree, since 5 is greater than 4. But it can so happen that all points in the right subtree have the y-coordinate very different than the y-coordinate 5 of Q and the true nearest neighbor with coordinates (3, 5) lives in the left subtree. In order to find it we seemingly need to traverse the whole tree, effectively ruining its purpose. However, there are some clever concepts for pruning unnecessary subtrees and in practice the running time of this problem is then close to $O(2^{dimension} + \log n)$ [Kingsford, 2019].

We can conclude that kd-tree is a reasonable structure for both partitioning the space to tackle search queries and intersections with a ray, since it forms a hierarchy of rectangular cuboids.

2.4 Octree

Octree as opposed to kd-trees splits the space in a more regular and predictable way. Same as with kd-trees, it partitions the space recursively. This time however, we are splitting using all three coordinates and consequently a node has exactly eight children. A root of the octree usually represents enclosing box that incorporates the whole point cloud and is then further subdivided.

There are several types of octrees [Kingsford, 2019]. In a PR (point-region) octree partition locations do not depend on the data points. We simply pick the center of the root cube and then divide it into 8 cubes of half the size. In theory, each node can subdivide up until each leaf contains either one or zero points, but this can be very memory consuming for big point clouds. Therefore, we define a stopping rule like a minimum number of covered points. With division not depending on the locations of points, there can be lot of empty nodes in a PR octree.

Another type is a MX (Matrix) octree. It is good for a data in which smallest element is know. Example is an image data with pixel being the smallest element. As opposed to PR octree, it always subdivides until the smallest element is reached, that is, when the pixel fits exactly inside of its node. The advantage is that all the leaves with data are at the same depth. In our case, we do not exactly know the size of the smallest element (point has no volume). Also, we do not want to divide to such a fine detail and often stop before each node contains only one point.

Last type of octrees presented here are Point oc-

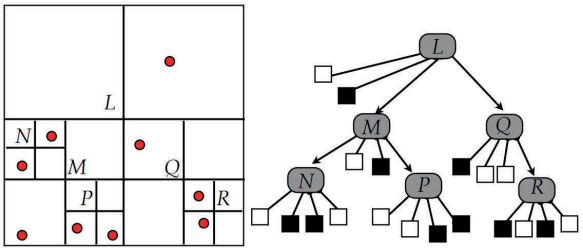


Figure 2: Example of the Quadtree.

trees. They are similar to PR octrees, except we split on locations of the points, rather than evenly dividing space, similarly to kd-trees. Each node is still divided into 8 children, but they are not regular cubes. This can be more memory effective, as we divide the space with regard to the structure of point cloud, which can save the number of empty nodes.

As in preceding subchapter, we present a simple example of PR octree in Fig. 2. For illustrative purposes we again demonstrate this on a 2D data. Equivalent of a PR octree in 2D is a PR quadtree. Each node represents a rectangle and has 4 children. We start at the outer enclosing box L, which includes all the points. It is divided into 4 children, each represented by a rectangle of half the size. As we can see, the upper-left rectangle is empty and top-right has exactly one point inside, so these are not subdivided any more. Rest of the process is quite self-explanatory.

Finding a point P with (x,y) coordinates using this structure is rather simple. We start at the root of the tree and look at the coordinates of its center. In a case of quadtree, 4 cases can occur. Either the x-coordinate of P is less/equal or greater than the x of the center of the current node and same applies for the y-coordinate. Complexity of this operation is in $O(\log_4 n)$. Similar to kd-tree, NNS for an arbitrary location Q is not so evident and the key to an efficient traversal is the order in which children are visited [Elseberg et al., 2012].

For the purpose of the tool developed with this bachelor thesis a custom implementation of PR octree is used. It may have bigger memory requirements than some of the other structures considered, but we picked it for its exact division, regularity and a uniformal, cube-shaped partitioning. It makes implementation easy and also provides a clean way for finding points intersected by a ray, as we shall discuss in the next subchapter.

As a final note of this subchapter, we mention the

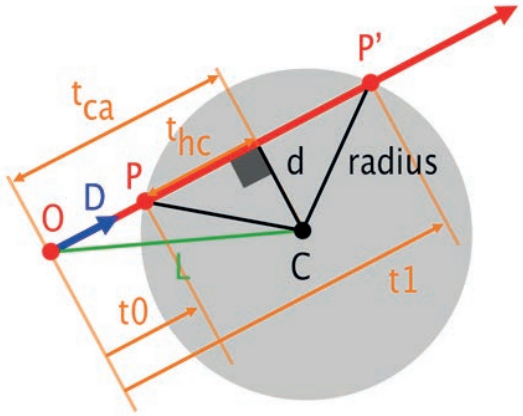


Figure 3: Finding the ray-sphere intersection.

fact that points in a cloud have no volume. This is actually beneficial in the case of spatial partitioning. Thanks to their nature, we are always able to assign the point into one of the nodes of our tree. If they had a volume, special cases for then they overlap into several nodes would have to be considered.

2.5 Intersection Algorithms

After we construct the octree over a point cloud data, we need a way to determine if a ray from cursor/controller intersected any of the points. It can be done in two steps. First, the algorithm checks if the ray hits any of the cubes represented by the nodes of the octree. Then, points within the intersected cube are represented as small spheres, so ray-sphere algorithm can be used. Now we look at the theory behind these two intersection algorithms.

2.6 Ray-Sphere Intersection

Since points have no volume, we represent them by small spheres of suitable radius. The problem of finding an intersection of a line and sphere have several interpretations and after some research we picked a geometric solution [ScratchPixel 2.0., 2019]. It is easy to implement and works with vector formulation of the line, which is natural in case of a ray-cast.

In Fig. 3, there is a 2D visual interpretation of the solution. O is the origin of the ray and $\vec{D}$ its normalized direction. The point is located at the centre of the sphere C, with the radius of d. In our application, we do not require the exact positions of intersections P and P'. We only need to know if the ray collided

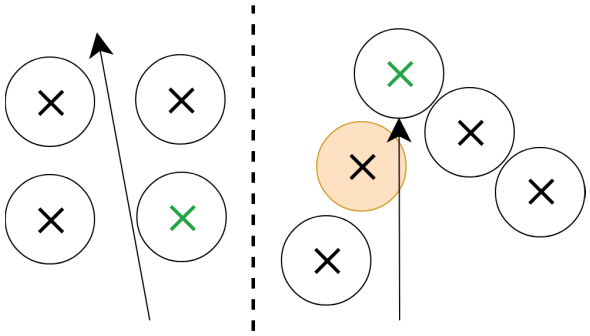


Figure 4: Examples of problems with using the inappropriate sphere radius.

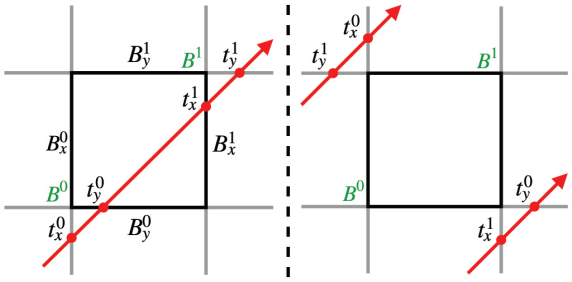


Figure 5: Scenarios of the ray-box intersection.

with the sphere or not. The problem then turns into a simpler one of finding a distance from a line to a point [Ballantine and Jerbert, 1952].

We find the vector $\vec{L}$ as $C - O$. From that, we can find the distance t_{ca} as the dot product of $\vec{L}$ and $\vec{D}$. If this distance is lower then 0, it means that the vector $\vec{L}$ and the vector $\vec{D}$ points in opposite directions. This is the case when the intersection occurred behind the origin of the ray O. We result this case as a miss, since the user apparently do not want to select points behind him. Finally, we calculate the distance d using Pythagorean theorem and compare this distance to the radius of the sphere [ScratchPixel 2.0., 2019].

Sphere radius is the decisive factor. By adjusting it, we practically change the sensitivity of the selection, which is the required distance of the ray from the point to be resolved as a hit. This can be very individual for a given point cloud data, as the Fig. 4 exemplifies. On the left we can see a situation with a sparse point cloud. By using a small decisive distance, it can easily happen that the ray-cast is resolved as having no intersections, even though the user may have wanted to select one of the points marked by green. A different situation with a denser point cloud is visualized on the right. Here selection may seem to be off target. An expected behaviour for the user would be to select the point marked with green, but since the radius is too big, a different point is selected first. A possible solution to this would be to gather all intersected points first and then pick the one which was closest to the ray.

Nevertheless, a more efficient solution may have been to select a better radius of the representing sphere. In practise we have to analyze the point cloud first and pick the best decisive distance possible. It may be calculated from the average distance of neighboring points. We are still looking for a most versatile solution, which would give a good results on various data.

From a functional point of view, this is the only algorithm we need. It allows us to determine whether a ray-cast intersected some points of the point cloud. We could use it even without spatial partitioning by the octree. However, this solution would be very time inefficient in case of huge point clouds. We would have to check for a hit with every single point. By using the octree, we narrow down the search to a small area represented by the node. But how exactly do we find leaf nodes intersected by the ray? For that we need the second algorithm which now follows.

2.7 Ray-Box Intersection

In the octree, each node has its center position and side length. From this we can calculate the two positions B^0 and B^1. They define an bounding box in the coordinate system of the point cloud. Each of these points define three axis aligned planes (two in case of a 2D). Deciding whether a ray intersected the box is then matter of finding intersections with these planes and examining, if the resulting combination indicates a hit.

There are several possible scenarios for the location of the cube in the world and the direction from which the ray is coming. The general idea of the algorithm is visualized in the Fig. 5. Since it is a 2D illustration, there are only 4 lines (instead of planes) formed by the corners of the rectangle. The lines formed by the x, y coordinates of the B^0 are denoted B_x^0 and B_y^0 respectively and similar naming applies for B^1.

The ray is characterized by the equation $O + \vec{D} * t$, where O is its origin, $\vec{D}$ its normalized direction and the parameter t is any real value. Now using the equation above, we can express the coordinate B_x^0 as $O_x +$

$\vec{D}_x * t_x^0$, from which we by rearranging terms get the value of parameter $t_x^0 = (B_x^0 - O_x)/\vec{D}_x$. Calculating t_y^0, t_x^1 and t_y^1 is analogous [ScratchPixel 2.0., 2019].

Finally, if $t_y^1 < t_x^0$ or $t_x^1 < t_y^0$ we call it a miss, otherwise the ray intersected this rectangle. This logic may change depending on the direction of the ray and the position of the cube. Algorithm can easily be extended to three dimensions by introducing two additional planes formed by the z-coordinate [Williams et al., 2005]. Full version can be found in the work by Williams et al.

Our application is to gather nodes of the octree, which were intersected by the ray. This is a recursive process, which starts by checking the intersection of the outer bounding box represented by the root of the octree and continues on children nodes in case of a hit. We describe implementation details later in this document.

3 Choice of Technologies

Our software could be developed from the ground up, using some graphical library such as the OpenGL. However due to quicker implementation, robustness, support of multiple platforms, VR headsets and motion controllers, we decided to use one of the available graphical engines.

There are several options available and after some research, we decided to use Unreal Engine 4 (hereinafter referred to as UE). The supervisor of this thesis and his company Skeletex have years of experience using C++ and they have several custom libraries. UE runs with C++ code, which was one of the major deciding factors.

3.1 Unreal Engine 4 Class Structure

A class hierarchy of UE is huge [UE4 Documents, 2019]. Of course, developer does not have to know every single class to successfully work with UE. There are some principal classes though, which should be extended for a given usage. UObject is at the root of this hierarchy and there exists 2561 inherited classes within the engine at the time of writing. It provides the basic functionality for all other classes, such as a set of constructors, meta information, destructor functions, several boolean properties etc. Most of these are usually not used directly by the developer, but are necessary for the engine to work properly. Without this boilerplate, many useful features like changing a property of an object (i.e. color of something in the scene) directly in editor window (instead of modifying the code) would not be possible.

In practise, custom classes made for a certain project usually do not extend UOBject directly, but some of its subclasses instead. AActor is one of the most used parent classes in UE (together with over 150 derived classes). Another common parent class is APawn, used for actors controlled by an input from the user or by an AI Script [Sherif, 2015].

Following the class-naming scheme of the UE, name of every class derived from UObject must be prefixed by U, except for classes derived from AActor, which are prefixed with A. To create a struct supporting all Unreal Engine features, aside from tagging it correctly, its name must start with F (for example FVector). Finally, UE provides own implementation of usual containers, templated to hold any type, prefixed by letter T. Most notably TArray, TSet and TMap [UE4 Documents, 2019].

3.2 Unreal Engine 4 Reflection

UE have several annotations and macros. Together they form a property system, that is used for a reflection, which is an ability of a program to examine itself during run-time. Developer should mark corresponding program structures with macros like UCLASS() or UFUNCTION(). Every .cpp file with code annotated in this way must also have#include ”FileName.generated.h”. This lets UHT (Unreal Header Tool) know that it should consider and examine this file [Noland, 2014] [UE4 Documents, 2019].

However, only classes derived from UObject can be marked with these macros. Any custom code without macros is invisible for the UE and is not handled by it. That matters mainly because of the automated garbage collection. Dynamically allocated instances of custom types are not taken care of and must be deleted by the programmer. Instances of UCLASS() are on the other hand handled by the system and should not be destroyed manually. This can be both very helpful and dangerous. A property in form of a pointer without the UPROPERTY() macro is practically invisible to the system, it is considered unreferenced and may be automatically deleted.

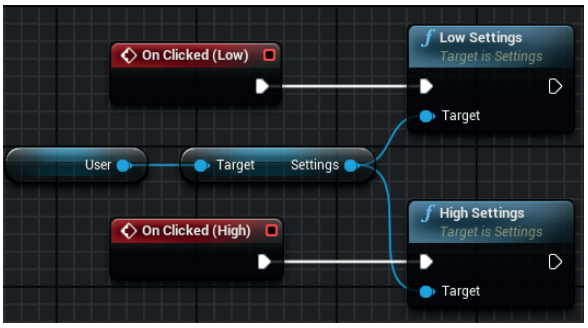


Figure 6: Example of the Unreal Engine 4 Blueprint.

3.3 Unreal Engine 4 Blueprints

Further down the hierarchy Blueprints appear. They are child-classes made directly inside of the editor window. Developers of UE recommend to use both C++ code and Blueprints in cohesion. The common workflow is to implement the base class in C++ and further enhance it via Blueprints.

Blueprint system is a form of visual scripting. Programming with Blueprints is like making a UML flowchart (Fig. 6). There are nodes for function calls, branching, looping etc. Practically everything that can be made in C++ can also be implemented with Blueprints. The main drawback is slower performance, due to the required translation. Complicated logic performed every frame should by implemented directly in C++.

Blueprints are great for quickly developing a program in an easy and visually appealing way. Sometimes a functionality which would require a long C++ code can be performed using only few nodes in Blueprint. Code made in this way is more fail-safe. For example, the engine prevents null pointer exceptions. Compiler shows a warning and does not run the problematic part of code, while the same thing in C++ would cause a run-time crash.

One area where the usage of Blueprints is especially useful is creating a GUI using the Unreal Motion Graphics UI Designer (UMG). Similarly to Blueprints, layout is made in a visual way. Every component, like a button or a slider is extension of the UUserWidget. Functionality then can be attached using Blueprints [UE4 Documents, 2019].

3.4 Point Clouds Rendering

Point cloud rendering is usually not a part of a default tool-set of any engine. Implementing such feature would take time and form a thesis on its own. Before the implementation, research about available plugins for UE had to be done.

3.5 Available Options

Two well developed plugins for UE capable of point cloud rendering currently exists. One of them is made by Valentino Craft and according to his website, it was made as his Master Thesis [Kraft, 2018]. Second one is developed by Michal Cieciura and after some testing, it is the one being used for purposes of this bachelor thesis. There are several reasons for this decision.

None of them provides a full, detailed documentation. But the one from Cieciura has a better structured, easier to understand (which can be subjective) code. Almost all methods and properties are commented. On the contrary, the first plugin named lacks comments completely. Functionality of the chosen plugin is more robust and provides useful methods, like several different rendering modes (single points, sprites, lit/unlit). Lastly, it is still in active development and supports the latest version of Unreal Engine 4. The one from Valentin was on the other hand last updated 4 months ago.

3.6 Point Cloud Plugin

Now we look at the plugin from Michal Cieciura in more detail. It is a fully open-source plugin. It supports loading point cloud in a .xyz or .txt file format, where each line describes a single point. When importing the point cloud in the editor, import wizard dialog appears with some settings available [Cieciura, 2018]. There are options to scale the point cloud by some factor, center it, change the rendering mode etc. However, all of this is available only in the editor window. Software developed in this thesis is opened from a standalone .exe, not as a UE project. Therefore, the import wizard is not utilized and we provide a custom run-time GUI instead.

After import, the point cloud lives in the system as an instance of UPointCloud class. There is also a structure for holding individual points and several other classes. Nevertheless, this plug-in merely provides a framework for displaying point clouds. Every specific functionality like dynamic import and export or manipulation with point cloud data is implemented in custom code.

4 Implementation

After describing all theoretical necessities, required technologies and expected functionalities, we can now describe the actual implementation process of the tool. However, it is not in the scope of this document to describe every class and method in great detail. We try to describe everything from a conceptual standpoint and make a summarized overview of entities and their relations within the system.

4.1 Class Structure

Trying to maintain an optimal class structure is the vital part of the development process. One of the major required functionalities is the ability to load-in any number of point clouds. This can be done in a numerous ways, but we settled on a structure with one parent object holding a list of scans attached to it. Developing this hierarchy brings a number of advantages and is also in accordance with the object reconstruction pipeline, where one object consists of multiple scans. We can either access each of loaded scans and edit them individually, or we can change the properties of the parent object with all child scans acting relatively to it. An example would be changing the position of the parent object with all attached scans moving accordingly.

If we want to instantiate a class in UE and place this object in the world, it must inherit from AActor base class [Sherif, 2015]. Actors can have multiple components attached to it, such as a camera or a mesh. To implement the behaviour mentioned above, we develop our own component class UPointCloudScan intended for holding a scan, inheriting the UPointCloudComponent from the plugin. It provides methods for operations like changing colors of points, applying transformations, deleting points or finding a point at specific coordinates. Last mentioned functionality together with a need to select points based on a ray-cast required a custom implementation of the octree. Point cloud data itself is represented by another structure containing individual points. Point coordinates are in a local system with the origin at the location of the parent object, which serves as an anchor. Aside from the location, structure for holding the point also contain additional data, such as normals.

After a class for individual scans was developed, we could make a parent intended for holding a TArray of those. In terms of UE, this is our main Actor. Since the Actor from the Point Cloud Plugin do not provide any useful functionality, we made this class from the ground up, inheriting only from the base AActor class. Besides holding the list of scans, it also has additional properties. It encloses all scans in a rectangular bounding box, which serves as a first way of telling whether user interacts with it. After a ray has been detected within this boundary, it serves as a delegate, deciding which of the child scan is affected and querying it. Additionally there are methods for actions like adding another scan, printing out the total number of points or coloring scans in random colors for an easier recognition (Fig. 7).

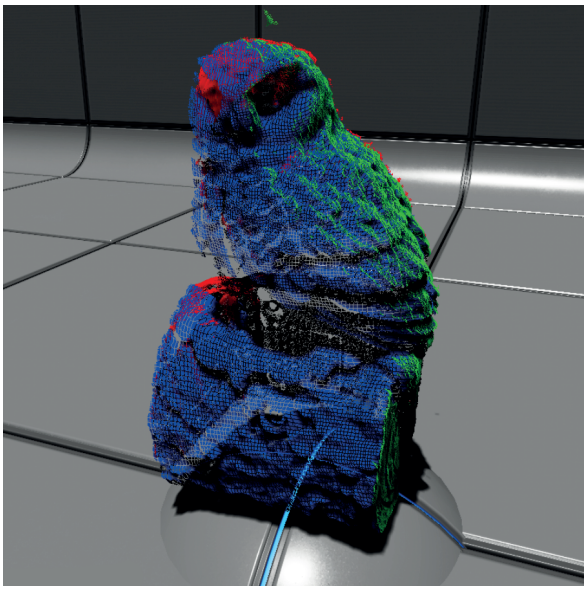


Figure 7: Color identification of individual scans.

Naturally, there are many more classes in our system, but the structure we described seemed like the most interesting one for a closer description and is visualized in the UML class-diagram (Fig. 8) (following the implementation of the octree later in this chapter).

4.2 File Formats

There are several formats used to store point clouds, both in binary or ASCII. PCD is used by the widely used Point Cloud C++ Library. There is also LAS, which was primarily developed for exchanging a Lidar point cloud data. Another popular formats include PLY and FBX, formats originally intended to store mesh data [Thomson, 2019].

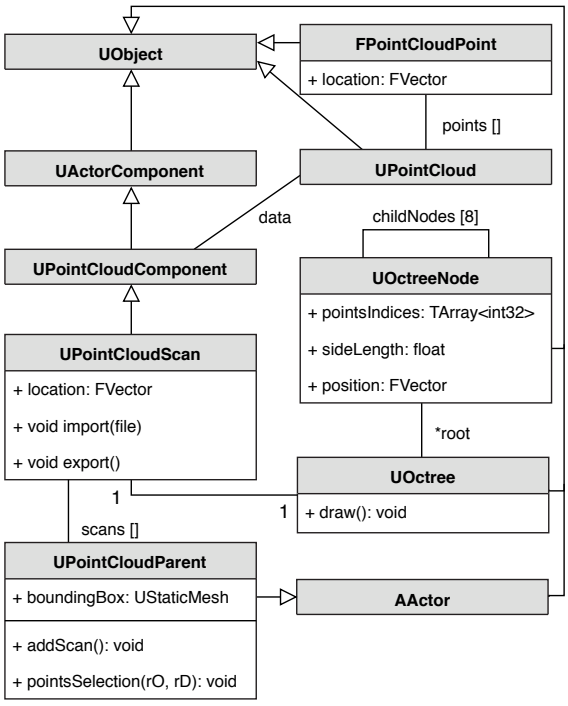


Figure 8: Simplified class-diagram of the software.

Point Cloud Plugin which we used for displaying point clouds is using a simple ASCII format and it recommends using either .xyz or .txt ending. Each point of a cloud is described by a single line with the minimum of 3 columns for each of the x, y, z coordinates, with optional 4 other columns for RGBA color values. A snippet (describing 3 colorless points) from this file looks like this:

```
0.11  0.18  0.5
0.36  0.26  0.22
0.13  0.42  0.22
```

The user can import any such file from a Content folder located in the root folder of the application. After he copies a file into this folder, it can be loaded from within the software by simply typing its name. To manage the import and export of these point cloud data files, we implemented class UPointCloudLoader with some static methods. These include helper functions like getting the list of files in the Content folder and determining a format of a file. To avoid any hiccups due to the loading during run-time, all files are preloaded at the start-up. This increases the start-up time and memory requirements, but significantly improves the performance. The user must wait only when he copies the point cloud data file into the Content folder during the run-time.

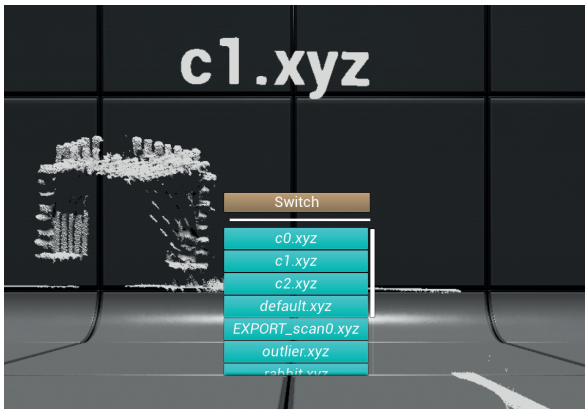


Figure 9: Previewing scans from the Content folder.

The tool in this bachelor thesis is being made with the intention of usage by a company Skeletex and it is important for us to support a proprietary format developed by this company. It is a robust container containing many other information about the point cloud in a binary form and a part of their C++ library COGS (Computer graphics structures) [Skeletex Codebase, 2019].

Developing a support for this format starts with the inclusion of the mentioned C++ library in our software. Building in UE is handled by a custom UBT (Unreal Build Tool) [UE4 Documents, 2019]. There is a PROJECT_NAME.Build.cs file in every UE project, where developer can include external libraries. Afterwards, we implemented a UCOGSPointCloud class, inherited directly from the UObject for a native support within UE. This class serves as an wrapper of the cogs::PointCloud format. We need a temporary conversion from this format to structures we use for displaying the point cloud. This class encapsulates all the required methods for doing so and can be considered as an adapter.

Finally, we wanted a quick way to inspect all point clouds in the Content folder. For this purpose there is a APointCloudPreview class. User can walk up to the instance of this class inside of the virtual world and look through all scans that were preloaded at the start-up. There is a hovering text with the file name of the given scan (Fig. 9). In this inspection mode, the point cloud can only be seen as it is. After the user picks the desired scan, it can then by loaded for modification.

4.3 Octree and Ray Intersection

We described the theory and a general idea of using the octree with ray-intersection algorithms to select the point and its neighborhood in the second chapter. From an implementation point of view, we develop a custom octree class suited to work with our representation of point cloud and the required algorithms.

Custom octree class UOctree derives from UObject directly, because it does not need additional functionality of the AActor and is never placed in the world on its own. Each instance of UPointCloudScan has an instance of UOctree as its property. After a new point cloud data is imported, UPointCloudScan calls an initialization method of the Octree which in pseudo-code looks like this:

```
void Initialize(UPointCloudScan* s)
{
    float minE = s->ScanMinExtent();
    float maxE = s->ScanMaxExtent();
    float c = (minEt + maxE) / 2;
    Vector pos = Vector(c, c, c);

    root = NewObject<UOctreeNode>();
    root->parentScan = s;
    root->position = pos;
    root->size = maxE - minE;
    int32 n = s->NumberOfPoints();
    root->pointIndices = range(0...n);
    int32 minPoints = Max(32, n/100);
    root->Subdivide(minPoints);
}
```

To start out, we need to determine the position and the size of the cube enclosing all points, which will be represented by the root node. A perfectly fitting box with a minimum volume would be cuboid-shaped most of the time. But we are looking for a cube that will include all points, even if it is a little bigger than necessary. We do this by a very simple algorithm, which worked well on most of our data.

We start the calculation by looking at the minimal and maximal extent of the scan, which practically means traversing all points and finding the minimal/maximal coordinate at any of the three axes. From this we calculate the center of the bounding cube simply as the midpoint between these two. The side length will be then equal to the difference between the maximal and minimal extent ($maxE >= minE$ always holds true). Since locations $Q1$ and $Q2$ where $Q1$ has coordinates $(minE, minE, minE)$ and $Q2$ $(maxE, maxE, maxE)$ are both covered by the cube, every other point of the cloud is included as

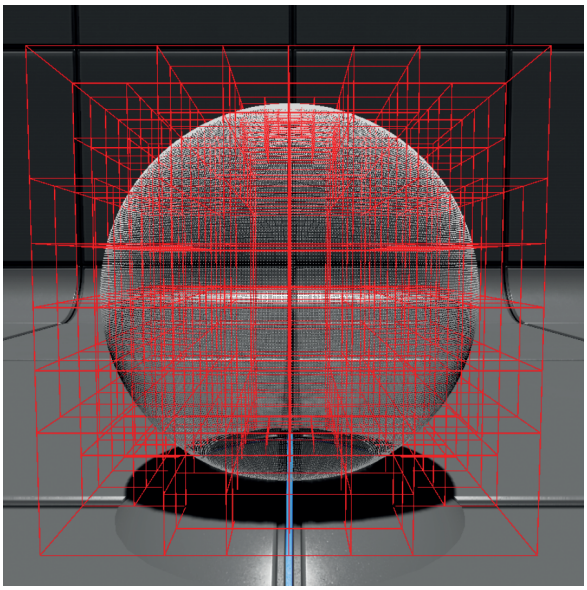


Figure 10: Visualization of the octree on a regular point cloud of a sphere.

well. If there was some point with any of its coordinates bigger than *maxE* or smaller than *minE*, this value would be picked in the first part of the algorithm. We can therefore conclude, that this bounding box truly contains all the points.

Afterwards, we create an instance of UOctreeNode and assign it to a root variable of this UOctree. We set its center position, side length and also give it a reference to the parent scan, which passed itself in the argument. We implemented it in this way, because the node does not hold a list of points, but just a list of their indices. This is memory efficient and also prevents error with accidental duplication of some points. The node must therefore have a reference to its parent scan, so it can access points and their locations if needed.

Finally a number of minimum points for a node to split up is counted as either one hundredth of all points or 32 for sparse scans. Root node then calls the subdivision method on itself. The subdivision is a definitive process as described in the theory chapter. At first we check if the current node contains at least the minimum amount of points, if not, the subdivision for this branch ends. Otherwise we create 8 child nodes with respective center locations and halved side length and distribute points depending on their locations. Subdivision process recursively continues for all children nodes, until the whole octree is

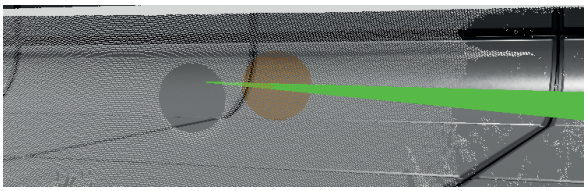


Figure 11: Selection of neighborhood (orange) using a ray-cast (green) with some deleted points (circle).

constructed. Octree bounding boxes of each individual scan can be visualized (Fig. 10).

Implementing the two ray-intersection algorithms was straight forward using the equations from the second chapter. They are both implemented as methods of UOctreeNode.

```
bool IsNodeIntersected
(Vector rO, Vector rD);
bool IsPointIntersected
(Vector rO, Vector rD, Vector p);
```

The first method checks if the actual node was hit by the ray with origin *rO* and direction *rD*. Second method additionally takes a location of a given point *p*. The point itself does not need to be contained by the cube of this node, so this method is more universal.

After we developed individual pieces, we can join them all up together. After user input is registered and the ray is cast, we take its origin location (converted from the world space to local coordinates of the point cloud actor) and its normalized directional vector. Using ray-box intersection algorithm we determine if the root cube was hit. If yes, the program starts a recursive process down the octree and gather all intersected leaf nodes. We then order them by their distance from the origin of the ray. Starting with the one closest to the origin, we iterate through them and check for a point hits in a similar closest-first fashion. After we find a first intersected point, the recursion terminates and the operation ends by selecting this point and its neighborhood. Selected points are highlighted in orange (Fig. 11).

Aside from selecting points by ray-casting, user can also manually enter coordinates of a location to be selected. These coordinates have an origin at the location of the parent object holding all scans, therefore they are in the same coordinate system as points locations. We implemented two different algorithms and the user picks which one to use by a button click. Simpler one of the two finds all leaf nodes across

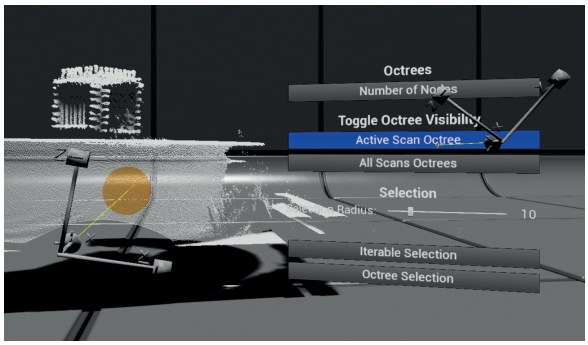


Figure 12: Screenshot of the user interface.

all scans that contain the given location and select all points within them. However, this effectively selects small cubes of points rather than a neighborhood. The more complicated scenario is to find nearest neighbors of the given location. We mentioned why this is not so straight-forward using the octree in the subchapter 2.3.

4.4 User and the Interface

The AUser class manages everything related to the control over the program. Functions like changing the position of the camera, ray-casting and interacting with the graphical user interface are available both with the mouse and keyboard and motion controllers at the same time. There is a button to switch between displaying the context into the head mounted display or to the monitor.

As a reader can see in Fig. 12, there is an interactive panel next to the scan, which is statically positioned in the world according to the metaphor mentioned in the GUI in Virtual Reality subchapter. Hands of the user are displayed as simple axis guides with the left hand selecting points of the scan and the right hand controlling the interface.

All functions of the software are available to the user through these UI panels. There are 3 of them, each containing a group of similar actions. On the File panel, user can do actions like importing and exporting point cloud data, toggling visibility of individual scans or printing out point counts. On the edit panel user can translate scans, highlight them in colors, delete selected points, as well as change the quality of rendering to gain performance. Lastly, select panel contains elements for activating the visualization of octrees, changing the selection radius and selecting points based on the given coordinates.

A notable method of the AUser class is the void AUser::Tick(float DeltaTime), which is called every tick of the program. It handles the movement of the user and the visualization of motion controllers and their directional vectors. To maintain a same rate of movement across all devices with possible varying tick intervals, we use the DeltaTime attribute, representing the amount of microseconds since the last tick occurred. It allows us to scale the velocity of the user accordingly.

5 Results and Conclusion

We started this document by describing the theory behind designs, structures and algorithms used in the developed tool. Afterwards we presented a general overview of the Unreal Engine 4, which is the backbone technology. In the implementation chapter, we described the process of making the point cloud processing software. This tool is currently still in development as a part of author's bachelor thesis. We are still looking for ways to improve its functionality. As a result, it may be used in the object reconstruction pipeline and for processing point cloud data in VR.

Acknowledgments

I would like to thank my supervisor Martin Madaras for all his help and advice during the development of this work. Additionally, thanks to my friends, family, mom and my loving girlfriend for endless support.

References

[Arya et al., 1998] Arya, S., Mount, D., Netanyahu, N., Silverman, R., and Wu, A. (1998). An optimal algorithm for approximate nearest neighbor searching fixed dimensions. *Journal of the ACM*, 45(6).

[Ballantine and Jerbert, 1952] Ballantine, J. P. and Jerbert, A. R. (1952). Distance from a line, or plane, to a point. *The American Mathematical Monthly, JSTOR*, 59(4):242–243.

[Berger et al., 2016] Berger, M., Tagliasacchi, A., Seversky, L., Alliez, P., Guennebaud, G., Levine, J., Sharf, A., and Silva, C. (2016). A survey of surface reconstruction from point clouds. *COMPUTER GRAPHICS forum*.

[Cieciura, 2018] Cieciura, M. (2018). Point cloud plugin. `https://pointcloudplugin.com/`.

[Cignoni, 2009] Cignoni, P. (2009). *Meshing Point Clouds*.

[Elseberg et al., 2012] Elseberg, J., Magnenat, S., Siegwart, R., and Nuchter, A. (2012). Comparison on nearest-neighbour-search strategies and implementations for efficient shape registration. *Journal of Software Engineering for Robotics*.

[Kingsford, 2019] Kingsford, C. (2019). *Bioinformatics Lectures, Computer Science Background, Interval & Spatial Data Structures*. Carnegie Mellon University, School of Computer Science, United States.

[Kopciak, 2015] Kopciak, P. (2015). Virtual reality user interface design for first person games using head mounted display technology. Austria. St. Pölten University of Applied Sciences.

[Kraft, 2018] Kraft, V. (2018). Gpu pc renderer for unreal. `http://www.valentinkraft.de/`.

[Levoy and Whitted, 1985] Levoy, M. and Whitted, T. (1985). The use of points as a display primitive. Technical Report 85-022, Computer Science Department, University of North Carolina at Chapel Hill, United States.

[Noland, 2014] Noland, M. (2014). Unreal property system (reflection). `https://www.unrealengine.com/en-US/blog/unreal-property-system-reflection`.

[Sajedi et al., 2008] Sajedi, A., Mahdavi, M., Pourshirmohammadi, A., and Nejad, M. (2008). Fundamental usability guidelines for user interface design. In *International Conference on Computational Sciences and Its Applications*, pages 106–113.

[ScratchPixel 2.0., 2019] ScratchPixel 2.0. (2019). A minimal ray-tracer: Rendering simple shapes. `https://www.scratchapixel.com`.

[Sherif, 2015] Sherif, W. (2015). *Learning C++ by Creating Games with UE4*. Packt Publishing Ltd., United Kingdom, Birmingham.

[Skeletex Codebase, 2019] Skeletex Codebase (2019). Cogs namespace. `https://skeletex.xyz/doc/namespacecogs.html`.

[Thomson, 2019] Thomson, C. (2019). Common 3d point cloud file formats & solving interoperability issues. *Vercator Blog*.

[UE4 Documents, 2019] UE4 Documents (2019). Unreal engine 4 documentation, wiki and api. `https://unrealengine.com/`.

[Williams et al., 2005] Williams, A., Barrus, S., Morley, K. R., and Shirley, P. (2005). An efficient and robust ray-box intersection algorithm. In *SIGGRAPH '05 ACM*, United States. University of Utah.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 122–126
ISBN 978-8081470936, © 2019 Róbert Sarvaš

Sledovanie rozostrených objektov spôsobené rýchlym pohybom

Róbert Sarvaš[1]*

Školiteľ: RNDr. Zuzana Černeková, PhD.[2]†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: Sledovanie a segmentácia objektu z videa patrí medzi najviac využívané video postprocessing metódy nie len pre filmový priemysel, ale aj v odvetviach počítačového videnia. Pri riešení problému oddelenia popredia od pozadia, narážame aj na problémy hardvérovej limitácie snímania videa. Medzi známe nežiadúce efekty vznikajúce limitáciou hardvéru patria aj degradácie obrazu ako šum, rozmazanie pohybom (ang.motion blur), preexponovaný alebo podexponovaný obraz, rôzne farebné oklúzie spôsobené inými objektami, skreslenie spôsobené objektívom a ďalšie.

V nasledujúcom článku sa zameriavame na segmentáciu aj takých objektov, ktoré môžu byť rozostrené rýchlym pohybom. Navrhli sme poloautomatickú metódu skladajúcu sa z vytvorenia masky objektu na akejkoľvek snímke vo videu pomocou metódy GrabCut, nasledného použitia OSVOS (One-Shot Video Object Segmentation) konvolučnej neurónovej siete na najdenie objektu na ostatných snímkach videa a alpha matting metódy (konkrétne KNN matting) pre zvýšenie presnosti segmentácie objektu na okrajoch a detekcie a segmentácie možného rozmazania objektu spôsobeného rýchlym pohybom.

Kľúčové slová: foreground extraction, motion blur, detection, segmentation, Grab-Cut, OSVOS, KNN matting, alpha matting

1 Prehľad problematiky

V odbornej literatúre existuje pár riešení blízkych danému zadaniu, a mnoho riešení ktoré čiastočne riešia danú úlohu.

Najbližším riešením z množiny poloautomatických metód je Video Snapcut [Bai et al., 2009]. Robustný systém na segmentáciu objektu z videa, ktorý je založený na vytváraní takzvaných klučových snímok, na ktorých segmentujeme objekt z danej snímky videa. Následne sa vytvorí sada lokálnych klasifikátorov, nachádzajúcich sa na hranici popredia a pozadia v tvare štvoruholníka, a každý extrahuje lokálne obrazové príznaky. Nasleduje dopredná propagácia lokálnych príznakov a segmentovania objektu na nasledujúcom snímku videa. Systém je adaptívny, umožňuje vytvárať ďalšie klúčové snímky a tak upresniť aj lokálne klasifikátory pre výpočet popredia na snímkach, ktoré sú neklúčové. Tento systém je poloautomatický, a teda vyžaduje vstup od používateľa, zároveň ale dokáže dobre segmentovať objekty, ktoré môžu obsahovať vyššie uvedené defekty ako napríklad preexponový alebo podexponovaný obraz, farebné oklúzie, rozmazanie pohybom.

Úloha automatického segmentovania objektu z videa je dnes veľmi populárna a existuje viacero jej riešení.V roku 2017 dosiahli najlepšie výsledky v danej problematike techniky Masktrack [Perazzi et al., 2017] a OSVOS [Caelles et al., 2017]. Obe metódy sú založené na konvolučných neurónových sieťach a existuje viacero ďalších prác od týchto autorov, v ktorých spájajú tieto techniky s ďalšími neurónovými sieťami, ktoré rozpoznávajú sémantickú informáciu o objektoch záujmu a znižujú tak nároky na vstupné parametre. OSVOS metóda posunula výsledky v problematike na 79,8% z 68% ak máme na vstupe jednu snímku s maskou objektu. Pri štyroch maskách pre štyri snímky je presnosť metódy až 86,9%.

2 Návrh riešenia

V nasledujúcej kapitole popíšeme 3 metódy, ktoré používame na segmentáciu objektu z videa.

2.1 Grabcut

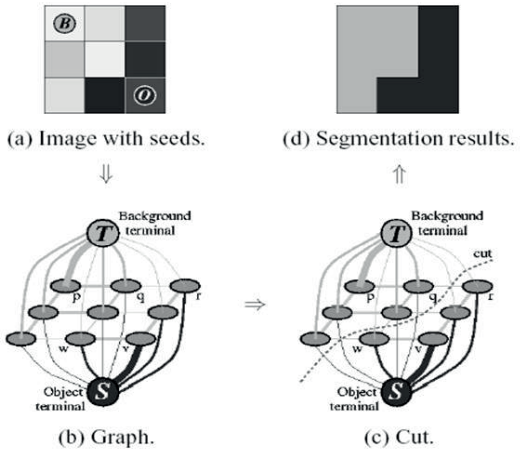
Metóda GrabCut bola navrhutá z dôvodu presnej segmentácie aj v prípadoch, kedy sa popredie a pozadie podobajú farbou, intenzitou alebo textúrou. Technika vychádza z metódy GraphCut. GraphCut je založený na hľadaní optimálneho rezu grafu. V prvom kroku sa obrázok prevedie na graf G(V,E), kde V je množina vrcholov a E je množina hrán. Graf je plne prepojený, to znamená, že každý vrchol je prepojený zo všetkými ostatnými. Vrcholy zodpovedajú pixelom a hrany reprezentuju susednosť medzi pixe-

*sarvas5@uniba.sk
†cernekova@fmph.uniba.sk

lami. V grafe sa hľadá optimálny rez grafu. Optimálny v tomto prípade znamená, že rez spĺňa podmienky podobnosti. Tými môžu byť vzdialenosť pixlov, farebná podobnosť pixlov, podobnosť intenzity pixlov, textúra a ďalšie. Rez Grafu (ang. Graph Cut) je teda množina hrán, ktorých odstránením vznikne graf z niekoľkými komponentami. Existuje mnoho typov rezov grafu, my sa budeme bližšie venovať ST minimálnemu rezu (ang. the st min cut). V grafe existujú ešte ďalšie dva vrcholy, jeden znamená popredie a druhý pozadie, každý vrchol grafu je prepojený s týmito dvoma vrcholmi. Hodnota hrán medzi vrcholmi, v našom prípade pixelmi, a popredím alebo pozadím, sa vypočítava ako pravdepodobnosť kam patrí. Hodnota ST minimálneho rezu je teda globálna minimálna hodnota súčtu hodnôt hrán, ktoré pre rozdelenie grafu na komponenty musíme odstrániť. Takáto hodnota sa volá funkcia energie a bola zadefinovaná takto:

$$E(\alpha,\theta,z) = U(\alpha,\theta,z) + v(\alpha,z), \tag{1}$$

kde α je priehľadnosť, z sú dáta (v našom prípade hodnota intenzity pixlu), U vyhodnocuje prispôsobenie rozdelenia priehľadnosti α pre dáta z, V je hladkosť, ktorá vyhodnocuje nerovnováhu medzi susednými hodnotami. Ukážku segmentácie popredia a pozadia pomocou GraphCut metódy je zobrazená na obrázku Obr.1.[Boykov and Jolly, 2001]



Obr. 1: Ukážka vyriešenia segmentácie popredia od pozadia na obrázku pomocou GraphCut metódy. [Boykov and Jolly, 2001]

2.1.1 Grabcut algoritmus

Metóda Grabcut je rozšírením metódy Graph cut na farebné obrazy. Je to iteratívna graph-cut segmentácia používajúca Gaussovské zmiešané modely (ďalej len GMM).

Inicializácia

Používateľ vytvorí štvoruholník R okolo objektu záujmu na obrázku a nasledne sa inicializuje trimap $T(T_F, T_U, T_B)$, $T_U = R$, $T_F = \emptyset$ a $T_B = T_U^c$. $A_n = 0$, $n \in T_B$ a $A_n = 1$, $n \in T_U$. GMM pre popredie a pozadie sa inicializujú z množín $A_n = 0$ a $A_n = 1$.

Iteratívna minimalizácia

1. Priradť GMM komponenty pixelom: Pre každé $n \in T_U$

$$K_n := \arg\min_{k_n} D_n(\alpha, k_n, \theta, z_n) \tag{2}$$

2. Vypočítaj GMM parametre z dát z

$$\theta := \arg\min_{\theta} U(\alpha, k, \theta, z) \tag{3}$$

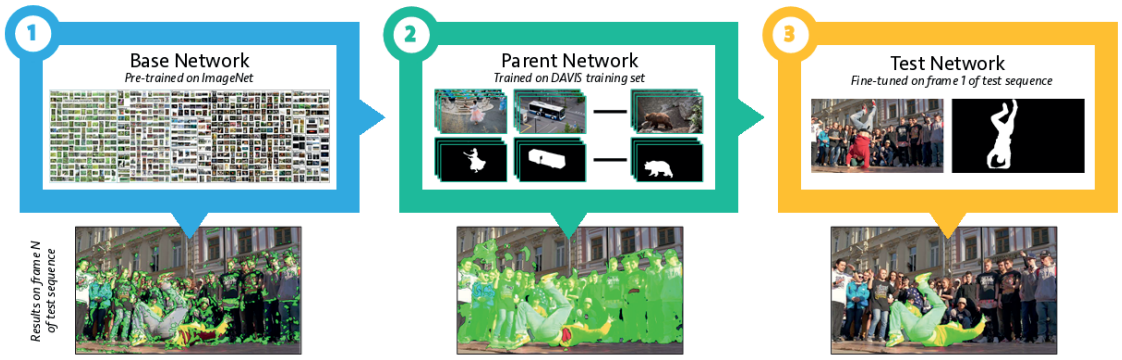
3. Odhadni segmentáciu, použi min-cut na vyriešenie:

$$\min_{\alpha_n:n\in T_u} \min_{k} E(\alpha, k, \theta, z) \tag{4}$$

4. Opakuj od kroku 1, kým riešenie nekonverguje.[Rother et al., 2004]

2.2 One Shot Video Object Segmentation - OSVOS

OSVOS (ang. One-Shot Video Object Segmentation) - sú iniciály techniky, ktoré by sme mohli preložiť ako segmentácia videa na zaklade jedného snímku s vyznačením objektom. Ide o automatickú techniku segmentácie objektu z videa, založenú na FCNN - plne konvolučnej neurónovej sieti. Táto technika dokáže uspešne preniesť generickú sémantickú informáciu, naučenú na ImageNet sieti, na úlohu segmentácie popredia, a nakoniec k naučeniu vzhľadu objektu na základe jedného snímku z videa, v ktorom je vyznačený objekt. Napriek faktu, že všetky snímky videa sú spracovávané nezávisle od seba, výsledky sú súvislé a stabilné. Metóda vylepšuje výsledky práce v danej problematike o významnú hodnotu 79,8% oproti 68%.[Caelles et al., 2017] Model OSVOS siete možeme vidieť na obrázku 2.



Obr. 2: Prehľad OSVOS modelu. 1. Zakladná vrstva sieti 2. Rodičovská vrstva 3. testovacia vrstva [Caelles et al., 2017]

2.2.1 OSVOS - Trénovacie detaily

Základná konvolučná sieť architektúry OSVOS je predtrénovana na ImageNet sieti ktorá rozpoznáva objekty. Autori OSVOS pretrénovali túto sieť na Davis Datasete, k naučeniu generickej informácie ako segmentovať objekt od pozadia, jeho zvyčajnych tvarov atď. Použili Stochastický Gradientný zostup (SGD) s momentom 0.9 pre 50 000 iterácii. Augmentovali dataset pomocou zrkadlenia o priblíženia. Uroveň učenia (learning rate) je nastavená na 10na8, a je znižovaná. Po tomto tréningu, sieť je naučená extrahovať popredie z pozadia. S dostupnou rodičovskou sieťou, ktorá dokáže extrahovať popredie z pozadia, môžeme prejsť na poslednú testovaciu sieť. Úlohou je segmentovanie konkrétneho objektu vo videu, ak máme k dispozícii jeden snímok a k nemu odpovedajúcu presnú masku. Pokračujeme v ďalšom trénovaní materskej siete pre konkrétny obraz a masku a nasledné testovanie na celej sekvencii s použitím nových váh.[Caelles et al., 2017]

2.3 Od Motion blur k Alpha Matting

Matting si kladie za cieľ extrahovať objekt z obrazu tak aby započítaval zlomkové hodnoty priehľadnosti pixlov popredia. Vo väčšine prác zaobrajúcich sa touto témou, sa predpokladá že objekt v popredí je statický a čiastočná priehľadnosť vzniká z len čiastočného pokrytia pixlu objektom popredia, takže farba pixlu je vytvorená ako kombinácia popredia a pozadia. Príkladom môže byť prameň vlasov, ktorý je často príliš tenký aby úplne pokryl pixel a tak je farba pixelu zložením farby prameňa vlasov a pozadia. Ďalším zdrojom čiastočnej priehľadnosti je rozmazanie objektu spôsobené pohybom.V tomto prípade je pixel obsadený objektom popredia len časť expozičného času, a pozadím po zvyšok expozičného času. [Myeong et al., 2014]

Alpha matting odkazuje na problém rozdelenia obrázku na popredie a pozadie, čo je konvexnou kombináciou na obraze:

$$I = \alpha * F + (1 - \alpha) * B, \tag{5}$$

kde I je daná farba pixlu, F je neznáme popredie, B je neznáme pozadie, a α je neznáma hodnota priehľadnosti.

2.4 KNN Matting

KNN matting vychádza z nelokálneho princípu, čo znamená že pre pixely zdieľajúce rovnaký vzhľad sa očakáva že budú zdieľať rovnakú hodnotu priehľadnosti. Podľa tohto predpokladu, vytvoríme príznakový vektor $X(i)$ na pixeli i je definovaný ako

$$X(i) = (cos(h), sin(h), s, v, x, y)i \tag{6}$$

kde h, s, v su príslušné súradnice HSV farebného priestoru a (x,y) sú priestorové súradnice pixelu i. Príznakový vektor je ľahko rozšíriteľný aj do iného farebného priestoru.Vo vektorovom priestore nájdeme K-najbližších susedov pre daný pixel (v našom prípade 10). Funkcia jadra

$$k_{(i,j)} = 1 - \frac{\| X_{(i)} - X_{(j)} \|}{C} \tag{7}$$

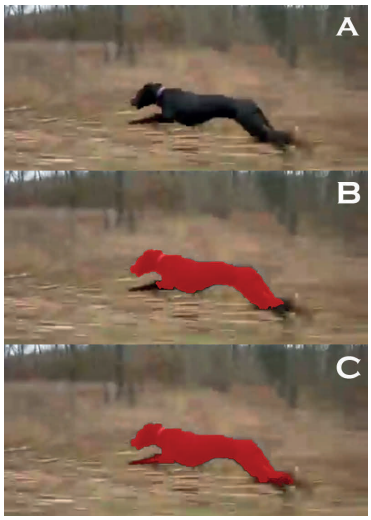
sa používa na reprezentovanie afinity medzi dvoma pixlami, kde C je najmenšia horná hranica $\| X_{(i)} - X_{(j)} \|$. [Jin et al., 2013]

3 Výsledky

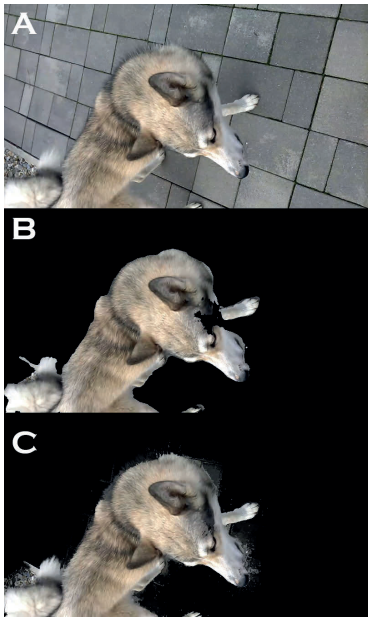
Keďže k detekcii rozmazania objektu pohybom na videu neexistuje dataset, vytvoril som vlastný dataset obsahujúci rôzne objekty so zameraním na rôznorodosť videí a rôznorodosť podmienok segmentácie. Na obrázku Obr.4 v časti a.) môžeme vidieť snímku kde popredie od pozadia môže byť ľahko oddelené na zaklade farebnej zložky, zároveň je to ale snímka so silnou degradáciou informácie spôsobenou rozmazaním pohybom. Na obrázku Obr.5 v časti a.) môžeme vidieť farebnú podobnosť popredia a pozadia. Na obrázku Obr. 6 v časti a.) môžeme vidieť uniformnosť pozadia. Medzi ďalšími testovacími videami sú videá objektov pohybujúcich sa pred takzvanou "zelenou stenou", korá sa používa najmä pri VFX efektoch vo filmovom priemysle. Videá s rôznou expoziciou, s pohybom kamery alebo len pohybom objektu vo videu a ďalšie. Segmentácia objektu pomocou metódy OSVOS zlyháva pri niektorých snímkach na ktorých je silné rozmazanie pohybom. Môžeme to vidiť na obrázku Obr. 3 na druhej a tretej snímke zľava.Kde je červenou farbou vyznačená maska naučená OSVOS technikou, a na týchto snímkach nepokrýva celý objekt.

Obr. 3: Na sekvencií snímok môžeme vidieť masku segmentácie OSVOS technikou pre 1000 iterácii učenia. [Caelles et al., 2017]

Na obrázku Obr.4 môžeme vidieť bližšie tretí snímok z obrázku Obr.3 na ktorom je najvýraznejšia chyba segmentácie OSVOS metódy. Je vidieť že použitím KNN mattingu, v časti c sme zlapšili segmentáciu popredia.

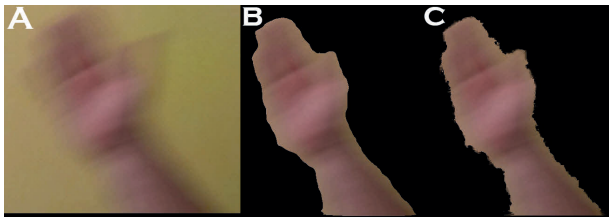


Obr. 4: Segmentácia OSVOS vs KNN matting. Kde A) je pôvodná snímka videa B) segmentácia po OSVOS metóde C) upravenie masky pomocou KNN matting metódy



Obr. 5: Vysledok segmentovania A) pôvodný snímok videa B) segmentácia po OSVOS metóde s 200 iteráciami učenia sa masky objektu. C) Vysledok po KNN matting metóde

Na obrázku Obr.5 môžeme vidieť, že metóda OSVOS zle segmentovala časť hlavy psa, vďaka KNN mattingu sa segmentácia napravila. Takisto sa pri danom obrázku zlepšila segmentácia srsti zvieraťa.



Obr. 6: Vysledok segmentovania A) pôvodný snímok videa B) segmentácia po OSVOS metóde s 200 iteráciami učenia sa masky objektu. C) Vysledok po KNN matting metóde

Na obrázku Obr.6 môžeme vidieť segmentáciu ruky rozmazanej pohybom. KNN matting odstránil pixely veľmi blízke pozadiu.

4 Záver

V tomto článku sme sa venovali segmentácii objektov, ktoré môžu byť rozostrené rýchlym pohybom. Navrhli sme poloautomatickú metódu skladajúcu sa z vytvorenia masky objektu na akejkoľvek snímke vo videu pomocou metódy GrabCut, nasledného použitia OSVOS konvolučnej neurónovej siete na najdenie objektu na ostatných snímkach videa a KNN matting metódy pre zvýšenie presnosti segmentácie objektu na okrajoch. Naše výsledky ukazujú, že v niektorých prípadoch KNN vylepšilo segmentáciu objektu získaného metódou OSVOS. V ďalšom výskume chceme vyskúšať vylepšiť vytváranie trimapu, ktorý je vstupom pre KNN matting a tak výrazne vylepšiť segmentáciu KNN mattingu pre popredie a pozadie. Ďalším krokom je použitie metódy border matting pre zjemnenie hranice objektu.

Literatúra

[Bai et al., 2009] Bai, X., Wang, J., Simons, D., and Sapiro, G. (2009). Video snapcut: robust video object cutout using localized classifiers. In *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, volume 28, page 70. ACM.

[Boykov and Jolly, 2001] Boykov, Y. Y. and Jolly, M.-P. (2001). Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in nd images. In *Proceedings eighth IEEE international conference on computer vision. ICCV 2001*, volume 1, pages 105–112. IEEE.

[Caelles et al., 2017] Caelles, S., Maninis, K.-K., Pont-Tuset, J., Leal-Taixé, L., Cremers, D., and Van Gool, L. (2017). One-shot video object segmentation. In *CVPR 2017*. IEEE.

[Jin et al., 2013] Jin, M., Kim, B.-K., and Song, W.-J. (2013). Knn-based color line model for image matting. In *2013 IEEE International Conference on Image Processing*, pages 2480–2483. IEEE.

[Myeong et al., 2014] Myeong, H., Lin, S., and Lee, K. M. (2014). Alpha matting of motion-blurred objects in bracket sequence images. In *European Conference on Computer Vision*, pages 125–139. Springer.

[Perazzi et al., 2017] Perazzi, F., Khoreva, A., Benenson, R., Schiele, B., and Sorkine-Hornung, A. (2017). Learning video object segmentation from static images. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 2663–2672.

[Rother et al., 2004] Rother, C., Kolmogorov, V., and Blake, A. (2004). Grabcut: Interactive foreground extraction using iterated graph cuts. In *ACM transactions on graphics (TOG)*, volume 23, pages 309–314. ACM.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 127–135
ISBN 978-8081470936, © 2019 Matúš Juran

Supplementary Information and Transducers

Matúš Juran*

Supervisor: Branislav Rovan†

Department of Computer Science, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstract: This paper is part of the research on various aspects of the notion of information. Supplementary information (advice) may reduce the complexity of solving a problem in some cases. The notion of usefulness of supplementary information was studied in the finite automata setting and in the deterministic push-down automata setting. In this paper, we study the possibility of exploiting supplementary information in finite transducers setting. The notion of advice is formalized as a regular language which the transducer transforms to a different regular language. We consider the advice to be useful if the transducer requires fewer states than it would require to transform the language of all strings over the input alphabet. This approach can be used with either deterministic or nondeterministic transducer as a computational model. We define families of languages for which useful advice exists and show particular languages that belong to these families. We compare these families to the families defined by decomposability of automata studied earlier and study their closure properties. We show that some modifications of the advice can affect its usefulness. We also study the families defined by a fixed advice language.

Keywords: supplementary information, transducers, state complexity, regular languages

1 Introduction

The notion of usefulness of information was studied in several previous works at the Department of Computer Science of the Comenius University. The problem was formalized as constructing an automaton accepting a language L and supplementary information was formalized as a guarantee that every input word shall belong to a regular language L_{adv}. The information was considered useful if after taking the guarantee into account, a new automaton accepting L could be constructed and the descriptional complexity of both the new automaton and the advice language was lower than the descriptional complexity of the language L. This process can be also viewed as constructing two simpler automata such that the intersection of the languages recognized by them is the original language L. However, being able to only perform an intersection means that the advice language needs to be a superset of the desired language. Besides intersection with a regular language, transducers can also apply homomorphisms and inverse homomorphisms. In this paper, we shall define and study a new approach using finite transducers and show similarities and differences to the existing settings using finite automata as models of computation.

*juran7@uniba.sk
†rovan@dcs.fmph.uniba.sk

2 Preliminaries

Transducers are models of computation used to transform languages. In general, they can be viewed as finite automata augmented with an output function. The models we shall use are modifications of the *sequential transducer* defined by Ginsburg. [Ginsburg, 1966]

Definition 1. *A deterministic sequential transducer is a 6-tuple $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ where K is a finite set of states, Σ_1 is the input alphabet, Σ_2 is the output alphabet, q_0 is the initial state, F is the set of accepting states and $H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times K$ is a transition relation. H must also fulfil the following conditions:*

1. *If $(q, c_1, c_2, p_1) \in H$ and $(q, c_1, c_3, p_2) \in H$, then $c_2 = c_3$ and $p_1 = p_2$*
2. *If $(q, \varepsilon, c_1, p_1) \in H$ and $(q, c_2, c_3, p_2) \in H$, then $c_2 = \varepsilon, c_1 = c_3$ and $p_1 = p_2$*
3. *There does not exist a sequence of states $q_1, \ldots, q_n$ and a sequence of symbols $c_1, \ldots, c_{n-1}$ such that $q_1 \in F, q_n \in F$ and $\forall i \in \{1, \ldots n-1\}$: $(q_i, \varepsilon, c_i, q_{i+1}) \in H$*

If ε can be read in some state, no alphabet symbol may be read in this state. Moreover, for every state and input symbol, the next state and the output are uniquely determined. This is comparable to the way determinism is achieved for deterministic pushdown

automata, which is described in [Rovan and Forišek, 2013]. Without rules of the form (q, ε, c, p), it would be impossible to produce an output word longer than the input word. The condition 3. is required to guarantee there shall be at most one accepting computation for any input word. Due to this condition, it can be assumed that the computation shall halt once the entire input is read and an accepting state is reached. At most one symbol can be read and written at a time in order to achieve state complexity comparable to that of finite state automata.

Definition 2. *A configuration of a transducer is a 3-tuple (q,u,v), where q is a state, $u \in \Sigma_1^*$ is the remaining input and $v \in \Sigma_2^*$ is the content of the output tape.*

Definition 3. *A computation step of a transducer is a relation $\vdash$ on the set of configurations such that $(q_1,cu,v) \vdash (q_2,u,vd)$ if and only if $(q_1,c,d,q_2) \in H$.*

We shall also consider the nondeterministic variant of transducers.

Definition 4. *A nondeterministic sequential transducer is a 6-tuple $M = (K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$ where K,Σ_1,Σ_2,q_0 and F are interpreted the same way as for deterministic transducers and H is a subset of $K \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times K$ without any further restrictions. A configuration and a computation step are defined the same way as for deterministic transducers.*

Definition 5. *The image of a language L is defined by $M(L) = \{w \mid \exists q_F \in F\ \exists u \in L : (q_0,u,\varepsilon) \vdash^* (q_F,\varepsilon,w)\}$.*

The concept of decomposing a finite automaton A into two simpler automata A_1 and A_2 was studied by Gaži [Gaži and Rovan, 2008] and Sádovský [Rovan and Šimon Sádovský, 2018]. This process can also be viewed as constructing an automaton accepting a language L with a supplementary information that every input word will belong to a language L_{adv}.

We shall denote the number of states of a transducer M by $\#_S(M)$. The same notation shall be used to denote the number of states of a finite automaton.

Definition 6. *Deterministic state complexity of a regular language L is defined as $sc(L) = min\{\#_S(A) \mid L(A) = L\}$ where A is a finite state automaton. Nondeterministic state complexity is defined similarly and denoted by $nsc(L)$.*

Definition 7. *A regular language L is decomposable if there exist languages L_1 and L_2 such that $L = L_1 \cap L_2$, $sc(L_1) < sc(L)$ and $sc(L_2) < sc(L)$.*

Definition 8. *A regular language L is nondeterministically decomposable if there exist languages L_1 and L_2 such that $L = L_1 \cap L_2$, $nsc(L_1) < nsc(L)$ and $nsc(L_2) < nsc(L)$.*

In this paper, we shall be concerned with using the supplementary information in a different way. Given a regular lanugage L and an advice L_{adv}, we shall be interested in whether there exists a simpler (in terms of state complexity) transducer that can transform L_{adv} into L.

Definition 9. *Transducer state complexity of a language L is defined as $tsc(L) = min\{\#_S(M) \mid M(\Sigma_L^*) = L\}$ where M is a deterministic sequential transducer. For nondeterministic sequential transducers, state complexity of language L is defined in the same way and denoted by $ntsc(L)$.*

Definition 10. *Let L_{adv} be a regular language. The family $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ is defined as $\mathscr{L}_D(L_{adv}) = \{L \mid sc(L_{adv}) < tsc(L), \exists M : M$ is a deterministic sequential transducer, $M(L_{adv}) = L$, $|\Sigma_{L_{adv}}| \leq |\Sigma_L|$, $\#_S(M) < tsc(L)\}$ and the family $\mathscr{L}_N(L_{adv})$ is defined as $\mathscr{L}_N(L_{adv}) = \{L \mid nsc(L_{adv}) < ntsc(L), \exists M : M$ is a nondeterministic sequential transducer, $M(L_{adv}) = L$, $|\Sigma_{L_{adv}}| \leq |\Sigma_L|$, $\#_S(M) < ntsc(L)\}$.*

Note that we require the advice language to be regular. Also note that we do not allow the advice alphabet to be greater than the original alphabet.

Definition 11. *The family $\mathscr{L}_{DTA}$ is defined as $\mathscr{L}_{DTA} = \{L \mid \exists L_{adv} : L \in \mathscr{L}_D(L_{adv})\}$. The family $\mathscr{L}_{NTA}$ is defined as $\mathscr{L}_{NTA} = \{L \mid \exists L_{adv} : L \in \mathscr{L}_N(L_{adv})\}$.*

To reason about the state complexity of transducers, we shall use the *extended fooling set technique*. The definition is taken from Palioudakis [Palioudakis, 2012].

Definition 12. *An extended fooling set for language L is a set $P = \{(x_i,y_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ such that $x_iy_i \in L$ and if $i \neq j$, then $x_iy_j \notin L$ or $x_jy_i \notin L$.*

Theorem 1. *Let P be an extended fooling set for language L. Then $nsc(L) \geq |P|$.*

Proof. By contradiction. Let P be an extended fooling set for L, let $|P| > nsc(L)$. Let A be the minimal automaton accepting L. Using the pigeonhole principle, it can be shown that there exist two distinct indices i, j such that $\delta(q_0, x_i) = \delta(q_0, x_j) = q$ for some state q. Since $x_i y_i \in L$ and $x_j y_j \in L$, it must hold that $x_i y_j \in L$ and $x_j y_i \in L$. This contradicts the definition of an extended fooling set. □

The following simple observation allows us to compute a (not necessarily tight) lower bound of sc(L) based on the value of nsc(L).

Lemma 1. *For every regular language L, $sc(L) \geq nsc(L)$.*

Proof. Let $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be a minimal DFA accepting L and let $A' = (K, \Sigma, \delta', q_0, F)$ be an NFA. Let $\forall q \in K \; \forall c \in \Sigma : \delta'(q,c) = \{\delta(q,c)\}$. Obviously, $\#_S(A) = \#_S(A')$ and $L(A') = L$. □

3 Supplementary information for transducers

3.1 Languages in $\mathscr{L}_{DTA}$

The following simple lemma allows us to use the extended fooling set technique to reason about the state complexity of deterministic transducers.

Lemma 2. *Transducer state complexity of a language is greater than or equal to its nondeterministic state complexity.*

Proof. For the sake of contradiction, let L be a regular language such that $tsc(L) < nsc(L)$ and let M be a transducer such that $M(\Sigma_1^*) = L$. Let A be a nondeterministic automaton such that $K_A = K_M, q_{0_A} = q_{0_M}, F_A = F_M, \Sigma_A = \Sigma_2$ and $\delta_A(q_1, c) = q_2$ if and only if there is $d \in \Sigma_1$ such that $\delta_M(q_1, d) = (q_2, c)$. It is easy to see that the automaton A accepts the language L and its state complexity is equal to that of the transducer M. □

Theorem 2. *If $n \geq 3$, the singleton language $\{a^n\}$ is in $\mathscr{L}_{DTA}$.*

Proof. Let $P = \{(a^i, a^{n-i}) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Then P is a fooling set for $\{a^n\}$ and therefore $nsc(\{a^n\}) \geq n+1$. By Lemma 2, it also holds that $tsc(\{a^n\}) \geq n+1$. Let $L_{adv} = \{a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$. The following diagrams show the transducer M_{new} based on the parity of n.

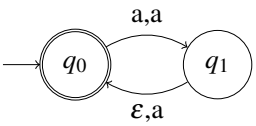


Figure 1: The transducer M_{new} for $n = 2k, k \geq 1$

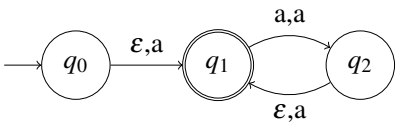


Figure 2: The transducer M_{new} for $n = 2k+1, k \geq 1$

The construction of a DFA accepting L_{adv} using $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ states is trivial. Since $n \geq 3, \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq 2$. Thus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 < n+1$ and $sc(L_{adv}) < tsc(L)$. In every case, $\#_S(M_{new}) < 4 \leq n+1$. It can also be easily seen that $M_{new}(L_{adv}) = \{a^n\}$, therefore if $n \geq 3$, then $\{a^n\} \in \mathscr{L}_{DTA}$. □

Theorem 3. *Let $L_n = \{a^{kn} \mid k \in \mathbb{N}\}$. If n is not a prime, L_n is in $\mathscr{L}_{DTA}$.*

Proof. Since n is not a prime, there exist integers p_1 and p_2 such that $n = p_1 p_2$. Let $L_{adv} = \{a^{kp_1} \mid k \in \mathbb{N}\}$. The transducer M_{new} is shown in Fig. 3.

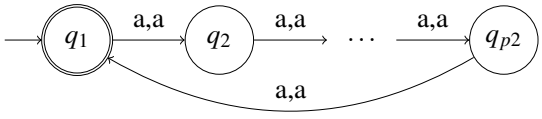


Figure 3: The transducer M_{new} that realizes the intersection of L_{adv} and $\{a^{kp_2} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Let $P = \{(a^i, a^{n-i}) \mid 0 \leq i < n\}$. Then P is an extended fooling set for L_n, therefore $tsc(L_n) \geq n$. However, $\#_S(M_{new}) < n$ and it is trivial to construct an automaton A accepting L_{adv} such that $\#_S(A) = p_1 < n$. It can also be easily seen that $M_{new}(L_{adv}) = L$. Therefore, $L_n \in \mathscr{L}_{DTA}$. □

3.2 Languages not in $\mathscr{L}_{DTA}$

In this section, we shall show examples of languages not in the family $\mathscr{L}_{DTA}$.

We shall use the following lemma to reason about the cardinality and finiteness of the advice language.

Lemma 3. *If $L \in \mathscr{L}_{DTA}$ and $M_{new}(L_{adv}) = L$, the cardinality of L_{adv} must be greater than or equal to the cardinality of L.*

Proof. For every word w in L, there must exist a word v in L_{adv} such that $M_{new}(v) = w$. Due to the transducer's determinism, there is only one possible computation for every word. Thus, M_{new} represents a surjective mapping. □

In the following theorem, we shall prove that if a language's state complexity is already low enough, no suitable advice may exist.

Theorem 4. *If $tsc(L) \leq 2$, L is not in $\mathscr{L}_{DTA}$.*

Proof. The theorem trivially holds when $tsc(L) = 1$. If $tsc(L) = 2$, then there must exist a transducer M_{new} such that $\#_S(M_{new}) = 1$ and a regular language L_{adv} such that $sc(L_{adv}) = 1$ and $M_{new}(L_{adv}) = L$. The only languages with deterministic state complexity equal to 1 are Σ_1^* and $\emptyset$. It holds that $M_{new}(\emptyset) = \emptyset$. Thus, it must also hold that $L = \emptyset$. However, $tsc(\emptyset) = 1$. If $L_{adv} = \Sigma_1^*$, a contradiction with the assumption that $tsc(L) = 2$ is reached as well. □

Corollary 1. *The languages $\Sigma^*, \emptyset$ and $\{\varepsilon\}$ are not in $\mathscr{L}_{DTA}$.*

We have shown that the languages of unary-coded multiples of composite numbers are in the family $\mathscr{L}_{DTA}$. Now, we shall show that this does not hold for the multiples of primes.

Theorem 5. *Let $L_p = \{a^{kp} \mid k \in \mathbb{N}\}$ where p is a prime. Then L is not in $\mathscr{L}_{DTA}$.*

Proof. Without loss of generality, let $\Sigma_{L_{adv}} = \{a\}$. The language L_{adv} must contain some word a^s such that $s \geq p$ by Lemma 3 and the fact that L_p is infinite. Since $tsc(L_p) = p$, the automaton that accepts L_{adv} must have fewer than p states. Thus, a part of a^s of length r_1 can be pumped and $\forall k \in \mathbb{N} : a^{x+kr_1} \in L_{adv}$. Since M_{new} must also have fewer than p states, a cycle where r_2 symbols are read and r_3 symbols are written must be reached during the run on a^s; $0 < r_2 < p$, $0 < r_3 < p$. Let $w = a^{s+r_1r_2}$. During the run on w, the cycle must be reached additional r_1 times and the output will be $a^{qp+r_1r_3}$ for some q. Both r_1 and r_3 are less than p and p is a prime, therefore $p \nmid r_1r_3$ and L_p can not contain $a^{qp+r_1r_3}$. Thus, $M_{new}(L_{adv}) \neq L_p$. □

Note that we assumed that the advice alphabet contained only one symbol. If it also contained a new symbol b, we could find a useful advice language $L_{adv} = (ab)^*$ (assuming that $p \neq 2$). The transducer M_{new} would apply a homomorphism h such that $h(a) = a$ and $h(b) = a^{p-1}$.

3.3 Languages in $\mathscr{L}_{NTA}$

In the following lemma, we shall show that nondeterministic state complexity of a regular language is equal to its nondeterministic transducer state complexity.

Lemma 4. *If L is a regular language, then $nsc(L) = ntsc(L)$.*

Proof. If $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ is a minimal NFA such that $L(A) = L$ and $M = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$ where $H = \{(q, c, c, p) \mid q, p \in K, c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, p \in \delta(q, c)$, then $M(\Sigma^*) = L$. Therefore $nsc(L) \geq ntsc(L)$ for every regular language L.
For the sake of contradiction, let $M = (K, \Sigma_1, \Sigma, H, q_0, F)$ be such a transducer that $M(\Sigma_1^*) = L$ and $\#_S(M) < nsc(L)$. Then a NFA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ where $\forall p, q \in K \forall c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$: $p \in \delta(q, c) \Leftrightarrow \exists c' \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\} : (q, c', c, p) \in H$ accepts the language L and at the same time, $\#_S(A) < nsc(L)$ holds, which is a contradiction. □

In the following theorems, we shall show that the languages consisting of one word of lenght at least 2 and the languages of unary-coded multiples of composite numbers belong to the family $\mathscr{L}_{NTA}$.

Theorem 6. *Let $L = \{w\}$, let $|w| \geq 2$. Then $L \in \mathscr{L}_{NTA}$.*

Proof. Let $w = a_1 \dots a_n$. Let $P = \{(a_1 \dots a_k, a_{k+1} \dots a_n) \mid 0 \leq k \leq n\}$. It can be easily seen that P is an extended fooling set for L and that $ntsc(L) \geq n + 1$. Let $L_{adv} = \{a_n\}$. Clearly $nsc(L_{adv}) = 2$. The transducer M_{new} is shown in the following diagram.
Since $\#_S(M_{new}) = n$ and $M_{new}(L_{adv}) = L$, $L \in \mathscr{L}_{NTA}$. □

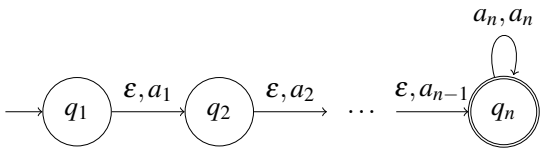


Figure 4: The transducer M_{new} that adds a prefix to the input word

Theorem 7. *Let n be a composite number, let* $L = \{a^{kn} \mid k \in \mathbb{N}\}$. *Then* $L \in \mathscr{L}_{NTA}$.

Proof. The proof is analogous to the proof of Theorem 3. □

3.4 Languages not in $\mathscr{L}_{NTA}$

In this section, we shall show examples of languages not in the family $\mathscr{L}_{NTA}$.

Theorem 8. *If* $nsc(L) \leq 2$, *then L is not in* $\mathscr{L}_{NTA}$.

Proof. The proof is analogous to the proof of Theorem 4. □

Theorem 9. *Let* $L_p = \{a^{kp} \mid k \in \mathbb{N}\}$ *where p is a prime. Then* L_p *is not in* $\mathscr{L}_{NTA}$.

Proof. The proof is similar to the proof of Theorem 5. For the sake of contradiction, let L_{adv} be a useful advice language. If the transducer contains a reachable cycle where ε is read and a^{r_1} $(1 \leq r_1 < p)$ is written to the output tape, a^{r_1} can be written to the output tape one more time and the resulting output will no longer belong to L_p. Now, let us suppose that M_{new} contains no ε-cycle. If L_{adv} is infinite, the automaton must contain a cycle. The transducer M_{new} has to contain some cycle as well, otherwise the output language would be finite. Thus, there exist constants s and r_2 such that $\forall k \in \mathbb{N} : a^{s+kr_2} \in L_{adv}$ and constants r_3 and r_4 such that M_{new} contains a cycle where r_3 symbols are read and r_4 symbols are written. It must also hold that $1 \leq r_2, r_3, r_4 < p$ and that there is some n such that $a^{np} \in M_{new}(a^s)$. During the run on $a^{s+r_2r_3}$, M_{new} can enter the cycle additional r_2 times and thus add $a^{r_2r_4}$ to the output. Neither r_2 nor r_4 is divisible by p, therefore r_2r_4 is not divisible by p either. Thus, $a^{np+r_2r_4} \in M_{new}(a^{s+r2_r3)})$. Since $a^{s+r_2r_3} \in L_{adv}$ but $a^{np+r_2r_4} \notin L_p$, L_{adv} is not a useful advice language. If L_{adv} is finite there exists a constant c such that for every c symbols written, the transducer has to read at least one. Thus, $M_{new}(L_{adv})$ is finite and L_{adv} is not a useful advice language. □

Analogously to Theorem 5, adding an additional symbol to the input alphabet would allow us to find a suitable advice language.

3.5 Relations to families of decomposable languages:

In this section, we shall study the relations between the families $\mathscr{L}_{DTA}$ and $\mathscr{L}_{NTA}$ and the families defined by automata decomposability.

Theorem 10. *There exists a language in* $\mathscr{L}_{DTA}$ *that is not deterministically decomposable.*

Proof. Let $L = \{a^{94}\}$. By Theorem 2, $L \in \mathscr{L}_{DTA}$. However, it was shown by Gaži and Rovan that L is not deterministically decomposable. [Gaži and Rovan, 2008] □

Theorem 11. *The family of nondeterministically decomposable languages is a subset of* $\mathscr{L}_{NTA}$.

Proof. Let L_1, L_2 be regular languages such that $nsc(L_1) < nsc(L), nsc(L_2) < nsc(L)$ and $L_1 \cap L_2 = L$. Let $A_1 = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be an NFA such that $L(A_1) = L_1$ and $\#_S(A_1) < nsc(L)$. Let $M = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$ where $H = \{(q, c, c, p) \mid q, p \in K, c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, p \in \delta(q, c)\}$, The transducer M realizes the intersection of the input language with L_1. Since $M(L_2) = L$, $nsc(L_2) < ntsc(L)$ and $\#_S(M) < ntsc(L)$, $L \in \mathscr{L}_{NTA}$. □

Theorem 12. *There exists a language in* $\mathscr{L}_{NTA}$ *that is not nondeterministically decomposable.*

Proof. As shown by Rovan and Sádovský [Rovan and Šimon Sádovský, 2018], the language $\{a^{94}\}$ is nondeterministically undecomposable. However, by Theorem 6 $\{a^{94}\} \in \mathscr{L}_{NTA}$. □

4 Properties

4.1 Properties of $\mathscr{L}_{DTA}$

In this section, we shall study the closure properties of the family $\mathscr{L}_{DTA}$.

Theorem 13. *The family $\mathscr{L}_{DTA}$ is not closed under ε-free homomorphism, inverse homomorphism, intersection, union, Kleene star, Kleene plus and concatenation.*

Proof. Let $L = \{abb\}^*$, let $L_{adv} = \{ab\}^*$. It can be easily seen that $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv})$ and thus $L \in \mathscr{L}_{DTA}$. Let $h(a) = a$ and $h(b) = a$. Then $h(L) = \{a^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. However, the language $\{a^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is not in $\mathscr{L}_{DTA}$ by Theorem 5.
Let $L = \{a^{10}\}$, then $L \in \mathscr{L}_{DTA}$ by Theorem 2. Let $h(a) = \varepsilon$. Then $h^{-1}(L) = \emptyset$. By Theorem 4, $\emptyset \notin \mathscr{L}_{DTA}$. Let $L_1 = \{a^{94}\}$ and $L_2 = \{a^{96}\}$. Then $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, which is not in $\mathscr{L}_{DTA}$ by Theorem 4.
Let $L_1 = \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a^{4n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Let $L_{adv,2} = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. It can be easily seen that $L_1 \in \mathscr{L}_{DTA}$. The transducer M_{new_2} applies the homomorphism $h(a) = a^2$, therefore $L_2 \in \mathscr{L}_{DTA}$. However, $L_1 \cup L_2 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, which is not in $\mathscr{L}_{DTA}$ by Theorem 4.
Let $L = \{\varepsilon, a^2, a^4\}$. Then $tsc(L) \geq 5$. Let $L_{adv} = \{\varepsilon, a, a^2\}$. The transducer M_{new} applies the homomorphism $h(a) = a^2$, therefore $L \in \mathscr{L}_{DTA}$. However, $L^* = L^+ = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Thus, L^* and L^+ are not in $\mathscr{L}_{DTA}$ by Theorem 4.
Let $L_1 = \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_2 = \{a, a^3, a^5\}$ and $L_{adv_2} = \{a, a^2, a^3\}$. The transducer M_{new_2} is shown in the diagram:

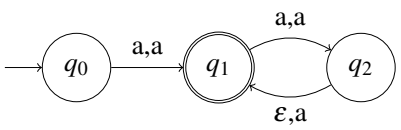


Figure 5: The transducer M_{new_2}

It can be easily seen that $tsc(L_2) \geq 6$ and $sc(L_{adv_2}) \leq 5$, therefore $L_2 \in \mathscr{L}_{DTA}$. However, $L_1 L_2 = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, which is not in $\mathscr{L}_{DTA}$ by Theorem 4. □

4.2 Properties of $\mathscr{L}_{NTA}$

In this section, we shall study the closure properties of the family $\mathscr{L}_{NTA}$.

Theorem 14. *The family $\mathscr{L}_{NTA}$ is not closed under intersection, union, Kleene star, Kleene plus, ε-free homomorphism, inverse homomorphism and concatenation.*

Proof. Let $L_1 = \{a^{94}\}$, let $L_2 = \{a^{96}\}$. Then $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. By Theorem 6, $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{NTA}$ and by Theorem 8, $\emptyset \notin \mathscr{L}_{NTA}$.
Let $L_1 = \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a^{4n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$. It can be easily seen that $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{NTA}$. However, $L_1 \cup L_2 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ and by Theorem 8, $L_1 \cup L_2 \notin \mathscr{L}_{NTA}$. Let $L = \{\varepsilon, a^2.a^4\}$. It can be easily seen that $L \in \mathscr{L}_{NTA}$. However, $L^* = L^+ = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. By Lemma 8, $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{L}_{NTA}$.
Let $L = (abb)^*$. It can be easily seen that $L \in \mathscr{L}_{NTA}$. Let $h(a) = a$ and $h(b) = a$. Then $h(L) = \{a^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. By Theorem 9, $h(L) \notin \mathscr{L}_{NTA}$.
Let $L = \{a^{10}\}$ and $h(a) = \varepsilon$. Then by Theorem 6 $L \in \mathscr{L}_{NTA}$. However, $h^{-1}(L) = \emptyset$ and by Theorem 8, $\emptyset \notin \mathscr{L}_{NTA}$. Let $L_1 = \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a, a^3, a^5\}$. It can be easily seen that $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{NTA}$. However, $L_1 L_2 = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. By Lemma 8, $L_1 L_2 \notin \mathscr{L}_{NTA}$. □

5 Fixed advice

The families generated by a fixed advice language were studied in the Bachelor's thesis of Martiš [Martiš, 2018] in the setting of deterministic finite automata. We shall study the properties of families $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ and $\mathscr{L}_N(Ladv)$ for a fixed advice language L_{adv}.

5.1 Fixed deterministic advice

We shall show that for a fixed language L_{adv}, the family $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ does not necessarily have to be closed under common operations. In the deterministic transducers setting, this is a consequence of Lemma 3.

Theorem 15. *There exists a language L_{adv} such that $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ is not closed under complement, union, intersection, Kleene star or Kleene plus.*

Proof. By Lemma 3, if $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv})$, then $|L| \leq |L_{adv}|$. Let $L_{adv} = \{a^8\}$, let $L_1 = \{a^{16}\}$ and let $L_2 = \{a^{24}\}$. Clearly, L_{adv} is useful for L_1 and L_2 but not for L_1^C, L_1^+, L_1^* or $L_1 \cup L_2$ since their cardinality is greater than that of L_{adv}. It can also be easily seen that $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ is not closed under intersection, since $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. By Lemma 4, no advice exists for $\emptyset$. □

Theorem 16. *There exists a language L_{adv} such that $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ is not closed under concatenation.*

Proof. Let $L_{adv} = \{a^4, a^8\}$, let $L_1 = \{a^8, a^{16}\}$ and let $L_2 = \{a^{16}, a^{32}\}$. Clearly, L_{adv} is useful for both L_1 and L_2. However, $L_1L_2 = \{a^{24}, a^{32}, a^{40}, a^{48}\}$ and by Lemma 3, L_{adv} is not useful for L_1L_2. □

Theorem 17. *There exists a language L_{adv} such that $\mathscr{L}_D(L_{adv})$ is not closed under homomorphism or inverse homomorphism.*

Proof. Let $L_{adv} = \{a^4\}$, let $L = \{a^8\}$. Clearly $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv})$. Let $h(a) = \varepsilon$. Then $h(L) = \{\varepsilon\}$ and $h^{-1}(L) = \emptyset$. By Lemma 4, neither $h(L)$ nor $h^{-1}(L)$ is in $\mathscr{L}_D(L_{adv})$. □

5.2 Fixed nondeterministic advice

In this section, we shall show that for a fixed advice L_{adv}, the family $\mathscr{L}_N(L_{adv})$ does not have to be closed under common operations either.

Lemma 5. *If $\mathscr{L}_{NTA}$ is not closed under an unary operation f, then there exists a language L_{adv} such that $\mathscr{L}_N(L_{adv})$ is not closed under that operation.*

Proof. Since $\mathscr{L}_{NTA}$ is not closed under the operation, there must exist a language L such that advice L_{adv} exists for L but no advice exists for $f(L)$. Thus, $L \in \mathscr{L}_N(L_{adv})$ but $f(L) \notin \mathscr{L}_N(L_{adv})$. □

Corollary 2. *By Lemma 5 and the results in Chapter 4, there exist languages L_{adv} such that $\mathscr{L}_N(L_{adv})$ is not closed under homomorphism, inverse homomorphism, Kleene star and Kleene plus.*

Theorem 18. *There exists a language L_{adv} such that $\mathscr{L}_N(L_{adv})$ is not closed under intersection.*

Proof. Let $L_{adv} = \{a^4\}$, let $L_1 = \{a^8\}$, let $L_2 = \{a^{12}\}$. Then clearly $L_1 \in \mathscr{L}_N(L_{adv})$ and $L_2 \in \mathscr{L}_N(L_{adv})$, but $L_1 \cap L_2 = \emptyset \notin \mathscr{L}_N(L_{adv})$ since $\emptyset \notin \mathscr{L}_{NTA}$. □

Theorem 19. *There exists a language L_{adv} such that $\mathscr{L}_N(L_{adv})$ is not closed under union.*

Proof. Let $L_{adv} = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_1 = \{a^{4n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Then $L_1 \in \mathscr{L}_N(L_{adv})$ and $L_2 \in \mathscr{L}_N(L_{adv})$, but $L_1 \cup L_2 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{L}_N(L_{adv})$, since $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{L}_{NTA}$ by Theorem 8. □

5.3 Advice modifications

In this section, we shall study whether some common modifications preserve the usefulness of the advice.

Theorem 20. *There exists a pair of languages L, L_{adv} such that $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv})$ but $L \notin \mathscr{L}_D(L^R_{adv})$.*

Proof. Let $L = \{ba^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_{adv} = \{b\}\{a\}^*$. It can be easily seen that $\{(\varepsilon, b), (b, aaa), (ba, aa), (baa, a)\}$ is a fooling set for L and therefore $tsc(L) \geq 4$. The transducer M_{new} is shown in the diagram.

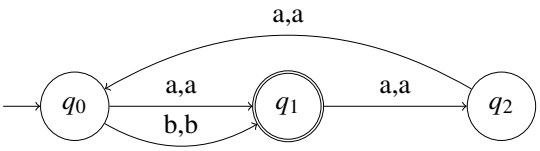


Figure 6: The transducer M_{new}.

Since $M_{new}(L_{adv}) = L$, $\#_S(M_{new}) = 3$ and $sc(L_{adv}) < 4$, L_{adv} is nontrivial advice for L.
If $\{a\}^*\{b\}$ is used as advice, there must exist a state q where a or ε is read and b is written to the output. If b could be written only while reading b, b could be written only after the entire input was read. However, since the run where ba^6 is written must end in an accepting state and it must stop once the input is read and an accepting state is reached, it would be impossible to write a^6 after reading the entire input. At least 6 steps are needed and by the pigeonhole principle, some state has to be reached twice. If it is an accepting state, a contradiction is reached since the run would have to stop after reaching such a state for the first time. If only a non-accepting state is reached twice, the part of the run inbetween will be repeated indefinitely due to the transducer's determinism and the fact that no input is read during any of the steps. Thus, an accepting state will never be reached.
Once b is written, q can not be reached again unless q is accepting and the entire input is read, thus only the two remaining states can be used while writing the a^6 part. Then, some state has to be reached twice with a or aa read and a or aa written inbetween. The necessary number of symbols can be added to the input to produce a word that does not belong to L. □

Theorem 21. *There exist languages L, L_{adv_1}, L_{adv_2} such that $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv_1})$ and $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv_2})$ but $L \notin \mathscr{L}_D(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$*

Proof. Let $L = \{a^{10n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_{adv_1} = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_{adv_2} = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. It can be easily seen that both L_{adv_1} and L_{adv_2} can be used as advice for L. However, $L_{adv_1} \cup L_{adv_2} = a^*$. By the definition of transducer state complexity, a^* can not be used as advice. □

Theorem 22. *There exist languages L, L_{adv_1}, L_{adv_2} such that $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv_1})$ and $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv_2})$ but $L \notin \mathscr{L}_D(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$*

Proof. Let $L = \{a^{24}\}$, $L_{adv_1} = \{a^3\}$, $L_{adv_2} = \{a^4\}$. It can be easily seen that both L_{adv_1} and L_{adv_2} can be used as advice for L. However, $L_{adv_1} \cap L_{adv_2} = \emptyset$ and $M_{new}(\emptyset) = \emptyset$ for any transducer M_{new}. □

Theorem 23. *There exist languages L and L_{adv} and a homomorphism h such that $L \in \mathscr{L}_D(L_{adv})$ but $L \notin \mathscr{L}_D(h(L_{adv}))$.*

Proof. Let $L = \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_{adv} = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $h(a) = \varepsilon$. Then $h(L_{adv}) = \{\varepsilon\}$. If a transducer M with fewer than 4 states such that $M(\varepsilon) = L$ existed, an NFA accepting L with fewer than 4 states could be constructed and a contradiction with the nondeterministic complexity of L (which is obviously 4) would be reached. □

5.4 Relations

In this section, we shall study whether some additional relations hold.

Lemma 6. *There exist languages L_1 and L_2 such that $L_1 \subseteq L_2$ and $\mathscr{L}_D(L_1) \not\subseteq \mathscr{L}_D(L_2)$*

Proof. Let $L_1 = \{a^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a\}^*$. By the definition of deterministic transducer state complexity $\mathscr{L}_D(L_2) = \emptyset$. □

Lemma 7. *There exist languages L_1 and L_2 such that $L_1 \not\subseteq L_2$ and $\mathscr{L}_D(L_1) \not\subseteq \mathscr{L}_D(L_2)$*

Proof. Let $L_1 = \{a^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a^3\}$. Then L_1 can be used as advice for the language $\{a^{6n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. By Lemma 3, L_2 can only be used as advice for finite languages. □

Lemma 8. *There exist languages L_1 and L_2 such that $\mathscr{L}_D(L_1 \cap L_2) \not\subseteq \mathscr{L}_D(L_1) \cap \mathscr{L}_D(L_2)$.*

Proof. Let $L_1 = \{a^4\}$, let $L_2 = \{a\}^*$. Then $\mathscr{L}_D(L_2) = \emptyset$ and thus $\mathscr{L}_D(L_1) \cap \mathscr{L}_D(L_2) = \emptyset$. However, $L_1 \cap L_2 = L_1$ and it can be easily seen that $\mathscr{L}_D(L_1) \neq \emptyset$. □

Lemma 9. *There exist languages L_1 and L_2 such that $\mathscr{L}_D(L_1) \cup \mathscr{L}_D(L_2) \not\subseteq \mathscr{L}_D(L_1 \cup L_2)$.*

Proof. Let $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, let $L_2 = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Then $L_1 \cup L_2 = a^*$ and $\mathscr{L}_D(a^*) = \emptyset$. It can be easily seen that $\mathscr{L}_D(L_1) \cup \mathscr{L}_D(L_2) \neq \emptyset$. □

6 Conclusion

In this paper, we have formalized and studied the use of supplementary information in finite transducers setting. We have shown that some types of advice that can be intuitively seen as useful, such as homomorphic images, can be useful in our setting but not necessarily useful in the finite automata setting. Furthermore, we have shown that the family $\mathscr{L}_{NTA}$ is a proper superset of nondeterministically decomposable languages and that the family $\mathscr{L}_{DTA}$ is not a subset of deterministically decomposable languages. The families defined by our approach are not closed under many common operations. This is in part due to the fact that they do not contain languages such as Σ^*, $\emptyset$ and $\{\varepsilon\}$. Moreover, even simple modifications can make the supplementary information no longer useful. In future research, the remaining open problems regarding closure properties can be studied. Other possibilities include a full characterization of the families $\mathscr{L}_{DTA}$ and $\mathscr{L}_{NTA}$ and a generalization of the use of supplementary information using concepts from promise problems.

References

[Gaži and Rovan, 2008] Gaži, P. and Rovan, B. (2008). Assisted problem solving and decompositions of finite automata. *SOFSEM 2008*, LNCS 4910:292–303.

[Ginsburg, 1966] Ginsburg, S. (1966). *The Mathematical Theory of Context-free Languages*. McGraw-Hill Book Company.

[Martiš, 2018] Martiš, J. (2018). Dodatočná informácia a triedy jazykov. Bachelor's Thesis, Comenius University in Bratislava. (in Slovak).

[Palioudakis, 2012] Palioudakis, A. (2012). Nondeterministic state complexity and quantifying

non-determinism in finite automata. Technical Report 2012-596, School of Computing, Queen's University, Kingston, ON, Canada.

[Rovan and Forišek, 2013] Rovan, B. and Forišek, M. (2013). Formálne jazyky a automaty. [Accessed 2018-12-01] Available at: `http://foja.dcs.fmph.uniba.sk/materialy/skripta.pdf` (in Slovak).

[Rovan and Šimon Sádovský, 2018] Rovan, B. and Šimon Sádovský (2018). On usefulness of information: Framework and NFA case. *Adventures Between Lower Bounds and Higher Altitudes*, LNCS 11011:85–99.

[Vida, 2015] Vida, B. (2015). Using transformation in solving problems with supplementary information. Master Thesis, Comenius University in Bratislava.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 136
ISBN 978-8081470936, © 2019 Mário Lipovský

Solving the Maximum Clique Problem Using Neural Networks (Extended Abstract)

Mário Lipovský[1*]

Supervisor: Vladimír Bože[2†]

[1] Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
[2] Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

For its various practical and theoretical applications, the maximum clique problem (MCP) is one of the most studied NP-complete problems. In its simplest form we search for the largest complete subgraph of an undirected graph G. Currently, the most successful exact approaches to MCP use branch-and-bound (B&B) framework, where a search tree is pruned using branching and bounding heuristic functions and the efficiency of B&B depends mainly on the quality of these functions [Wu and Hao, 2015].

In recent years, the success of deep neural networks led researchers to apply the methods of deep learning to NP-hard combinatorial optimization problems with the motivation to automatically learn to exploit structural patterns in problem instances and thus design more effective heuristics [Bengio et al., 2018].

Concurrently, a specified sub-field of models that can process graphs in an end-to-end fashion, graph neural networks (GNNs), emerged. GNNs model the invariance to vertex labels with a message passing framework, where a neuron, which is placed in a vertex of a graph, aggregates and transforms the outputs of neurons of neighbouring vertices [Bronstein et al., 2016].

In our work we combine the ideas from aforementioned fields in order to solve the MCP using GNNs.

As our approach is based on supervised learning, we generate various small random graphs and we use an exact algorithm to compute the clique sizes to serve as target values in the first step. We then train our GNN, which uses Chebyshev graph convolutional layers followed by a multilayer perceptron, to predict the size of the largest clique in the neighbourhood of each vertex. In the second step we use these predictions to guide a B&B tree search to construct large cliques.

Our results show that our GNN can learn to predict clique sizes in small graphs – see Figure 1 for the mean square errors of clique size predictions achieved on 20-vertex graphs generated from the graph classes from DIMACS and BHOSLIB benchmark datasets[1]. For graphs with small clique size variance (`C.20.5, C.20.9, rb5-4`), the model only learns the behaviour similar to mean baseline, but in graphs with various clique sizes that are less correlated with vertex degrees (`dsjc20, brock20`), our model significantly outperforms baselines.

We also show that when the graph network is used as a branching heuristic function of B&B algorithm, it can outperform degree-based heuristic, but it does not achieve the effectiveness of a more advanced heuristic based on vertex coloring.

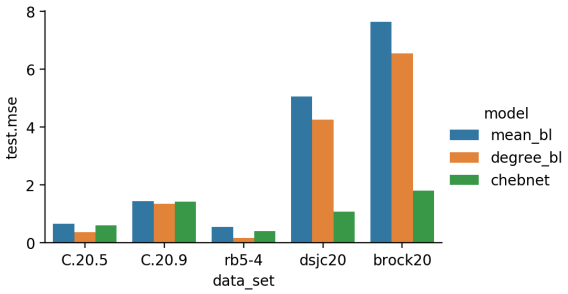


Figure 1: Testing error for the baseline models (the mean and degree baselines use 1, resp. $\Delta(G)$ parameters) and for GNN evaluated on various graph types. 100 testing graphs with 20 vertices were generated to produce results presented in each column group.

References

[Bengio et al., 2018] Bengio, Y., Lodi, A., and Prouvost, A. (2018). Machine learning for combinatorial optimization: a methodological tour d'horizon. *CoRR*, abs/1811.06128.

[Bronstein et al., 2016] Bronstein, M., Bruna, J., Lecun, Y., Szlam, A., and Vandergheynst, P. (2016). Geometric deep learning: Going beyond euclidean data. *IEEE Signal Processing Magazine*, 34.

[Wu and Hao, 2015] Wu, Q. and Hao, J.-K. (2015). A review on algorithms for maximum clique problems. *European J. of Operational Research*, 242:693–709.

*`mlipovskysk@gmail.com`
†`boza@fmph.uniba.sk`

[1] `iridia.ulb.ac.be/~fmascia/maximum_clique/`

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 137
ISBN 978-8081470936, © 2019 Anna Kompišová

Flows and circular flows on signed cubic graphs (Extended Abstract)

Anna Kompišová[1*]

Supervisor: Edita Máčajová[2†]

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

A *signed graph* (G,σ) is a graph G with signature $\sigma\colon E \to \{1,-1\}$. The *flow number* $\Phi(G,\sigma)$ of a flow-admissible signed graph (G,σ) is the smallest integer k, for which there exists an integer nowhere-zero k-flow on (G,σ). The *circular flow number* $\Phi_c(G,\sigma)$ of a flow-admissible signed graph (G,σ) is the infimum of real numbers r for which there exists an $\mathbb{R}$-flow on (G,σ) satisfying that absolute values of all the flow values are in the interval $[1,r-1]$.

The relationship between the flow number $\Phi(G)$ and the circular flow number $\Phi_c(G)$ in the unsigned case is simple: $\Phi(G) = \lceil \Phi_c(G) \rceil$. Based on this result Raspaud and Zhu [Raspaud and Zhu, 2011] conjectured, that $\Phi(G,\sigma) - \Phi_c(G,\sigma) < 1$ for every flow-admissible signed graph (G,σ). This conjecture was disproved by Schubert and Steffen [Schubert and Steffen, 2015], who showed that the difference can be 2. Later, Máčajová and Steffen [Máčajová and Steffen, 2015] found a class of signed graphs with flow number 5 and the circular flow number converging to 2, but the maximum degee in such graphs increases.

In this talk we concentrate on flows on cubic graphs since they play a crucial role in many open problems in graph theory. We prove the following theorem.

Theorem 1. *Let (G,σ) be a flow-admissible signed cubic graph. The following hold.*

a) $\Phi(G,\sigma) = 3$ *if and only if* $\Phi_c(G,\sigma) = 3$.

b) *If* $\Phi(G,\sigma) = 4$ *then* $\Phi_c(G,\sigma) = 4$.

c) *If* $\Phi(G,\sigma) = 5$ *then* $\Phi_c(G,\sigma) \in [4,5]$.

We also have found infinitely many bridgeless signed cubic graphs with $\Phi(G,\sigma) = 5$ and $\Phi_c(G,\sigma) = 4$, which disproves the conjecture of Raspaud and Zhu even for bridgeless signed cubic graphs. If we combine our result with those in [Lukoťka and Škoviera, 2010] and [Máčajová and Raspaud, 2006], we prove that for every rational number $r \in [4,5]$ there are infinitely many signed cubic graphs with $\Phi(G,\sigma) = 5$ and $\Phi_c(G,\sigma) = r$. Therefore, there are infinitely many bridgeless signed cubic graphs for every combination of the flow number and the circular flow number satistying the conditions of Theorem 1.

Bouchet [Bouchet, 1983] conjectured that every flow-admissible signed graph admits a nowhere-zero 6-flow. This conjecture is still widely open. Because of this conjecture, the flow-admissible signed graphs not admitting nowhere-zero 5-flow attract attention. There are known such graphs, see [Bouchet, 1983] and [Schubert and Steffen, 2015].

We define a family of signed graphs about which we believe to be the complete set of all signed graphs not admitting a nowhere-zero 5-flow. We further prove that every graph in this set has flow number and circular flow number exactly 6.

References

[Bouchet, 1983] Bouchet, A. (1983). Nowhere-zero integral flows on bidirected graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 34:279–292.

[Lukoťka and Škoviera, 2010] Lukoťka, R. and Škoviera, M. (2010). Snarks with given real flow numbers. *J. Graph Theory*, 68:189–201.

[Máčajová and Raspaud, 2006] Máčajová, E. and Raspaud, A. (2006). On the strong circular 5-flow conjecture. *J. Graph Theory*, 52:307–316.

[Máčajová and Steffen, 2015] Máčajová, E. and Steffen, E. (2015). The difference between the circular and the integer flow number of bidirected graphs. *Disc. Math.*, 338:866–867.

[Raspaud and Zhu, 2011] Raspaud, A. and Zhu, X. (2011). Circular flow on signed graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 101:464–479.

[Schubert and Steffen, 2015] Schubert, M. and Steffen, E. (2015). Nowhere-zero flows on signed regular graphs. *European J. Combin.*, 48:34–47.

*kompisova@dcs.fmph.uniba.sk

†macajova@dcs.fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 138
ISBN 978-8081470936, © 2019 Radoslav Chládek

Algorithms For Isometric Gene Tree Reconciliation (Extended Abstract)

Radoslav Chládek*

Supervisor: Bronislava Brejová†

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Evolutionary relationships of biological entities can be shown by a branching diagram called *phylogenetic tree*. Phylogenetic trees are often represented as trees from graph theory, and they can be either *rooted* or *unrooted*. A *species tree* is a phylogenetic tree that shows the evolutionary relationships of various species. The leaves of the tree represent present-day species and inner nodes represent *speciations*. A speciation is an evolutionary process by which a new distinct species is created from a given population. Evolution of a single gene is shown by a phylogenetic tree called a *gene tree*. The leaves of the tree represent copies of the gene in present-day species, and inner nodes represent speciations or *duplications*. A duplication is an evolutionary event causing that a gene is copied and placed in some other position in the genetic information of an organism. Both gene copies then evolve independently.

In this work, we study the problem of *isometric gene tree reconciliation*. Input for this bioinformatics problem consists of a weighted species tree S, a weighted gene tree G and a mapping from the leaves of G to leaves of S. Mapping of the leaves determines the present-day species that contains a given gene copy. The goal of the reconciliation is to find a mapping from inner nodes of G to nodes or edges of S, while all ancestor-descendant relationships remain satisfied. From this mapping, we can determine whether a given inner node of G represents a duplication or a speciation and find the point in the evolutionary history, when this event took place. A specific mapping also implies the number of *gene losses* that had to occur, so that only the genes specified by G are present in the present-day species. Reconciliation that minimizes the number of duplications and gene losses is called *the most parsimonious reconciliation*.

In the first mention of isometric gene tree reconciliation problem [Ma et al., 2008], authors introduce and apply an algorithm for reconciliation of unrooted G and rooted S. An article [Brejová et al., 2017] following their research, modifies the algorithm and improves the running time from $\mathcal{O}(N^2)$ to $\mathcal{O}(N \log N)$, where N is the total number of nodes in both input trees. Their algorithm for a case when both G and S are rooted has a running time $\mathcal{O}(N \log N)$ too, and the article also studies more variants of the problem. Previous research dealt with the case, where the input trees have exact branch lengths. However, phylogenetic trees are often constructed by using probabilistic methods and even small differences between branch lengths of the trees may prevent finding the true reconciliation in current algorithms.

In this work, we allow input trees to have inexact branch lengths specified by intervals. Firstly, we introduce polynomial-time algorithm based on linear programming. Then we present less general, but more efficient algorithms for finding the most parsimonious reconciliation for the case, when S has exact and G inexact branch lengths. We also improve the running time of the rooted case to $\mathcal{O}(N)$ if only partial reconciliation is required.

References

[Brejová et al., 2017] Brejová, B., Gafurov, A., Pardubská, D., Sabo, M., and Vinař, T. (2017). Isometric gene tree reconciliation revisited. *Algorithms for Molecular Biology*, 12(1):17.

[Ma et al., 2008] Ma, J., Ratan, A., Raney, B. J., Suh, B. B., Miller, W., and Haussler, D. (2008). The infinite sites model of genome evolution. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(38):14254–14261.

*chladek8@uniba.sk

†brejova@dcs.fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 139–147
ISBN 978-8081470936, © 2019 Patrícia Bartschová

Využitie kocky GeoBender na hodinách matematiky

Patrícia Bartschová[1*]

Školiteľ: Mária Slavíčková[2†]

Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: V príspevku sa venujeme kocke GeoBender a jej využitiu na hodinách matematiky. Je to magnetický hlavolam zložený z 12 zhodných ihlanov, z 12 pántov a 12 magnetov. V práci sa venujeme matematike ukrytej v kocke GeoBender, úrovniam geometrického myslenia a sade zadaní, ktoré sme navrhli. Kocka nesie prvky viacerých hlavolamov a hier, čiastočne sa podobá na lego, tangram, kaleidocyklus a iné.

Kľúčové slová: kocka, GeoBender, úrovne geometrického myslenia, hlavolam

Úvod

Kocku GeoBender sme si vybrali, na základe jej manipulačných schopnosti. Tejto téme sa venujeme aj v bakalárskej práci, kde matematiku ukrytú v kocke máme aj podrobnejšie odvodenú.
V prvej časti nášho príspevku sa venujeme jej opisu. Prejdeme od jej vzhľadu a možnosti polohovania až ku matematike, ktorá je ukrytá v nej, ktorú popisujeme ako vlstnosti kocky GeoBender.
V druhej časti príspevku rozoberáme teóriu k praktickej časti. Konkrétne úrovne geometrického myslenia a pojmy ako hlavolam a didaktická hra.
V poslednej časti nášho príspevku sa nachádzajú už konkrétne zadania, ktoré sme navrhli gradovane pre každú katégóriu. Obsah zadaní v jednotlivých kategóriach je podobný, ale žiak má zadanie riešiť rôznymi spôsobmi. Kým v najnižšej kategórii žiaci merajú dĺžku, tak v poslednej kategórii využívajú žiaci poznatky z goniometrie.

1 Kocka GeoBender

Kocka GeoBender je magnetický hlavolam, skladajúci sa z 12 rovnakých ihlanov, ktoré vznikli rezom kocky význačnými rovinami, prechádzajúcich cez uhlopriečky. Ihlany sú spojené v 12 hranách, čím vytvárajú kaleidocyklus. Z jednej kocky sa dá vymodelovať 6 základnych polôh.

*bartschova.patricia@gmail.com
†maria.slavickova@fmph.uniba.sk

Kocka GeoBender je vylepšenou verziou kocky Cubus X, ktorá neobsahovala magnety a bola zložená z dvojíc jednofarebných ihlanov. O Cubus X sa predpokladá, že je približne pol storočia stará. Okrem kocky GeoBender a Cubus X existuje ešte kocka Yoshimoto Cube #, ktorá je rovnako ako Cubus X bez magnetov, ale je navrhnutá len v dvojfarebnom prevedení.

Autorom kocky GeoBender je Andreas Hoenigschmid, ktorý zaujal kockou GeoBender, hlavne pre jej umelecké prevedenie, ktoré docielil farebnou podtlačou a magnetmi, ktoré zabezpečujú stabilitu polôh.

Obr. 1: Kocka GeoBender.

Na prvý pohľad pôsobí ako kocka, ktorá má zvýraznené stenové uhlopriečky tak, že v dvoch protiľahlých vrcholoch kocky sa stretávajú práve tri stenové uhlopriečky a do zvyšných štyroch vrcholov smeruje vždy len jedna uhlopriečka.
Po otvorení kocky vo vrcholoch, v ktorých sa zbiehajú tri stenové uhlopriečky, sa kocka mení na 6 cípu hviezdu. Ďalšie polohy vieme získať pomocou jednoduchého algoritmu pohybov a z poslednej šiestej polohy sa cez jednu z predchádzajúcich polôh vieme dopracovať opäť k základnému tvaru a to ku kocke.
Tento hlavolam pôsobí magicky. Podľa nás kocka

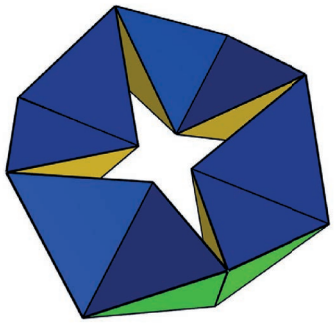
GeoBender nesie prvky Rubikovej kocky, tangramu, lega a kaleidocyklu.

2 Matematika ukrytá v GeoBender kocke

V tejto časti skúsime povedať niečo o matematike, ktorá sa nachádza v kocke GeoBender, väčšinou sa jedná o naše postrehy, ktoré sme získali počas navrhovania, tvorby a práce s ňou. Skúsme sa teda pozrieť na kocku GeoBender z matematického hľadiska.

2.1 Kaleidocyklus

Vo všeobecnom opise kocky GeoBender sme si spomenuli, že táto kocka nesie prvky viacerých známych stavebníc alebo hlavolamov. Najviac spoločných prvkov má ale s kaleidocyklami, keďže je ich špeciálnym typom.



Obr. 2: Kaleidocyklus.

Kaleidocyklus (Obr. **??**) pochádza z gréčtiny (*kalós+eidos+kyklos*) a znamená krásny obraz v kruhu. Podľa Ellen Pawlowski (Umstülpungen – konkret und virtuell, 2008, str.6) existujú viaceré prístupy ku kaleidocyklom. Na jednej strane majú kaleidoskopy spoločnú vlastnosť a to, že sú vytvorené do kruhu pomocou mnohostenov. Na druhej strane sú rozdiely najmä v návrhu, podmienkach alebo v požiadavkách, ktoré sa kladú pri tvorbe kaleidocyklu. Tie majú významný vplyv na vlastnosti neskoršieho útvaru.
Najzákladnejším modelom je kaleidocyklus, ktorý je tvorený zo šiestich štvorstenov. Štvorsten je napájaný na predchádzajúci tak, že sa napojí na kolmú hranu vzhľadom na predchádzajúci spoj. Rovnako môžeme tvoriť kaleidocykly tvorené z párneho alebo nepárneho počtu štvorstenov. Čím viac telies bude kaleidocyklus obsahovať, tým bude menej foremnejší.
Okrem štvorstenov je možné na tvorbu kaleidocyklu použiť aj ihlany tak, že aspoň jedna poloha kaleidocyklu sa bude dať vpísať do kocky.
Spoločnou vlastnosťou je, že sa jednoduchým otáčaním do vnútra alebo von dostávame ďalšie polohy, ktoré sa po pár otočeniach začínajú opakovať. A taktiež priesečníky párnych resp. nepárnych pántov sa pohybujú po priamke prechádzajúcej stredom.
Kocka GeoBender je špeciálnym typom kaleidocyklu, pretože je tvorený z ihlanov, ktoré sú spojené do kruhu, ale odlišuje sa v spôsobe otáčania. Pretože na ďalšiu polohu je potrebné vykonať algoritmus pohybov namiesto jednoduchého točenia do vnútra alebo von.

2.2 Ako vznikne kocka GeoBender

Podľa Andreasa Hoenigschmida [1] dostaneme kocku GeoBender rezaním kocky rovinami prechádzajúcimi jej uhlopriečkami. Podľa nás je potrebné kocku rezať rovinami za splnenia určitých podmienok.

Definícia 1. *Kocka GeoBender pozostáva z 12 rovnakých ihlanov. Ihlany dostaneme úplným rezom kocky tromi rovinami a rezom odrezkov*[2] *rovinami, ktoré na ne nie sú kolmé.*

Keďže transformáciou kocky GeoBender dostávame rôzne polohy, ktoré sú súmerné. Tak ihlany, z ktorých pozostáva sú rovnaké (alebo z dvoch šestíc ihlanov, ktoré sme mohli dostať rezom šiestich ihlanov v dôkaze vety 1.)

Veta 1. *Kocka GeoBender má nasledujúce vlastnosti:*

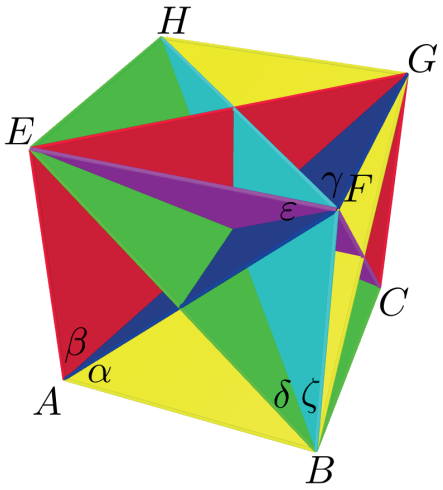
Vlastnosť 1. *Všetky ihlany, z ktorých pozostáva kocka GeoBender, sú rovnaké.*

Vlastnosť 2. *Kocka GeoBender má 12 pántov, ktoré sú hranami kocky.*

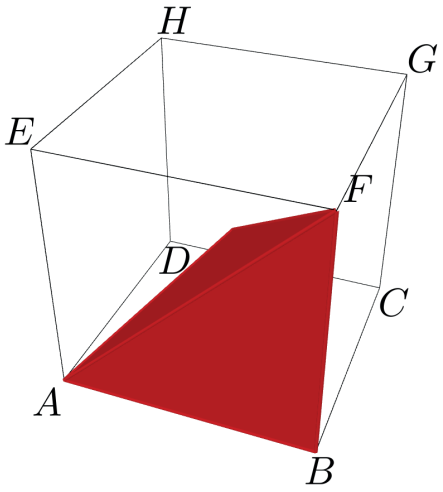
Vlastnosť 3. *Usporiadanie ihlanov v kocke GeoBender je jednoznačné.*

[1] *Pozn.:* Autor GeoBender kocky

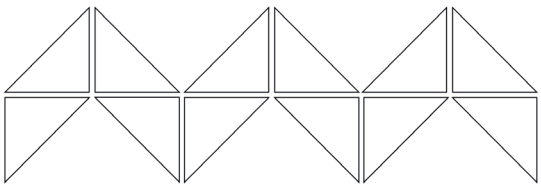
[2] *Odrezok:* Časť geometrického trojrozmerného útvaru, ktorý dostaneme po reze telesa danou rovinou



Obr. 3: Rez kocky.



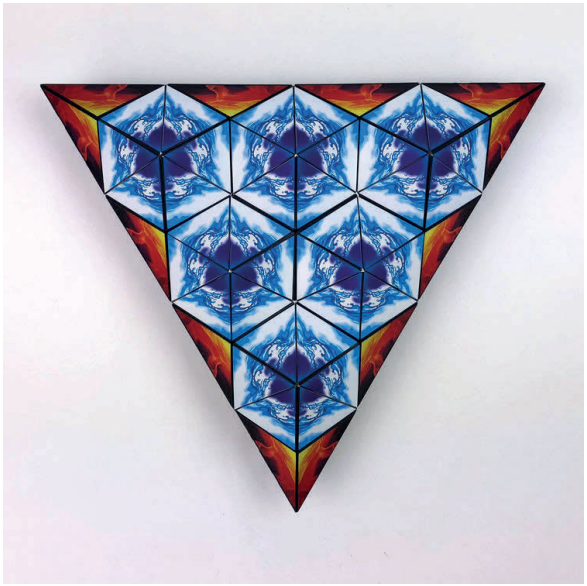
Obr. 4: Tvoriaci ihlan.



Obr. 5: Schéma rozloženia ihlanov.

Pre jednoduchšiu manipuláciu s ihlanmi vieme kocku GeoBender z ihlanov vyskladať podľa schémy na obr. 10. Ľahko si vieme overiť, že aj v tejto schéme platí otáčanie, ktoré sme si v predchádzajúcom dôkaze zaviedli.

Kocka GeoBender je základnou kockou modelovania telies z GeoBender. Základnú sadu dostaneme rozšírením o tri kocky, túto základnú sadu opäť vieme rozšíriť o ďalších 12 kociek. Teda jednotlivé sady kociek GeoBender, z ktorých vieme skladať dostávame ako mocniny štvorky 4^0x kocka, 4^1x kocka, 4^2x kocka, ... 4^nx kocka GeoBender. V rámci týchto sád vieme vyskladávať okrem zakladných útvarom aj jednoduchšie fraktály, ale aj iné trojrozmerné obrazce.



Obr. 6: Kocka GeoBender.

3 Rozvoj geometrického myslenia

Nakoľko sa v praktickej časti práce venujeme návrhu aktivít pre žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov stredných škôl. Tieto aktivity sú gradovane navrhnuté vzhľadom na kategóriu, v ktorej sa vyskytujú a zároveň sa vyskytuje určité gradovanie medzi kategóriami. Napríklad v prvej a štvrtej (poslednej) kategórii sa nachádza zistenie uhla medzi dvomi úsečkami.

Vzhľadom na obsahovú podobnosť zadaní, ale odlišnosť náročnosti riešenia môžeme naše zadania a kategórie roztriediť podľa van Hieleho úrovni

geometrického myslenia.

3.1 Van Hieleho úrovne geometrického myslenia

Manželia a pedagógovia van Hieleovci začiatkom druhej polovice minulého storočia skúmali zmeny v porozumení žiakov, na základe nových pojmov z geometrie, ktoré sa naučili.

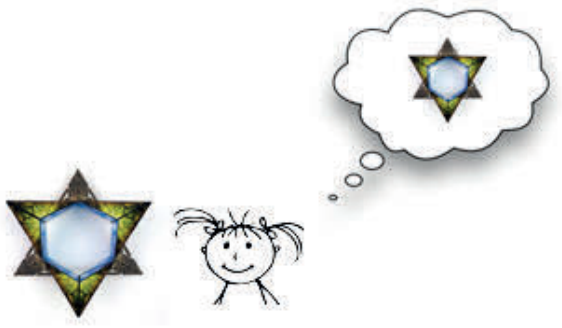
Keďže podľa Piagetovej teórie kognitívneho vývinu nebolo možné presne zaradiť žiakov podľa ich kognitívnych schopností, resp. jeho štádia nemali rovnaký rozsah pre rôznu náročnosť učiva, ktoré sa žiaci učia na matematike, na základe čoho van Hieleovci navrhli 5 úrovni geometrického myslenia. Pričom nie je možné niektorú úroveň preskočiť a žiak nemusí dosiahnuť všetky úrovne.

Čím upresnili a vymedzili nie len úrovne geometrického myslenia, ale rozdelili aj rozvoj abstraktného myslenia do viacerých úrovní, kým u Piagetovych štádiách dochádzalo k rozvoju abstraktného myslenia v poslednom štádiu a to v štádiu formálnych operácii, do ktorého sa žiak dostáva približne v 12 roku, tak u Hieleovho modelu sa s rozvojom abstraktného myslenia žiak stretne v 2. úrovni, čím sa vytvorilo škálovanie žiakov približne od 7.ročníka ZŠ až po študentov VŠ.

- 0.úroveň **Vizualizácia**
- 1.úroveň **Analýza**
- 2.úroveň **Neformálna dedukcia**
- 3.úroveň **Formálna dedukcia**
- 4.úroveň **Rigorózność'**

0.úroveň - Vizuálizácia

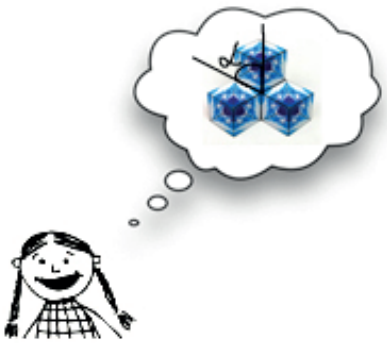
Táto úroveň je typická pre najmladších žiakov. Už v materských školách sú žiaci schopní, na základe vzhľadu útvarov, rozoznávať a identifikovať rovinné (dvojrozmerné) a priestorové (trojrozmerné) geometrické útvary. Žiaci musia útvar vidieť, ohmatať si ho, aby vedeli povedať bližšie informácie o ňom. Bez vizuálneho kontaktu nevedia opísať vlastnosti predložených útvarov, pričom útvary popisu a porovnávajú s inými telesami, ktoré už poznajú. Sú schopní odlíšiť trojuholník od štvoruholníka, resp. kocku od hranola, ale len v tom prípade, ak sú útvary natočené tak, že sa dá jednoznačne povedať, na aké teleso sa im predložený útvar podobá.



Obr. 7: 0.úroveň - Vizuálizácia

1.úroveň - Analýza

Túto úroveň dosahujú žiaci nižších ročníkov druhého stupňa základných škôl. Oproti predchádzajúcej úrovni už sú žiaci schopní porovnávať útvary na základe ich vlastnosti a nie podľa toho, na aké teleso sa im útvar podobá. Sú si vedomí toho, že všetky útvary so spoločnými vlastnosťami patria do jednej kategórie a teda všetky útvary vieme roztriediť do rôznych kategórií na základe spoločných vlastnosti útvarov. Zároveň sa začína rozvíjať abstraktné myslenie a žiaci si útvar mnohokrát predstaviť aj bez bezprostrednej vizualizácie útvaru, teda Napríklad vedia triediť trojuholníky podľa viet SSS, SUS, USU, alebo su schopní triediť hranoly a ihlany podľa toho, aký n-uholník tvorí ich podstavu.



Obr. 8: 1.úroveň - Analýza

2.úroveň - Neformálna dedukcia

Túto úroveň dosahuje väčšina žiakov druhého stupňa na základnej škole. Žiak používa jednoduchú argumentáciu na odvodenie vlastnosti geometrických út-

var, ná základe čoho vie jednoducho (na základe vlastností) odvodiť dvoj a troj rozmerné geometrické útvary. (Napríklad vieme, že dvojice protiľahlých strán štvoruholníka sú zhodné) Teda vieme povedať, že ak v štvoruholníku so dve protiľahlé strany rovnobežné, tak aj zvyšná dvojica strán musí byť rovnobežná a tak isto musia mať aj rovnakú veľkosť. Žiaci ešte nepoužívajú dôkazy, ale logickým myslením vytvárajú argumenty, ktorými vedia obhájiť dané tvrdenia.

Obr. 9: 2.úroveň - Neformálna dedukcia

3.úroveň - Formálna dedukcia

Túto úroveň dosahujú žiaci stredných škôl. Abstraktné myslenie je už plne rozvinuté, ale žiaci napríklad nechápu neeklidovskej geometrii. Žiaci sú schopní jednoduchých dôkazov a na tvorbu dôkazu už nepotrebujú vizuálny kontakt s daným útvarom. Napríklad je žiak schopný odvodiť Eulerovu vetu, lebo vie určiť, na základe predchádzajúcich skúseností koľko vrcholov, hrán a stien má mnohosten a aký je medzi nimi vzťah.

4.úroveň - Rigoróznosť

Táto úroveň je typická pre študentov vysokých škôl. Žiaci porovnávajú rôzne geometrické teórie a hypotézy. Žiak je schopný odvodzovať zadania pomocou definícií, viet a dôkazov. Rovnako vie pracovať napríklad aj s neeuklidovskou geometriou. (Ministry of education, 2005, str. 19)

3.2 Didaktická hra

Definícii didaktických hier existuje mnoho, uveďme si aspoň jednu z nich. P. Vankúš (Netradičné metódy

Obr. 10: 3.úroveň - Formálna dedukcia

rozvíjania predstavivosti v matematike, 2013, str. 57) uvádza, že didaktická hra je „činnosť žiakov a učiteľa, ktorá sleduje isté didaktické ciele. Žiaci si spravidla tieto ciele neuvedomujú. Motiváciou ich činnosti je radosť z jej vykonávania, súťaživosť, možnosť práce pre prospech tímu, sebarealizácia...“

3.3 Hlavolam

Nakoľko je kocka GeoBender hlavolam, tak si ho zadefinujme podľa I.Ochodničanovej (Vplyv didaktických hier a hlavolamov na vyučovanie matematiky, 2018, str. 27) ako: "...hlavolam, budeme chápať ako špeciálny typ didaktických hier. V hlavolamoch sa kladie dôraz na myšlienkovú aktivitu žiakov, ktorá je motivovaná snahou vyriešiť špecifický problém."

4 Aktivity s kockou GeoBender

V tejto časti príspevku si uvedieme zadania z aktivít, ktoré sme navrhli. Aktivity sú rozdelené do štyroch vekových úrovni, sú to tieto:

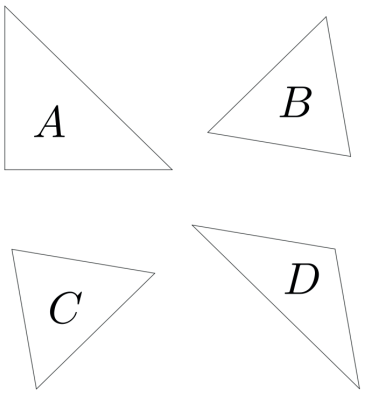
- 5.-7. ročník ZŠ
- 7.-9. ročník ZŠ
- 9. ročník ZŠ - 2. ročník SŠ
- 2.-4. ročník SŠ

Každá úroveň sa skladá z troch etáp, prvou etapou je tvorba kocky, druhou etapou je riešenie zadaní a treťou etapou je zhrnutie a dotazník. Pri návrhu sme zohľadňovali čo má žiak, v prostrednom ročníku vedieť. Mladší žiaci dostávajú nápovedy a starší by to

mali zvládnúť bez problémov
Aby sme videli rozdiel medzi jednotlivými úrovňami, tak si konkrétne zadania uvedieme podľa tematických celkom, do ktorých patria.

Konštrukčné úlohy:

5.-7. ročník ZŠ Zostrojte kocku GeoBender tak, že vystrihnete trojuholníky z prílohy trojuholníky a vytvoríte 12 rovnakých ihlanov. Jeden ihlan sa skladá z trojuholníka A, B, C a D. Trojuholník A si vyfarbi červenou, trojuholníky B a C modrou a trojuholník D zelenou farbou. Na ihlany si nalep kúsok suchého zipsu tak, že na 6 ihlanov použiješ jemnú časť a na zvyšných 6 ihlanov drsnú časť suchého zipsu. Suchý zips nalep do stredu (ťažiska, ortocentra) trojuholníka.



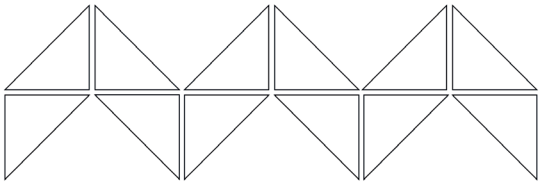
Obr. 11: Príloha trojuholníky.

7.-9. ročník ZŠ Zostrojte kocku GeoBender tak, že si vytvoríš sieť ihlanu podľa nasledujúceho postupu konštrukcie a vytvorenú sieť si skopíruješ, aby si mal 12 sieti ihlanu.

Postup konštrukcie:

1. $AB; |AB| = 10cm$;
2. $AX; |\sphericalangle BAX| = 90°$;
3. $k_1; k_1(A, r = 10cm)$;
4. $C, C \in AX \cap k_1$;
5. $\triangle ABC$
6. $BY; |\sphericalangle CBY| = 90°$;
7. $k_2; k_2(B, r = 10cm)$;
8. $A', A' \in AX \cap k_2$;
9. $\triangle BA'C$
10. $CZ; |\sphericalangle BCX| = 90°$;
11. $k_3; k_3(C, r = 10cm)$;
12. $A'', A'' \in AX \cap k_3$;
13. $\triangle BA''C$

Ihlan vytvor tak, že vrcholy A, A', A'' spojíš a vytvoríš 1 vrchol. Následne si vytvor zvyšných 11 ihlanov. Ulož ich podľa nasledujúcej schémy a susedné hrany zlep dokopy. Spojené ihlany ulož do kocky a zlep aj poslednú hranu.



Obr. 12: Schéma siete.

9. ročník ZŠ-2. ročník SŠ Zostrojte kocku GeoBender tak, že z jednej steny kocky vieš vytvoriť dve podstavy 3 bokých ihlanov a vrcholy ihlanov sú stredom kocky. Dĺžka hrany kocky je 10 cm. Následne si vytvor zvyšných 11 ihlanov. Ulož ich podľa nasledujúcej schémy a susedné hrany zlep dokopy. Spojené ihlany ulož do kocky a zlep aj poslednú hranu.

2.-4. ročník SŠ Vytvorte kocku GeoBender tak, že budete rezať kocku $ABCDEFGH$ rovinami AEG, AHG a ACG. Dostanete šesť telies, každé rozrežte na dva zhodné ihlany tak, aby ste neporušili vonkajšiu štruktúru, ktorá vám vznikla rezmi danými rovinami.

Dĺžka hrán a veľkosť uhlov:

5.-7. ročník ZŠ Odmerajte dĺžky všetkých strán trojuholníkov A, B, C, D a zapíšte ich do tabuľky 1. Výsledky zapíšte v mm. Odmerajte veľkosti všetkých uhlov a zapíšte ich do tabuľky 2. Veľkosti usporiadajte vzostupne.

7.-9. ročník ZŠ Odmerajte dĺžky všetkých strán trojuholníkov A, B, C, D a zapíšte ich do tabuľky 1. Výsledky zapíšte v mm. Odmerajte veľkosti všetkých uhlov a zapíšte ich do tabuľky 2. Zaokrúhľujte na celé stupne. Dokážte, že platí trojuholníková nerovnosť. Pokúste sa ukázať, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku tvorí priamy uhol.

9. ročník ZŠ-2. ročník SŠ Vypočítajte dĺžky hrán a

veľkosti uhlov medzi hranami ihlanu. Použite sieť z konštrukcie. Viete, že kocka GeoBender má hranu dlhú 10 cm.

2.-4. ročník SŠ Vypočítajte dĺžky hrán a veľkosti uhlov medzi hranami ihlanu. Pokúste sa použiť čo najmenej Pytagorovu vetu a goniometrické funkcie pre pravouhlý trojuholník. Viete, že kocka GeoBender má hranu dlhú a cm.

Obr. 13: Poloha 1.

Obr. 14: Poloha 2.

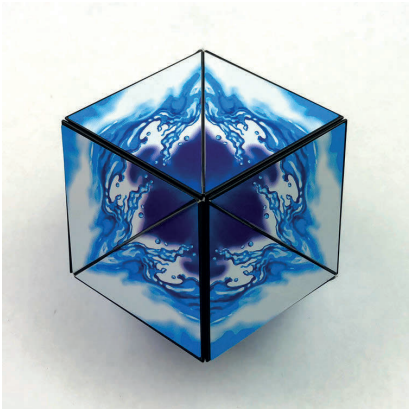
Eulerova veta: 5.-7. ročník ZŠ Vymodeluj všetky polohy a sčítaj koľko vrcholov, hrán a stien obsahujú. Svoj odhad a zistenie zapíš do tabuľky

9. ročník ZŠ-2. ročník SŠ Vymodeluj všetky polohy a urč (bez počítania) koľko vrcholov, hrán a stien obsahujú. Ďalej skús overiť či platí Eulerova veta t.j. $V - H + S = 2$

2.-4. ročník SŠ Napíš koľko vrcholov, hrán a

Obr. 15: Poloha 3.

Obr. 16: Poloha 4.



Obr. 17: Poloha 5.

stien obsahujú jednotlivé polohy kocky GeoBender. Over či platí Eulerova veta. Svoje zistenie zapíš do tabuľky.

Objem a povrch telesa:

7.-9. ročník ZŠ Vypočítajte povrch a objem jednotlivých polôh, potrebné dĺžky si odmerajte.

9. ročník ZŠ-2. ročník SŠ Vypočítajte objem (bez otvorov a dier) a povrch jednotlivých polôh. Pre kocku s dĺžkou hrany 10. Svoje výsledky zapíšte do tabuľky, výsledky nechajte v tvare s odmocninou.

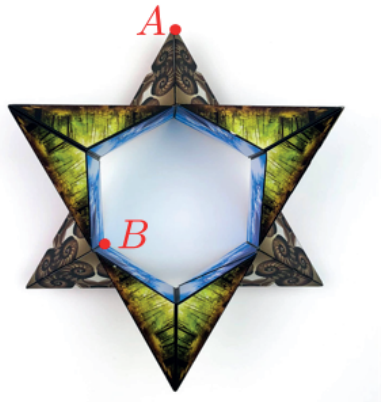
Akú najmenšiu krabicu potrebuješ na zabalenie jednotlivých polôh kocky GeoBender (rozmery krabice si odmeraj). Svoje výsledky zapíš do tabuľky. **2.-4. ročník SŠ** Vypočítajte objem (s otvormi a dierami) a povrch jednotlivých polôh. Pre kocku s dĺžkou hrany a cm. Svoje výsledky zapíšte do tabuľky, výsledky nechajte v tvare s odmocninou. Akú najmenšiu krabicu potrebuješ na zabalenie jednotlivých polôh kocky GeoBender (rozmery krabice vypočítaj). Svoje výsledky zapíš do tabuľky.

Symetria:

5.-7. ročník ZŠ Na obrázkoch polôh kocky GeoBender určte osovú a stredovú súmernosť.

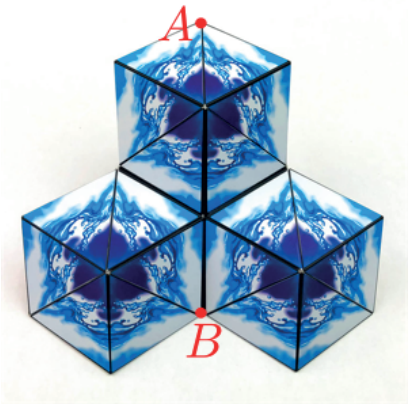
9. ročník ZŠ-2. ročník SŠ Na obrázkoch polôh kocky GeoBender určte prvky súmernosti, prípadne ďalšie zhodné zobrazenia, ktorými dostaneme tieto obrázky. **2.-4. ročník SŠ** Určte všetky prvky súmernosti, otočenia, alebo posunutia v rovine a v priestore.

Teória grafov:

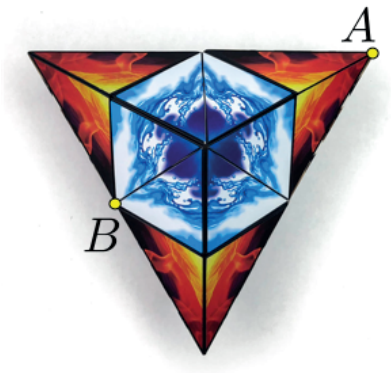


Obr. 18: Trasa 1.

5.-7. ročník ZŠ Odmerajte pomocou špagátu vzdialenosti medzi bodmi A a B na trasách 1. až 3.:



Obr. 19: Trasa 2.



Obr. 20: Trasa 3.

- po hranách,
- po telese (využívate stred hrany),
- vzdušnou čiarou.

Svoje zistenie zapíšte do tabuľky **7.-9. ročník ZŠ** Vypočítajte vzdialenosti medzi bodmi A a B na trasách 1. až 3., výsledky zaokrúhlite na desatiny:

- po hranách,
- po telese (využívate stred hrany).

Svoje zistenie zapíšte do tabuľky. **9. ročník ZŠ-2. ročník SŠ** Vypočítajte vzdialenosti medzi bodmi A a B na trasách 1. až 3., výsledky nechajte v tvare s odmocninou:

- po hranách,
- po telese (využívate stred hrany).

Svoje zistenie zapíšte do tabuľky. **2.-4. ročník SŠ** Vypočítajte vzdialenosti medzi bodmi A a B na trasách 1. až 3.:

- po hranách,
- po telese (využívate stred hrany).

Svoje zistenie zapíš do tabuľky.
Nájdi najkratšiu a najdlhšiu cestu medzi bodmi A a B (po hranách).
Medzi jednotlivými kategóriami môžeme vidieť, ako sa stupňuje náročnosť zadaní, ale obsahovo sú podobné.

Záver

V príspevku sme sa venovali problematike kocky GeoBender a návrhu sady zadaní k nej. V prvej časti práce sme si popísali kocku GeoBender a matematiku ukrytú v nej. Ďalej sme si uviedli definíciu úrovní geometrického myslenia, didaktickej hry a hlavolamu. V poslednej časti sme si uviedli zadania ku kocke GeoBender.
Cieľom práce bol návrh aktivít a oboznámenie sa s kockou GeoBender. Naše aktivity neboli testované, preto považujem za vhodné ich v ďalšej práci otestovať.
Ďalej by sa v práci dalo pokračovať rozšírením zadaní, ich hlbšou analýzou, rozborom a zaradením napr. pomocou úrovni geometrického myslenia. Taktiež by sa dalo pokračovať kvalitatívnym výskumom, keďže prvá etapa aktivít je náročnejšia na čas.

Poďakovanie

Chcem sa poďakovať vedúcej práce, ktorá odborne usmerňovala prácu a venovala jej svoj čas a energiu.

Literatúra

Jaroslava Brincková, Viera Uherčíková, Peter Vankúš, (2013) *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike*, Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, ISBN: 978-80-8147-019-6, 2013, s. 98
Ministry of education, (2005) *A Guide a Effective Instruction in Mathematics – Geometry and Spatial Sence*, Ontario, Queen's Printer for Ontario, ISBN 0-7794-8119-4, 2005, s. 191
Ivana Ochodničanová, (2018) *Vplyv didaktických hier a hlavolamov na vyučovanie matematiky - dizertačná práca*, Bratislava, s. 121
Ellen Pawlowski, (2008) *Umstülpungen – konkret und virtuell - Wissenschaftliche Prüfungsarbeit*, Kaiserslautern, s. 80

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 148–154
ISBN 978-8081470936, © 2019 Petra Javorková

Spôsoby rozvoja priestorovej predstavivosti pri vyučovaní na základnej škole

Petra Javorková[1]*
Školiteľ: Monika Dillingerová[2]‡

[1] KDPV, PriF UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava
[2] KAGDM, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

V našom príspevku sa zaoberáme problematikou priestorovej predstavivosti žiakov na základnej škole. Hlavným cieľom našej práce je vlastný návrh pracovného listu, ktorý má slúžiť na rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov. Pracovný list s témou rytieri je vytvorený kombináciou viacerých pomôcok, ktoré slúžia na rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Určený je pre žiakov 6. ročníka základnej školy. Na základe návrhu bol na siedmich žiakoch zrealizovaný experiment. Pozorovania a výsledky experimentu sme pretavili do úprav a novej verzie pracovného listu. Pre učiteľa opisujeme zameranie jednotlivých úloh, problémy s ich riešením a dávame odporúčania.

Kľúčové slová: priestorová predstavivosť, pracovný list, pomôcka na rozvoj predstavivosti

1 Priestorová predstavivosť

Žijeme v trojrozmernom priestore obklopení mnohými predmetmi, ktoré sú súčasťou nášho každodenného života. Priamo si neuvedomujeme že sa neustále stretávame s priestorovou predstavivosťou, ale je ňou vnímanie usporiadania týchto predmetov, ich tvar, veľkosť, poloha v priestore. Od ranného veku deti rozvíjajú túto predstavivosť, či už hrou napríklad s kockami, legom, rôznymi skladačkami a mnohými ďalšími hrami, ktoré ich podnecujú zaoberať sa vnímaním priestoru ako takého. V neskoršom veku priestorovú predstavivosť potrebujeme napríklad pri skúškach z autoškoly, pri usporiadaní nábytku v byte, ale taktiež vo väčšine zamestnaní, najmä čo sa týka technických odborov. Jednoducho priestorová predstavivosť je dôležitá súčasť našich životov a preto považujeme za potrebné túto predstavivosť rozvíjať.

1.1 Vymedzenie pojmu priestorová predstavivosť

Od známych autorov poznáme viacero možných definícií priestorovej predstavivosti, napríklad Hejný [1990] priestorovú predstavivosť vníma ako: „Niečo, čo nám umožňuje vidieť to, čo ešte nie je – teda vytvárať si predstavy geometrických objektov a ich rozmiestnenie; vedieť v predstave s týmito objektami manipulovať.“

Priestorová predstavivosť je úzko spojená s pojmom geometrická predstavivosť. V didaktike matematiky pojem geometrická predstavivosť označuje priestorovú predstavivosť v geometrii. Je to schopnosť vybaviť si :

1. polohu v priestore a veľkosť geometrických útvarov,
2. útvar v rozdielnej polohe ako v pôvodnej,
3. zmenu veľkosti, tvaru, štruktúry, a iné vlastnosti útvaru,
4. útvary trojrozmerne na základe slovného opisu alebo rovinného obrazu,
5. rovinný obraz útvaru, skôr videného v priestore. [podľa Lehoťanová, 2009]

V ďalšom spomíname pracovný list, ktorý slúži na rozvoj práve tejto predstavivosti.

2 Návrh pracovného listu

Pracovné listy nemusia slúžiť len na vypĺňanie, kedy žiak vypracúva dané úlohy na papier. Môžu byť taktiež zadaním k prácnym úlohám, pričom žiaci využívajú rôzne pomôcky, ktoré potrebujú na splnenie úlohy v pracovnom liste. Náš navrhnutý pracovný list má presne takúto formu. Zadania daných úloh smerujú k činnostiam, ktoré sú spojené so skladačkami a hlavolamami. Tie majú žiakovi poskytnúť rozvoj priestorovej predstavivosti.

* javorkova.pe@gmail.com
‡ monika.dillingerova@fmph.uniba.sk

Pracovný list sme nezamerali len na jednu pomôcku, ale zvolili sme úlohy s kombináciou rôznych pomôcok. Obmieňanie pomôcok slúži k motivácii žiakov, pretože každého žiaka zaujme niečo iné. Žiak má možnosť nájsť pomôcku, s ktorou ho práca a plnenie úloh baví. Toto by nebolo možné, ak by sme pracovný list zamerali len na jednu stavebnicu. Pracovný list napomáha k správnej psychohygiene vyučovacieho procesu, pretože žiak strieda rôzne činnosti, ktoré si dané úlohy vyžadujú a tiež manipuluje v 2D a 3D priestore. Rôznorodosť úloh umožňuje žiakovi nájsť niečo, v čom vyniká resp. čo ho zaujíma a darí sa mu v tom. Ak sa mu niektorá úloha zdá ťažká a neriešiteľná, alebo mu nevyhovuje práca s danou pomôckou, tak siahne po inej, ktorá ho zaujme.

Náš pracovný list sme vytvorili z pomôcok, ktoré rozvíjajú priestorovú predstavivosť. Pracovný list je vo výslednej forme uvedený v podkapitole 2.1. Náročnosť pracovného listu sme navrhli tak, aby bol vhodný pre žiakov konkrétneho ročníka, v našom prípade pre žiakov 6. ročníka základnej školy. Zvolili sme tému pracovného listu - Rytieri, aby úlohy boli pre deti pútavejšie a zaujímavejšie. Jednotlivé úlohy pracovného listu sme dali otestovať siedmim žiakom zo 6. ročníka základnej školy (dve dievčatá a päť chlapcov), aby sme následne určili časovú náročnosť a aby sme vedeli prispôsobiť úlohy na vyučovaciu hodinu.

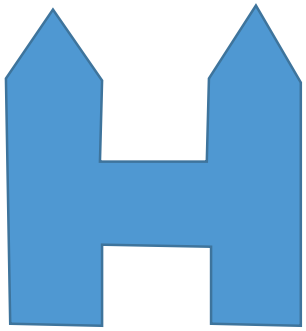
2.1 Pracovný list – rozvoj priestorovej predstavivosti

Vážený rytier, vítam ťa v našom mestečku zvanom Priestorovany. Náš drahý kráľ Hranold má už svoje roky a preto svorne hľadá svojho nástupcu. Na to, aby si získal trón a žezlo kráľovo, musíš splniť nasledovné úlohy. Najdôležitejšia je však tá, aby si vyslobodil jeho jedinú dcéru princeznú Predstavienku. Preto ti prajem veľké šťastie a dostatok špeciálnej schopnosti - priestorovej predstavivosti!

1. Úloha - Hradobná brána

Po obliehaní cudzími vojskami bola porušená hlavná brána hradu. Tvojou úlohou je vybrať vhodný materiál a podľa návodu šikovných stavbárov postaviť novú bránu.

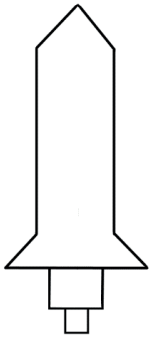
Na hradbu potrebuješ 68 paličiek a 34 guľôčok, ktorými paličky pospájaš. Hradba má podobný tvar ako písmeno H. Tvoria ju dva stĺpy, každý sa skladá z troch spojených kociek a tieto dva stĺpy prepája jedna kocka v strede. Na vrchu stĺpov sa nachádza veža, tvorená 4 paličkami, ktoré sú hore spojené v jednom bode guľôčkou. Pohľad na prednú stenu brány vidíš na obrázku.



Obr. 1: Predná stena brány

2. Úloha – Meč

Táto úloha už naznačuje blížiace sa nebezpečenstvo. Lebo vedz že nato aby si sa dopátral k stratenej princeznej budeš musieť skoliť draka. Preto je nutné aby si mal poriadnu výzbroj. Musíš ukovať poriadny meč, aký vidíš na obrázku.



Obr. 2: Meč

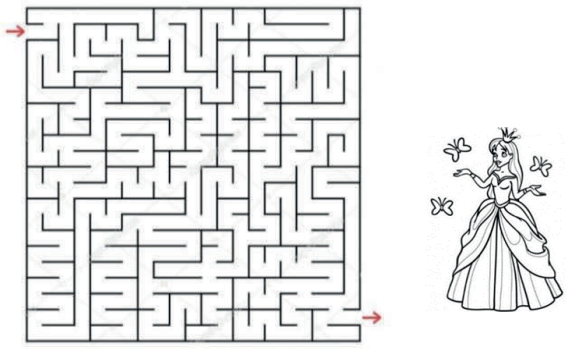
Tento meč vytvoríš z geometrických útvarov, ktoré máš k dispozícii. Skús rozmiestniť tieto geometrické útvary tak, aby si správne zaplnil celú plochu meča. Využiť musíš všetky geometrické útvary. Farby nech ti sú nápomocné.

3. Úloha – Drak

V ruke držíš svoju zbraň a obozretne čakáš na svojho súpera. Musíš si ho najskôr vytvoriť, aby si ho vylákal zo svojej jaskyne. Na tvorbu draka potrebuješ špajle a plastelínu. Draka môžeš vytvoriť podľa vlastnej fantázie tak, že z plastelíny si urobíš guľôčky, ktoré potom pospájaš špajľami a vytvoríš draka. Pozor aby tvoj drak dokázal stáť na svojich nohách.

4. Úloha - Labyrint

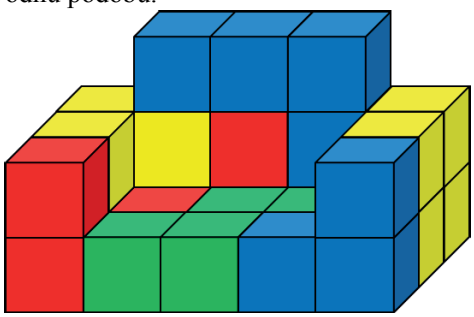
Gratulujem ozrutného draka si porazil. Ukázalo sa však, že drak neväznil princeznú Predstavienku v svojej jaskyni. Jaskyňa v sebe ukrývala chodbu, ktorá viedla do začarovaného labyrintu. Nájdi správnu cestu ktorá ťa zavedie za princeznou.



Obr. 3: Labyrint a princezná

5. Úloha - Trón

Svoj cieľ máš na dosah. Posledná úloha a kráľ ti zverí svoje kráľovstvo a ruku princeznej k tomu. Zákerná choroba pripútala kráľa na lôžko, jeho trón bol počas obliehaní nestrážený, lebo bol v komnate blízko hradobnej brány. Táto komnata bola narušená a trón sa rozpadol na niekoľko častí. Poskladaj si trón, na ktorý zasadneš ako budúci kráľ a panuj nad našimi Priestorovanmi spravodlivo a oddane. Trón môžeš vidieť na obrázku. Skús poukladať jednotlivé časti tak, aby si získal jeho pôvodnú podobu.



Obr. 4: Trón

2.2 Zhodnotenie pracovného listu

Ako 1. úlohu sme zvoli prácu so stavebnicou Geomag [https://www.geomagworld.com/de/classic]. Úlohou žiakov bolo postaviť hradobnú bránu pričom zadanie úlohy bol slovný opis brány, ku ktorému sme priložili obrázok s prednou stenou brány. Najväčším problémom pre žiakov pri tejto úlohe bolo uvedomiť si, ako zostavia prvú kocku, najmä pre tých, ktorí sa so stavebnicou Geomag ešte nestretli. Niektorí sa domnievali, že kocka v zadaní predstavuje štvorec, a tak začali bránu stavať v 2D, čo bolo nesprávne. Preto sme niektorým poradili, že jedna kocka má rozmer 1x1x1 paličiek. Ďalším problémom pri stavaní brány bolo, že čím vyššie žiaci pokračovali v stavaní, tým nestabilnejšia brána bola a začínala sa prekrúcať a príťažlivosť magnetov spôsobila, že sa celá stavba rozpadla.

Výsledok úlohy je uvedený na Obr. 5. Priemerný čas trvania úlohy bol 9,9 minúty, pričom najkratší čas úloha trvala 8,54 minút a najdlhšie 13,3 minúty. Táto úloha žiakom netrvala dlho preto, že by ju vyslovene nevedeli riešiť, ale pretože zručnosti a schopnosti narábania s touto stavebnicou boli u každého individuálne. Na túto úlohu by sme z toho dôvodu pri vyučovacej hodine vyhradili približne 11 minút.

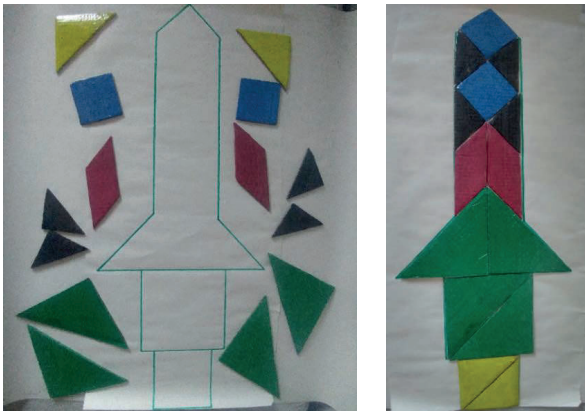
Obr. 5: Geomag - Brána

Úloha so stavebnicou Geomag u detí rozvíja 3D predstavivosť, v zadaní majú obrázok prednej steny v 2D, čo im sťažilo predstavovanie si celej brány, na rozdiel od toho, keby tam bránu mali nakreslenú v 3D. Bránu tvorili jednotlivé kocky, predstava u žiakov niekedy bola že kocka je štvorec, všimli sme si, že to bolo najmä u dievčat. Ak, už prišli na to, čo myslíme pod pojmom kocka, teda 12 paličiek a 8 guľôčok, potom už vedeli ako v úlohe pokračovať. Úloha tiež podporovala schopnosť stavať konštrukcie, ktorá je veľmi úzko spojená s priestorovou predstavivosťou. Ak si žiak dokáže teleso predstaviť, tak príde na to ako ho aj zostaviť resp. zostrojiť. Pri tejto úlohe si žiaci mohli tiež uvedomiť, že brána je symetrická. Ak by sme ju rozrezali na dve časti, cez strednú kocku vertikálne, tak by sme získali dve symetricky zhodné telesá.

2. úloha bola zameraná na prácu s dvomi tangramami [https://www.tangram-channel.com/], ktoré sme vyrobili z tvrdého papiera. Úlohou žiakov bolo z dielov dvoch tangramov zostaviť meč, na základe predlohy, ktorú sme nakreslili na papier a na ňu potom jednotlivé diely prikladali (Obr. 6). Do zadania sme tiež napísali, že farby im napomôžu. Diely, ktoré mali rovnaký tvar, mali aj rovnakú farbu a boli buď priložené pri sebe alebo oproti sebe.

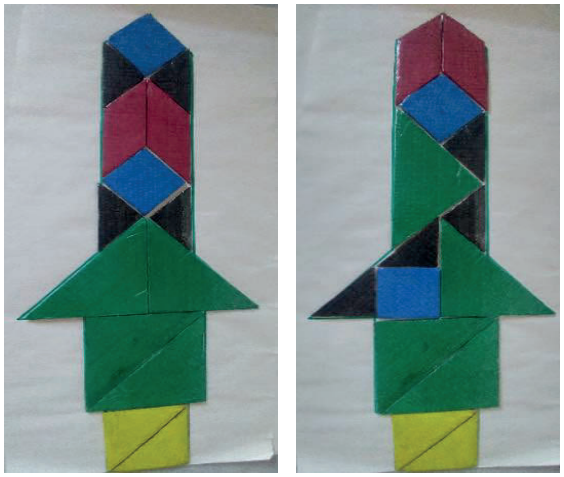
Ako sa ukázalo, táto úloha bola najnáročnejšia. Spodné dva štvorce deti zložili hneď, pretože im napadlo, že spoja dva trojuholníky k sebe. Najväčší

problém robili dva veľké zelené trojuholníky, ktoré sa mali uložiť tak, že mali pravé uhly pri sebe a takto sa mali vložiť do špic pri rukoväti meča. Pri tejto úlohe niektoré z pozorovaných detí strácali trpezlivosť, keď nevedeli ako ďalej. Úspešnosť skladania ovplyvnilo najmä to, že ak už nesprávne začali, tak nevedeli pokiaľ treba rozložiť poskladané časti resp. či začať úplne odznova. Preto keď sa žiaci nazdávali, že daná časť je zložená správe a nebola, tak sa dostali do bodu, kedy nevedeli pokračovať ďalej a museli sa zamýšľať nad tým, či doposiaľ poskladané majú správne. Preto by si úloha s mečom vyžadovala najmenej 12 minút.



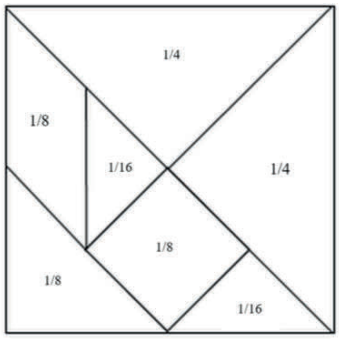
Obr. 6: Vľavo predloha, vpravo vyriešená 2. úloha

Aj napriek náročnosti sa žiakom podarilo splniť úlohu. A ako môžeme vidieť na Obr. 7, žiakom nechýbalo kreatívnosti a predstavivosti a prišli nato, že úloha nemá len jedno riešenie, ale viacej.



Obr. 7: Ďalšie riešenia 2. úlohy

Vzorové riešenie 2. úlohy má rovnako ako predchádzajúca úloha istý druh symetrie, ktorý môžeme vidieť na základe farieb (Obr.6). Úloha je zameraná na 2D predstavivosť, pretože žiaci pracujú s rovinnými útvarmi. Pri tejto úlohe je potrebné uvedomiť si obsahy jednotlivých útvarov navzájom (Obr. 8) a tiež dĺžky ich strán (dĺžky strán odvesien malých trojuholníkov sa rovnajú dĺžke strany štvorca a tiež kratšej dĺžke strany kosodĺžnika. Je to polovica odvesny veľkého trojuholníka. Čo sa týka stredného trojuholníka, dĺžka jeho prepony sa rovná dĺžke odvesien, najväčších trojuholníkov).

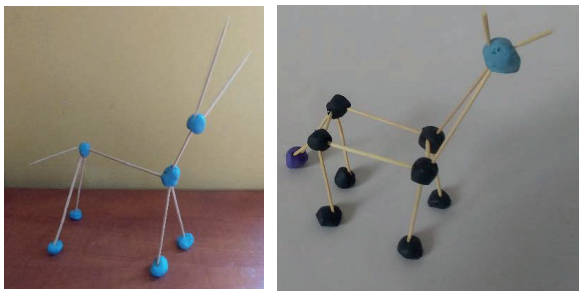


Obr. 8: Obsahy dielov tangramu

Rovnako sa tu pracuje na intuitívnej úrovni s veľkosťou uhla. Tieto informácie nie sú v prvom momente zrejmé, keď žiak prvýkrát vidí tangram. Avšak keď s ním dlhšie pracuje a skúša správne napasovať diely do predlohy, ktorú dostal, je zrejmé že príde na mnohé spojitosti týchto útvarov. Táto úloha sa zdala najťažšia zrejme z toho dôvodu, že žiaci držali tangram prvý raz v rukách a potrebovali viac času na zoznámenie sa s touto skladačkou.

Nasledujúca 3.úloha bola zameraná na detskú fantáziu a preto sme nijako nešpecifikovali ako má drak vyzerať. Uviedli sme len, akým spôsobom majú draka postaviť, teda z guľôčok plastelíny, ktoré pospájali špajľami. Zistili sme, že pri tejto úlohe bolo problematické zostaveného draka primäť stáť na nohách, táto úloha preto vyžadovala aj dávku trpezlivosti. Žiaci museli guľôčky, do ktorých zapichli špajle poriadne stlačiť, aby v nej lepšie držali. V konečnom dôsledku úloha nebola náročná, pôsobila skôr ako zábavná.

Stavba draka si vyžadovala od detí 3D predstavivosť, pretože vytvárali trojrozmerné teleso. Mohli tiež predviesť svoju kreativitu a fantáziu, pretože nemali predlohu ako má drak vyzerať. Žiaci si museli premyslieť, akým štýlom začnú stavať draka. Nebolo jednoduché, aby vydržal stáť na nohách, preto bolo nutné vedieť ho správne vyvážiť. Čas, ktorý deti venovali tejto úlohe je relatívny, pretože niektorí stavaniu draka venovali väčší čas a snahu ako iní. Preto by sme mohli zvoliť čas na túto úlohu približne 8 minút.



Obr. 9: Riešenie 3. úlohy žiakmi

Podstatou 4. úlohy bolo nájsť správnu cestu za princeznou cez labyrint [http://www.mazegenerator.net/]. Táto úloha v sebe neniesla nijakú zložitosť, mala pôsobiť tiež ako zábavka. Pokojne sme mohli použiť náročnejší labyrint, pretože čas trvania úlohy bol približne 3 minúty.

Papierový labyrint rozvíja 2D predstavivosť, pretože ide o prácu v rovine. Dieťa hľadá správnu cestu a teda musí myslieť o jeden, ale aj viacej krokov dopredu. Niektorí žiaci bezhlavo kreslili cestu, aj keď sa potom museli vracať naspäť a iní najskôr našli správnu cestu a potom začali kresliť.

Posledná 5. úloha bola venovaná práci s dielikmi, ktoré tvoria Soma kocku [http://matika.ide.sk/index.php?ut=zau&s=2]. Išlo o správne usporiadanie siedmich dielov do správneho tvaru, ktorý bol v našej úlohe kráľovský trón. Ako pomôcku sme žiakom do zadania dali obrázok trónu, aby podľa farieb určili, kde sa ktorý diel bude nachádzať. Žiaci boli veľmi šikovní a úloha im trvala najviac 6 minút. Preto sme usúdili, že sme zadanie úlohy zvolili príliš jednoduché. Našli sa však aj takí, ktorým úloha robila menšie problémy, ale nakoniec sa tiež dopracovali k riešeniu.

Ani pri tejto úlohe nechýbalo rozvíjanie predstavivosti a v tomto prípade opäť priestorovej, pretože kreslo je 3D teleso. Pre žiakov bolo podstatné uvedomiť si objem tohto telesa, teda to koľko kociek tvorí jednotlivé „podlažia“. Náročnosťou úlohy bolo, že diely zo Soma kocky sú navzájom odlišné, ani jeden nie je rovnaký. Žiaci teda museli prísť nato, ktorý do ktorého zapadá a museli prísť na ich správne rozmiestnenie.

Výsledný čas všetkých úloh spolu je približne 40 minút. Na základe čoho sme usúdili, že náš pracovný list je vhodný na jednu vyučovaciu hodinu matematiky. Vyučovacia hodina, ktorá by tomuto pracovnému listu predchádzala, by mohla slúžiť k zoznámeniu sa s jednotlivými skladačkami a pomôckami, ktoré sa využívajú v pracovnom liste, prípadne aj vlastná výroba tangramov.

Pri priebehu testovania našich úloh sme zistili, že úlohy sa žiakom páčili a privítali by podobné a zaujímavé úlohy na hodinách matematiky. Boli zaujatí rôznymi pomôckami a bavila ich práca s nimi. Niektorí však strácali trpezlivosť, keď sa im nedarilo vyriešiť úlohu, najmä pri stavaní meča. Preto sme v niektorých prípadoch mierne poradili, ale v konečnom dôsledku boli žiaci šikovní a zaujatí.

Testovaním jednotlivých úloh sme si uvedomili ich nedokonalosti, ktorým sme sa venovali v tejto kapitole. Nedostatkov polo pomerne dosť, ale teraz vieme ako úlohy správne prispôsobiť potrebám a uvažovaniu žiakov. V ďalšom sme spracovali úpravy vyplývajúce z prirodzeného experimentu a došlo aj k zmene poradia úloh, aby sa pracovný list stal efektívnejší a aby mohol lepšie plniť svoju úlohu v rozvíjaní priestorovej predstavivosti.

3 Navrhované úpravy

Pracovný list obsahuje päť úloh v poradí za sebou idú ťažká 3D Geomag - brána, ťažká 2D - meč z tangramov, ľahká ale prácna zábavka 3D - drak z plastelíny a špajlí, ľahká zábavka 2D - labyrint, ľahká (dá sa sťažiť) 3D úloha - trón. Rozhodli sme sa zmeniť poradie úloh, z toho dôvodu, aby pomôcky, ktoré sú rovnakého typu nasledovali po sebe. Tiež aby náročnosť pomôcok rovnakého typu bola najskôr ľahšia a potom ťažšia.

Navrhovali by sme, aby úlohy išli v poradí, že prvá by zostala brána, to je 3D náročná úloha, potom by sme zvolili jednoduchšiu 2D napríklad labyrint, potom by mohla ísť úloha s mečom 2D. Nasledovala by úloha s drakom, ktorá je 3D a na záver by bola úloha trónom 3D. Úlohy by nasledovali za sebou vždy ľahšia a po nej by nasledovala ťažšia, rovnakého typu buď 2D alebo 3D.

Čo sa týka jednotlivých úloh, určite sa dajú viac zdokonaliť a prispôsobiť. V úlohe, kde žiaci stavali bránu zo stavebnice Geomag bol problém so stabilitou, pretože dochádzalo k tomu, že sa stavba pokrútila a spojili sa nesprávne magnety. Preto by sme navrhli, aby žiaci využívali pri stavbe brány výplne. Tie sa dajú nasadiť medzi strany jednotlivých štvorcov, aby im stavba lepšie držala.

Pri úlohe s mečom by nebolo potrebné niečo meniť, úloha je len náročná, preto by sme žiakov mali motivovať. Upozorniť ich aj na to, že nie je chybou, keď budú úlohu riešiť dlhší čas, ale dôležité je, že nájdu správne riešenie. Úlohu, v ktorej majú žiaci vytvoriť draka z plastelíny, nie je nutné meniť. Potrebné je deti podnietiť ku kreativite, aby sa nebáli vyskúšať aj nápady, u ktorých by sa báli, že sa nevydaria. Labyrint pôsobil

skôr ako zábavka, na ňom by sme nič nemenili. Čo sa týka úlohy s trónom, táto úloha sa zdala veľmi ľahká, preto by sme obrázok žiakom dali čiernobiely alebo len pár dielov dali farebne, aby mali aspoň nejakú nápoveď.

3.1 Upravený pracovný list

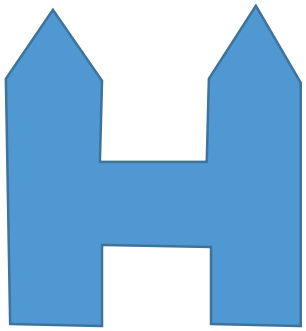
Pracovný list sme upravili na základe vyššie opísaných pozorovaní a zistení pri experimente so žiakmi 6. ročníka. Výsledný pracovný list má takúto podobu:

Vážený rytier, vítam ťa v našom mestečku zvanom Priestorovany. Náš drahý kráľ Hranold má už svoje roky a preto svorne hľadá svojho nástupcu. Na to aby si získal trón a žezlo kráľovo, musíš splniť nasledovné úlohy. Najdôležitejšia je však tá, aby si vyslobodil jeho jedinú dcéru princeznú Predstavienku. Preto ti prajem veľké šťastie a dostatok špeciálnej schopnosti - priestorovej predstavivosti!

1. Úloha – Hradobná brána

Po obliehaní cudzími vojskami bola porušená hlavná brána hradu. Tvojou úlohou je vybrať vhodný materiál a podľa návodu šikovných stavbárov postaviť novú bránu.

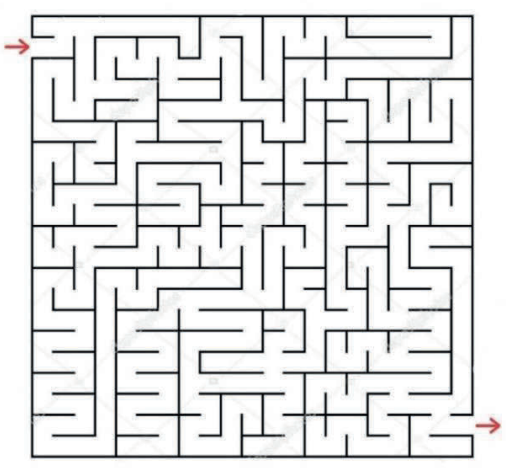
Na hradbu potrebuješ 68 paličiek a 34 guľôčok ktorými paličky pospájaš. Hradba má podobný tvar ako písmeno H. Tvoria ju dva stĺpy, každý sa skladá z troch spojených kociek a tieto dva stĺpy prepája jedna kocka v strede. Na vrchu stĺpov sa nachádza veža, tvorená 4 paličkami, ktoré sú hore spojené v jednom bode guľôčkou. Štvorce, ktoré ti vzniknú vyplň výplňami, aby ti stavby lepšie držala. Pohľad na prednú stenu brány vidíš na obrázku.



Obr. 10: Predná stena brány

2. Úloha – Labyrint

Legenda vraví, že ak nájdeš správnu cestu v začarovanom labyrinte, tak ťa dovedie k meču, ktorého sila ti pomôže poraziť ozrutného draka. Práve on väzní princeznú Predstavienku v svojej temnej jaskyni. Dokážeš nájsť, ktorá cesta vedie k meču ?

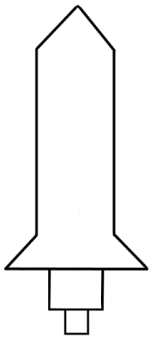


Obr. 11: Labyrint

3. Úloha – Meč

Výborne našiel si svoju zbraň, lenže po toľkých rokoch, kedy meč nemal svojho majiteľa sa rozpadol na niekoľko častí. Preto je tvojou úlohou meč opraviť, aby nadobudol opäť svoju silu a pomohol ti skoliť obávaného draka.

Tento meč opravíš pomocou geometrických útvarov, ktoré máš k dispozícii. Skús rozmiestniť tieto geometrické útvary tak, aby si správne zaplnil celú plochu meča. Využiť musíš všetky geometrické útvary. Farby nech ti sú nápomocné.



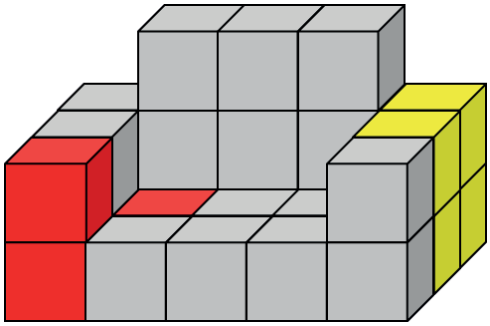
Obr. 12: Meč

4. Úloha – Drak

V ruke držíš svoj mocný meč a obozretne čakáš na svojho súpera. Musíš si ho najskôr vytvoriť aby si ho vylákal zo svojej jaskyne. Na tvorbu draka potrebuješ špajle a plastelínu. Draka môžeš vytvoriť podľa vlastnej fantázie tak, že z plastelíny si urobíš guľôčky, ktoré potom pospájaš špajľami a vytvoríš draka. Pozor aby tvoj drak dokázal stáť na svojich nohách.

5. Úloha – Trón

Svoj cieľ máš na dosah. Posledná úloha a kráľ ti zverí svoje kráľovstvo a ruku princeznej k tomu. Zákerná choroba pripútala kráľa na lôžko, jeho trón bol počas obliehaní nestrážený, lebo bol v komnate blízko hradobnej brány. Táto komnata bola narušená a trón sa rozpadol na niekoľko častí. Poskladaj si trón, na ktorý zasadneš ako budúci kráľ a panuj nad našimi Priestorovanmi spravodlivo a oddane. Trón môžeš vidieť na obrázku. Dve časti máš vyznačené farebne, tie ti napomôžu správne umiestniť aj ostatné časti.



Obr. 9: Trón

Poďakovanie

Poďakovanie patrí v prvom rade školiteľke mojej bakalárskej práce RNDr. Monike Dillingerovej, PhD. za všetok čas, ktorý mi venovala pri konzultáciách, za motiváciu a pomoc pri formulovaní mojich myšlienok.

Moje poďakovanie patrí aj žiakom 6. ročníka, ktorí sa zúčastnili môjho experimentu.

Literatúra

[Hejný, 1990] Hejný, M.: Teória vyučovania matematiky. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990, 554 s.ISBN 80-08-01344-3.

[Lehoťanová, 2009] Lehoťanová, B.: Matematika pre 1. ročník základných škôl, 1. časť. Bratislava : Aitec, 2009. ISBN 978-80-89375-10-3.

Geomag. Dostupné na: <https://www.geomagworld.com/de/classic>

Generátor na bludiská. Dostupné na: <http://www.mazegenerator.net/>

Matematické zaujímavosti – Kocka SOMA. Dostupné na: <http://matika.ide.sk/index.php?ut=zau&s=2>

Tangram chanel. Dostupné na: <https://www.tangram-channel.com/>

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 155–163
ISBN 978-8081470936, © 2019 Barbora Kubinová

Propedeutika záporných čísel formou didaktickej hry

Barbora Kubinová[1]*
Školiteľ: Monika Dillingerová[2]‡

[1] Katedra didaktiky prírodných vied, PriF UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
[2] Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

V príspevku predkladáme návrh novej didaktickej hry s tematikou záporných čísel, ktorá má slúžiť ako propedeutická hra pri zavádzaní záporných čísel do vyučovania ako aj pri osvojovaní si pravidiel práce s nimi – predovšetkým násobenia. Hra je určená pre žiakov, ktorí sa ešte so zápornými číslami nestretli, teda pre siedmakov na základných školách, resp. pre sekundy osemročných gymnázií. Môže byť použitá aj v nižších triedach. Prostredníctvom tejto hry žiakom približujeme záporné čísla, s ktorými sa môžu stretnúť aj v bežnom živote, nakoľko hrací plán predstavuje poschodia výškovej budovy. Tematické zameranie hry je zvolené tak, aby bolo pre žiakov pútavé – Hasiči. Zaradenie hry do vyučovania sme testovali v sekundách gymnázia v Malackách. V práci uvádzame aj výsledky overovania hry vo vyučovaní.

Kľúčové slová: propedeutika, didaktická hra, záporné čísla, hra

1 Úvod

Už od detstva je pre deti najprirodzenejšou činnosťou hra. Prostredníctvom hry si malé deti dokážu osvojiť veľké množstvo vecí. Práve na toto sme sa snažili nadviazať a priniesť trochu hravosti aj do vyučovania matematiky. Obohatením hry o didaktický zámer vzniká didaktická hra.

V pedagogickom slovníku je didaktická hra definovaná ako „analógia spontánnej činnosti detí, ktorá sleduje (pre žiakov nie vždy zjavným spôsobom) didaktické ciele. Môže sa odohrávať v učebni, v telocvični na ihrisku, v obci, v prírode. Má svoje pravidlá, vyžaduje priebežné riadenie, záverečné vyhodnotenie. Je určená jednotlivcom aj skupinám žiakov, pričom úloha pedagogického vedúceho máva široké rozpätie od hlavného organizátora až po pozorovateľa. Jej prednosťou je stimulačný náboj, pretože prebúdza záujem, zvyšuje angažovanosť žiakov na vykonávaných činnostiach, podnecuje ich tvorivosť, spontánnosť, spoluprácu aj súťaživosť, núti ich využívať rôzne poznatky a schopnosti, zapájať životné skúsenosti. Niektoré didaktické hry sa blížia modelovým situáciám z reálneho života.“ [Průcha, 1998].

2 Teoretické východiská

Záporné čísla sú podľa ŠVP aj iŠVP odporúčané preberať v 8. ročníku ZŠ, resp. v 3. ročníku osemročných gymnázií a to v nasledovnom rozsahu:

- vymenovať príklady použitia kladných a záporných čísel v bežnom živote
- čítať a zapisovať čísla z čítaného a počutého textu, z tabuliek a grafov
- určiť opačné číslo k ľubovoľnému číslu
- vymenovať dvojice navzájom opačných čísel
- porovnávať celé a racionálne čísla a usporadúvať ich do radov vzostupne alebo zostupne
- zobrazovať celé, desatinné kladné a záporné čísla na číselnej osi
- pracovať s absolútnou hodnotou celého, desatinného a racionálneho čísla
- sčitovať, odčitovať, násobiť a deliť celé a desatinné čísla (kladné aj záporné)
- riešiť slovné úlohy s kladným a zápornými číslami.

V súčasnosti sa na školách v Slovenskej republike používa na vyučovanie matematiky učebnica s názvom *Matematika 8,* ktorú napísali PaedDr. Ján Žabka a RNDr. Pavol Černek, CSc. Schválilo ju Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky ako učebnicu matematiky pre 8. ročník základnej školy a 3. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. Učebnica má 2 časti. Tematika záporných čísel je v týchto učebniciach sprístupňovaná žiakov prostredníctvom tém z bežného života, napr. výškové budovy s nadzemnými a podzemnými podlažiami, modelové situácie jazdy výťahom, nadmorské a podmorské výšky, majetky a dlžoby, paralela číselnej osi s teplomerom. V týchto kapitolách sa žiaci oboznámia so zápornými číslami, naučia sa ich porovnávať, usporadúvať do radov, sčitovať, odčitovať, násobiť a deliť. V druhej časti učebnice

* barbora.kubinova1995@gmail.com
‡ Monika.Dillingerova@fmph.uniba.sk

sa nestretávame už len s celými a desatinnými zápornými číslami, ale aj s číslami racionálnymi.

3 Motivácia a ciele

Tematika záporných čísel sa vyskytuje aj v mnohých spoločenských hrách, napr. *Sushizock im Gockelwok*, *Mini Hazard* a *Why first?*. Všetky tri boli vybrané na základe ich univerzálnosti v počte hráčov. Snažili sme sa, aby jeden exemplár hry zabavil čo najväčší počet hráčov a tento bol modulárny.

Na základe naštudovanej literatúry o problematike záporných čísel a predovšetkým spoločenských hier, sme sa rozhodli vytvoriť vlastnú didaktickú hru zameranú na propedeutiku záporných čísel – pravidiel pre násobenie kladných a záporných čísel.

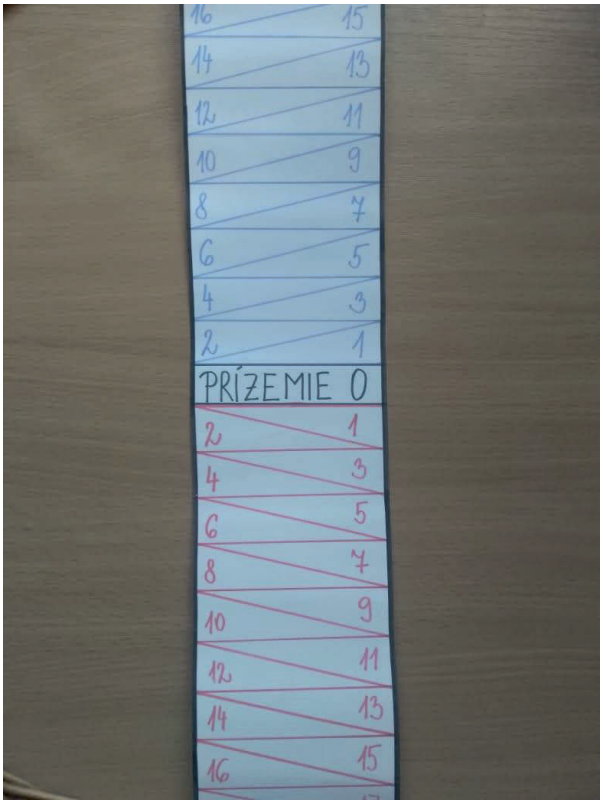
4 Tvorba vlastnej hry

4.1 Návrh a realizácia vlastnej hry

Všetky vyššie spomínané hry mali v sebe obsiahnuté len sčitovanie kladných a záporných čísel. Práve toto bolo dôvodom, prečo sme sa rozhodli v našej hre obsiahnuť nie len sčitovanie a odčitovanie, ale aj násobenie kladných čísel zápornými a násobenie záporných čísel. Zamerali sme sa predovšetkým na osvojenie si pravidiel pre násobenie dvoch čísel. Vcelku zaujímavý nám prišiel nápad využiť rôznofarebné kocky. Jedna farba reprezentovala kladné čísla, druhá záporné. Súčin sme potom dostali vynásobením čísel, ktoré padli na kockách. V našom prípade sme použili modré kocky pre kladné čísla a červené kocky pre záporné.

Nami vytvorená hra musela spĺňať určité kritériá. Chceli sme, aby hrací plán predstavoval číselnú os a zároveň, aby reprezentoval niečo, s čím sa môžu žiaci stretnúť v bežnom živote. Do tejto koncepcie sa nám najviac hodila výšková budova s nadzemnými a podzemnými podlažiami, keďže sa nachádza takmer v každom väčšom meste. Ďalším kritériom bolo, aby hra bola určená pre čo najväčší počet hráčov. Čím viac žiakov môže hrať jednu hru, tým menej skupiniek, resp. počet hier bude treba do jednej triedy vytvoriť. Keďže v triedach sa zvyčajne vyskytuje okolo 25 – 30 žiakov, museli sme vytvoriť 5 kópií hry, každú pre 6 hráčov. Nechceli sme, aby vytváranie hry bolo náročné – ani finančne, ani časovo. Nakoniec sa zrodila myšlienka vytvoriť hru o hasičoch, ktorí sa pomocou násobenia čísel, ktoré padli na kockách, musia dostať na číslo podlažia, na ktorom vypukol požiar a uhasiť ho. Hru sme pomenovali *„Horí!“*.

Hrací plán sme vyrobili z papiera. Vystrihli sme si z neho dlhý obdĺžnik, do jeho stredu sme narysovali políčko označené číslom 0. Políčko s nulou sme nakreslili čiernou farbou. Smerom hore od nuly sme nakreslili 50 políčok modrou farbou. Tieto políčka symbolizovali nadzemné podlažia, teda kladné čísla. Smerom dole od nuly sme nakreslili 50 políčok červenou farbou. Tieto políčka symbolizovali podzemné podlažia, teda záporné čísla. Zámerne sme pre podzemné podlažia nepoužili označenie čísel s mínusom, keďže hra je propedeutická a má slúžiť pri zavádzaní záporných čísel do vyučovania. 50 políčok každým smerom sa nám zdalo dostatočné množstvo keďže najvyšší možný súčin je 6 . 6 = 36. Hrací plán je znázornený na obrázku č. 1, avšak nie je celý, pretože by sa nezmestil do záberu.

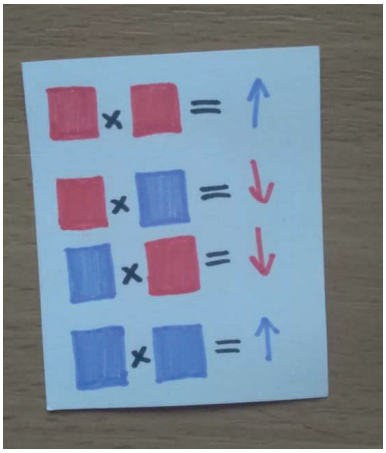


Obrázok 1: Ilustračný obrázok hracieho plánu

Pohyb po hracom pláne sme vyriešili použitím rôznofarebných kociek – modrá farba pre kladné čísla a červená farba pre záporné čísla. Aby mal hráč možnosť výberu, dali sme do každej hry po 2 kocky z každej farby. Chceli sme, aby hra bola dynamická a aby sa pri jednom hode kockami pohli so svojimi panáčikmi všetci hráči. Práve preto, sme museli pridať ešte jednu kocku, ktorá poskytne výhodu hráčovi, ktorý hádzal kockami. Zvolili sme čiernu farbu kocky. Táto kocka môže podľa výberu hráča nahradiť modrú alebo červenú kocku. Súčasťou hry je 5 hracích kociek – 2 modré, 2 červené a 1 čierna (obrázok č. 2).

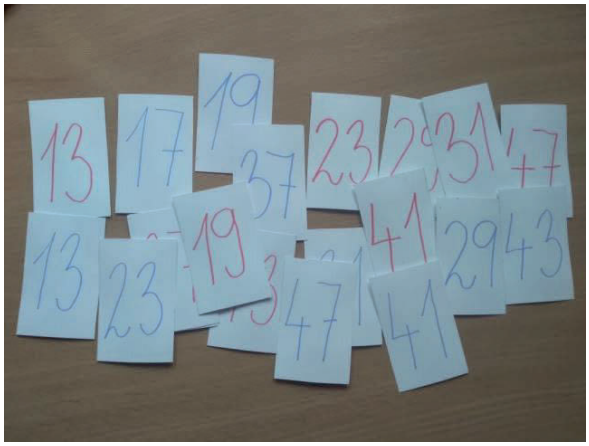
Obrázok 2: Farebné kocky

Čísla, ktoré padnú na kockách sa násobia podľa určitých pravidiel. Každý hráč si musí vybrať vždy dve kocky a čísla na nich padnuté medzi sebou vynásobiť. Výsledok mu potom určí, o koľko políčok a akým smerom sa má so svojím panáčikom pohnúť. Pri násobení kociek, ktoré majú rovnakú farbu, teda modrá * modrá alebo červená * červená sa hráč pohybujem smerom hore (paralela s pravidlami pre násobenie dvoch kladných alebo dvoch záporných čísel). Pri násobení čísiel z kociek, ktoré mali rôzne farby, teda modrá * červená alebo červená * modrá (násobenie je komutatívna operácia) sa hráč pohybuje smerom dole (paralela s pravidlami pre násobenie kladného čísla záporným a naopak). Pre prehľadnosť a ľahšie zapamätanie si pravidiel sme vyrobili kartičku s týmito pravidlami (obrázok č. 3).



Obrázok 3: Kartička s pravidlami pre násobenie čísel

Keď už sme mali vytvorený hrací plán a vyriešenú otázku pohybu po ňom, museli sme vyriešiť, ako označiť políčko, na ktorom bude požiar. Kvôli rôznorodosti hry sme sa nerozhodli vybrať len jedno konkrétne číslo, ale vyrobili sme do každej hry 20 kartičiek s číslami – modrými aj červenými, ktoré budú určovať cieľové podlažie hry. Pred začiatkom hry sa vždy vyžrebuje jedna kartička s číslom poschodia požiaru. Týmto sa hra nestane nudnou, nakoľko existuje 20 cieľových políčok, čiže môžeme hru hrať viacnásobne po sebe bez opakovania. Čísla reprezentujúce poschodia s požiarom boli zámerne vybrané tak, aby sa hra nedala odohrať jedným hodom kockami. Vybrali sme prvočísla od 13 do 47 z každej farby (obrázok č. 4)



Obrázok 4: Kartičky s podlažím požiaru

Súčasťou hry je samozrejme 6 hracích panáčikov v rozdielnych farbách, keďže hra je určená pre 6 hráčov a pravidlá hry. Hra je zabalená v bavlnenom vrecúšku (obrázok č. 5), ktoré sme ušili kvôli prenášaniu a manipulácii s hrou.

Obrázok 5: Vrecúško s hrou

4.2 Pravidlá hry *Horí!*

Ako sme už vyššie spomínali hra bola navrhnutá pre 4 – 6 žiakov z dôvodu minimalizovania počtu hracích skupiniek v triede. Časovú náročnosť sme určili na 20 až 30 minút. Nami vytvorená hra obsahuje: hrací plán, 20 kartičiek s číslom podlažia požiaru, kartičku s pravidlami pre násobenie, 6 hracích panáčikov, 5 farebných hracích kociek, pravidlá hry a vrecúško. Pred samotným hraním hry odporúčame spojiť 2 lavice a okolo nich rozmiestniť stoličky, a to z dôvodu, že hrací plán je takmer 1 meter dlhý. Na začiatku hry sa každý hráč postaví so svojím panáčikom na prízemie – políčko označené číslom 0. Potom z 20 kartičiek s poschodiami označujúcimi požiar vyberieme náhodne jednu, ktoré určí cieľové políčko. A odteraz sa hra začína.

Hráč, ktorý hádže kockami ako prvý, hodí všetkými piatimi kockami naraz. Následne si zvolí z čísel, ktoré padli na kockách dve čísla, ktoré vynásobí podľa pravidiel. Hráč, ktorý hádzal kockami si môže zvoliť aj číslo, ktoré padlo na čiernej kocke a môže si vybrať, či čierna kocka bude reprezentovať kocku modrú alebo červenú. Farbu kocky vyberá podľa smeru, ktorým chce ísť so svojim panáčikom. Vedome teda musí pracovať s tým, či kocky budú mať rovnakú alebo rôznu farbu. Tento princíp sa prepája s pohybom nahor, resp. nadol a kladnými či zápornými poschodiami ako ich pozná z výškových budov. Hráč hádžuci kockami má teda oproti ostatným hráčom výhodu – má jednu kocku navyše. Všetci ostatní si zaradom zvolia čísla z dvoch kociek, a tie medzi sebou vynásobia podľa pravidiel pre násobenie, pričom si nemôžu zvoliť číslo, ktoré padlo na čiernej kocke. To znamená, že pri jednom hode kockami sa posúvajú všetci hráči. Hráči sa v hádzaní kockami striedajú (smer hry je v protismere hodinových ručičiek), až kým sa jeden alebo viac hráčov v tom istom kole nedostane na podlažie s požiarom. Cieľom hry je teda dostať sa na políčko, kde vypukol požiar, uhasiť oheň a zachrániť ľudí obývajúcich toto podlažie. Pravidlá hry *Horí!* sa formovali takmer súčasne s vymýšľaním hry a jej tvorbou, nakoľko sme už mali v hlave ucelenú myšlienku, ako by mala naša hra vyzerať. Počas spisovania pravidiel sa však vynorilo pár detailov a hlavne možných situácií, ktoré bolo treba doriešiť a podať jednoznačnú informáciu ako v tej či onej situácii treba postupovať. Prvou nedoriešenou situáciou bolo otázka, čo sa stane, ak si vyberiem 2 čísla z kociek tak, že mi hrací plán neumožní posun kvôli nedostatku podlaží. Vyriešili sme ju tak, že takýto výber kociek je zakázaný, hráč si musí vybrať čísla z kociek tak, aby mu hrací plán posun umožnil. Druhou a asi poslednou otázkou bol počet víťazov. Najprv sme si mysleli, že víťaz môže byť len jeden, a to ten, ktorý sa na políčko dostane ako prvý. Keďže sa však v rámci jedného hodenia kociek všetci hráči posúvajú, môže sa počas jedného kola na cieľové poschodie dostať aj viac hráčov súčasne. Hra teda môže mať aj viac víťazov a je vždy potrebné dokončiť celé kolo, aj keď už jedného víťaza máme. Kompletné pravidlá, ktoré sú súčasťou hry sú uvedené v prílohe A.

5 Testovanie hry

Po vytvorení hry a spísaní pravidiel už zostávalo len hru vyskúšať medzi žiakmi a overiť tak jej použiteľnosť na hodinách matematiky. Tiež nás zaujímalo, či naša hra bude žiakov baviť.

5.1 Tvorba pozorovacieho záznamu

Aby sme mohli priebeh testovania vyhodnotiť a vyvodiť nejaké závery, bolo potrebné, aby sme si stanovili nejaké kritériá, ktoré sme počas hry sledovali. Rozhodli sme sa, že kľúčovým a najhlavnejším kritériom, ktoré budeme sledovať, bude výskyt matematickej terminológie, a to používanie slova MÍNUS, keďže naša hra je zameraná na záporné čísla. Sledovali sme aj chybovosť žiakov, či už v násobení alebo v posunoch po hernom pláne. Ďalším sledovaným javom bol počet hodov pre konkrétne číslo. Rozhodli sme sa sledovať aj výber čiernej kocky. Posledným kritériom, ktoré sme sledovali, boli pravdepodobnostné úvahy. Chceli sme vedieť, či žiaci budú rozmýšľať nad tým, že niektoré čísla sa dajú dosiahnuť násobením dvoch čísiel s väčšou pravdepodobnosťou ako ostatné. Napríklad číslo 6 viem dostať ako súčin čísel 1 a 6 alebo 2 a 3. Číslo 5 viem dostať len ako súčin čísel 1 a 5. Číslo 6 teda padne s väčšou pravdepodobnosťou ako číslo 5. Rozhodli sme sa sledovať aj celkový čas hry (tabuľka č. 1).

Pozorovateľ:	Trieda:
Skupina:	Počet žiakov:
Poradie hry:	Číslo poschodia požiaru:
Počet hodov:	
Chybovosť:	
Výber čiernej kocky:	
Matematická terminológia (mínus):	
Pravdepodobnostné úvahy:	
Celkový čas hry:	

Tabuľka 1: Pozorovací záznam

5.2 Pilotné testovanie

Testovanie našej hry prebiehalo na Gymnáziu v Malackách. Pre naše testovanie sme vybrali žiakov z 2. ročníkov osemročných gymnázií, čo zodpovedá 7. triede základných škôl. Žiaci zo sekúnd boli vybraní preto, lebo sa o záporných

číslach ešte neučili. Toto bolo rozhodujúce pre výber ročníka, nakoľko naša hra má slúžiť ako propedeutická hra pri osvojovaní si záporných čísel a ich zavádzaní do vyučovania.

Podľa učebných osnov vyššie spomínanej školy sa žiaci prvýkrát stretnú so zápornými číslami v treťom ročníku osemročného gymnázia, čo zodpovedá 8. ročníku základných škôl. Záporným číslam sa na gymnáziu v Malackách venujú v rozsahu 16 vyučovacích hodín, pričom sa najviac venujú sčitovaniu, odčitovaniu, násobeniu, deleniu celých a desatinných čísel (kladných aj záporných) a riešeniu slovných úloh.

Pred samotným začatím testovania bolo treba pripraviť triedu. Keďže sme boli 4 pozorovatelia, žiaci v triede boli rozdelení do 4 skupín. Preto sme v triede vytvorili 4 stanovištia pospájaním lavíc, okolo ktorých sme rozmiestnili stoličky. Na lavicu sme pripravili hrací plán, panáčikov, kocky aj kartičky (obrázok č. 6). Nesmeli chýbať ani pravidlá.

Obrázok 6: Pripravená hra

Po príchode žiakov do nami pripravenej triedy sa všetci usadili na miesta. Do skupiniek ich zaradila učiteľka matematiky vopred. Týmto sa predišlo časovým stratám s rozdeľovaním do skupín. Hneď ako sa žiaci usadili, dostali pokyn prečítať si pravidlá. Po tom, čo sa oboznámili s pravidlami hry prostredníctvom čítaného textu, pravidlá sme ešte raz zopakovali ústne. Tu bol čas vyhradený na otázky zo strany žiakova prípadné nejasnosti v pravidlách. Následne na to sa pri každom stole začala hra. Každá skupinka hrala hru dvakrát. Po tom, čo sa odohrali dve hry, dostali žiaci krátky dotazník, ktorý slúžil ako spätná väzba.

5.2.1 II. OA

V triede II. OA bolo prítomných 22 žiakov. Tí boli rozdelení do 4 skupín – 2 skupiny po 5 žiakov a 2 skupiny po 6 žiakov. Na začiatku vyučovacej hodiny sa všetci usadili na vopred pripravené miesta a väčšina z nich sa ihneď (bez pokynu) pustila do čítania pravidiel hry. Učiteľka nás v krátkosti predstavila a ozrejmila žiakom, čo sa bude robiť. Následne na to, dostali pokyn prečítať si pravidlá. Po prečítaní pravidiel sme im pravidlá hry zopakovali ústne. Niektorí mali otázky, na tie sme odpovedali. Po ústnom zopakovaní pravidiel, bol ku každej skupinke pridelený pozorovateľ, ktorý sledoval a zaznamenával priebeh hry. V každej skupine sa hralo dvakrát. Niektoré skupiny boli rýchlejšie ako ostatné, preto si hru mohli zahrať ešte raz, avšak priebeh už nebol zaznamenávaný. Potom nasledoval krátky dotazník, vyhodnoteniu ktorého sa budeme venovať neskôr v práci. Každý žiak si z hodiny odniesol zážitok z hry a sladkú odmenu.

5.2.2 II. OB

V triede II. OB bolo prítomných 26 žiakov. Nakoľko sme boli len 4 pozorovatelia, museli sme ich tiež rozdeliť len do 4 skupín – 2 skupiny po 6 žiakov a 2 skupiny po 7 žiakov. Do dvoch hier sme preto museli pridať panáčika navyše. Ako prišli žiaci do triedy, posadali si na miesto k stolom v skupinách tak, ako ich rozdelila učiteľka. Učiteľka nás zase predstavila a povedala žiakom, čo budeme robiť. Títo žiaci počkali na pokyn, a až potom sa pustili do čítania pravidiel. Presne tak, ako v druhej triede sme pravidlá zopakovali ústne. V porovnaní s druhou triedou žiaci mali menej otázok. Ťažko povedať, či sa hanbili alebo všetkému rozumeli. Pozorovatelia sa rozdelili do skupiniek. Aj v tejto triede hrala každá skupinka hru dvakrát. Výnimku tvorila len jedna skupina, v ktorej podľa slov učiteľky, boli iba slabší žiaci. Prvá hra im trvala takmer 20 minút a z časových dôvodov už druhú hru nezačínali. Všetky tieto hry boli zaznamenávané do pozorovacích záznamov. Niektoré skupiny mali odohrané 2 hry za krátky čas, preto si mohli zahrať ešte raz. Aj títo žiaci dostali krátky dotazník na vyplnenie, ktorý bude v práci vyhodnotený neskôr. Okrem zážitkového vyučovania bola pre žiakov pripravená aj sladká odmena.

5.2.3 Atmosféra v triedach

Počas hrania hry v triede vládla príjemná atmosféra. Na tvárach žiakov bolo vidno nadšenie a zápal do hry. S netrpezlivosťou sledovali, aké čísla padnú na kockách a už dopredu rozmýšľali, ako pôjdu so svojím panáčikom až sa dostanú na rad. V jednej

skupine, ktorú sme sledovali, dokonca jeden žiak prosil žiaka, ktorý hádzal kockami, aby hodil určité čísla na kockách, a tým mu zaistil víťazstvo. V druhej skupine zase žiak vyskočil zo stoličky a začal tancovať, keď uvidel, že na kockách padli čísla, ktoré mu zaistia víťazstvo. Všetci pozorovatelia sa zhodli na tom, že hra sa žiakom páčila. Dokazujú to aj výpovede pozorovateľov, napr. „Hra sa im veľmi páčila, až sa ma jeden žiak spýtal, či je možné si hru niekde zakúpiť. S úsmevom na tvári som mu povedala že nie, ale že by si ju kľudne zvládli aj sami vyrobiť“ (autentická výpoveď pozorovateľa Petra) alebo „Spätná väzba bola veľmi pozitívna, deti by jednoznačne ocenili viac podobných aktivít na hodinách matematiky“ (autentická výpoveď pozorovateľa Darina).

Všetky výpovede pozorovateľov hovoria, že problém s pochopením pravidiel na strane žiakov bol len minimálny. Počas prvých kôl hry pochopili, ako hrať. Pozorovateľ Petra hovorí: „skupinky, ktoré som mala nemali vôbec žiadny problém pri porozumení pravidlám, mali tam aj pomocné kartičky, na ktorých bolo znázornené, aké kocky treba násobiť aby získali kladné, alebo záporné číslo. Priebeh hry bol plynulý, a keďže žiaci chápali pravidlám, hrať hru pre nich nebolo nič náročné, ale skôr zábava“. Pozorovateľ Denisa zase tvrdí: „žiaci systém hry po vysvetlení rýchlo pochopili, pravidlá hry mali k dispozícii aj v písomnej forme, a tak zásah pozorovateľa bol minimálny. Pri prvých dvoch kolách sa žiaci len utvrdzovali, či postupujú správne“. Rovnaký záver vyvodil aj pozorovateľ Darina: „zo začiatku síce mali problém porozumieť pravidlám, ale netrvalo dlho a pochopili ich nakoniec bez väčších problémov“. Na základe týchto tvrdení pozorovateľov máme za to, že pravidlá boli dobre a zrozumiteľne vysvetlené.

Pred začatím hry sme očakávali častý výskyt chýb, či už v malej násobilke alebo pri posúvaní sa po hracom pláne (sčitovanie a odčitovanie). Tento predpoklad sa však nepotvrdil. Ak sa aj niektorí zo žiakov pomýlil, rýchlo sa opravil. Ak sa neopravil sám, opravili ho spoluhráči. Len veľmi zriedka musel na chybu upozorniť pozorovateľ. Predovšetkým pozorovateľ Darina sa obával častého výskytu chýb: „Očakávala som, že chyby, hlavne v malej násobilke, budú časté. Z vlastnej skúsenosti viem, že problém s malou násobilkou majú aj starší žiaci. Bola som však veľmi príjemne prekvapená. Ak však zriedka došlo k chybe, boli žiaci schopní sa po druhotnom zamyslení sami opraviť.“

Aj napriek tomu, že sme pre pozorovateľov vytvorili tabuľku, aby bolo zaznamenávanie priebehu hry čo najobjektívnejšie, niektoré veci nebolo vôbec ľahké presne zaznamenať. Hovoríme predovšetkým o pravdepodobnostných úlohách. Väčšina žiakov uvažovala a taktizovala len vo svojej hlave. „Pri hodnotení bolo problematické zaznamenať počet pravdepodobnostných úvah, keďže nie všetci žiaci uvažovali nahlas. Preto tento údaj nie je dobre merateľný a nezodpovedá reálnemu počtu úvah“ (pozorovateľ Denisa).

5.3 Výsledky

Po odohratí všetkých hier sme mohli pristúpiť k spracovaniu výsledkov. V nasledujúcich podkapitolách budeme pracovať s vyplnenými pozorovacími záznamami.

V obidvoch triedach sa vytiahli kartičky s pochodím, ktoré určovali poschodia s požiarom s nasledovnými číslami: - 47, - 47, - 43, - 41, - 37, - 31, -13, 13, 19, 19, 19, 29, 41, 43 a 43. Celkový čas hry sa pohyboval od 2 do 22 minút v závislosti na konkrétnom čísle podlažia s požiarom a konkrétnych číslach, ktoré padli na kockách. Počet hodov kockami sa pohyboval od 2 do 8 hodov. Čiernu kocku si žiaci vyberali dosť často, až 21krát zo 62 hodov, čo predstavuje 33,87 % prípadov. Na základe cieleného výberu čiernej kocky môžeme hovoriť o dobrom pochopení systému hry a pravidiel.

Pravdepodobnostné úvahy boli menej častým javom, ktorý bol zaznamenaný. Zaznamenali sme celkom 36 pravdepodobnostných úvah, ktoré boli žiakmi vyslovené. Myslíme si, že nie všetky úvahy, ktoré žiakom prebehli hlavou, vyslovili nahlas. Ako sme už vyššie spomínali, tento údaj nie je veľmi dobre merateľný a s veľkou pravdepodobnosťou nezodpovedá skutočnosti. Skutočné množstvo týchto úvah je teda pravdepodobne väčšie. Výnimku tvorí jedna skupina, v ktorej bolo odsledovaných až 12 pravdepodobnostných úvah v rámci jednej hry – 8 hodov kocky (Príloha K). Bola to práve tá skupina, v ktorej sa nachádzali podľa slov učiteľky žiaci, ktorí v matematike nedosahujú výborné výsledky. Toto si vykladáme tak, že slabší žiaci potrebovali uvažovať nahlas a pri prípadnom nesprávnom uvažovaní byť opravení.

Matematická terminológia, teda slovo mínus sa počas hrania objavilo len v 2 skupinách, celkovo 7krát. Žiaci namiesto znamienok plus a mínus používali slová hore a dole na vyjadrenie smeru posunu po hracom pláne. Toto je v súlade s nami zavedenou terminológiou v pravidlách. Hra má pôsobiť propedeuticky, čiže použitie slova mínus nebolo zámerom. Jeho používanie nemôže naznačiť nič o kvalite hry, či spôsobe zavedenia záporných čísel. Údaj bol pre nás akýmsi lakmusovým papierom, či žiaci spájajú z výškových budov známe „mínus druhé podlažie“ s hrou, pohybmi panáčikom a hodmi kockami. V prípade opakovania hry, by sme mohli zopakovať pravidlá so správnym použitím slova mínus a tu sledovať posun žiackeho vyjadrovania.

Počas hrania sa objavili aj chyby. Ich počet však nebol ani zďaleka taký veľký, ako sme sa na

začiatku obávali. Aby sme mohli počty chýb medzi skupinami, ale aj medzi prvou a druhou hrou v rámci jednej skupiny porovnávať, museli sme počet chýb previesť na percentá. V tomto prevode sme museli zohľadniť ako aj počet hodov kockami, tak aj počet hráčov. Výsledné percentá sme zaokrúhlili na 2 desatinné miesta. Chyby prevedené na percentá sme pre prehľadnosť zapísali do tabuľky (príloha B).

Najväčší percentuálny počet chýb bol 8,33 % v II. OA triede v 1. skupine. Túto skupinu tvorili len chlapci a podľa nášho názoru robili chyby skôr z nepozornosti resp. z nerozvážnosti ako z nevedomosti. Druhý najväčší počet chýb bol v II. OB triede v 3. skupine, a to 7,29 %. Táto skupina bola podľa slov a skúseností učiteľky v matematike najslabšia. Niektoré skupiny neurobili chybu ani raz. Počiatočná hypotéza bola, že percentuálne zastúpenie chýb bude v 2. hre v rámci skupiny klesať, táto hypotéza bola vyvrátená iba v II. OA v 1. skupine. V II. OB triede v 3. skupine nevieme posúdiť vyvrátenie našej hypotézy, nakoľko skupina stihla v rámci vyučovacej hodiny odohrať len jednu hru. Pre všeobecnejší záver o zlepšení schopnosti žiakov by bolo nutné hru nechať hrať hráčov so záznamom viac ako dvakrát a tiež odpozorovať oveľa viac skupín.

5.3.1 Odporúčania na zmeny

Po zrealizovaní a vyhodnotení výsledkov testovania sme zistili, že čas potrebný na odohratie jednej hry môže byť veľmi variabilný. Pohybuje sa od 2 do 20 minút v závislosti od konkrétneho čísla a hádzaných čísel na kockách. Tento časový údaj však nezahŕňa aj čas potrebný na vysvetlenie pravidiel a prípadné otázky zo strany žiakov. Preto si aj na vysvetlenie pravidiel vyhradiť určitý čas, odporúčame 5 – 10 minút. Keďže sa hra dá odohrať v priebehu 2 minút, odporúčame, aby učiteľ v rámci hodiny stanovil presný čas na hru, nie počet hier v skupine. V prípade, že by určil každej skupinke hrať, kým niekto nevyhrá, mohli by v triede vzniknúť časové nezrovnalosti. Skupinky, ktoré by mali hru odohratú za pár minút by sa nudili, zatiaľ čo iné skupiny by nestihli odohrať ani jednu hru. Považujeme za efektívnejšie napríklad stanoviť, že hra sa bude hrať 20 minút. Zatiaľ čo skupinky, ktorým bude trvať dostať sa do cieľa dlhšie odohrajú jednu hru, rýchlejšie skupinky v určenom čase stihnú odohrať aj viacero hier. Takto zabezpečíme, aby všetci žiaci hodili aspoň raz kockami a mali možnosť výberu čiernej kocky.

V prípade, že je učiteľ v triede sám, nie je možné, aby kontroloval detailne priebeh hry v každej skupine. Z tohto dôvodu je dôležité vysvetliť pravidlá tak, aby ich pochopili všetci žiaci, prípadne im poskytnúť pravidlá hry v písomnej podobe, aby do nich mohli kedykoľvek nahliadnuť. Ukážka hry je tiež žiaduca. Učiteľ by sa mal počas hrania prechádzať po triede a chvíľu sa zastaviť pri každej skupine. Ak je v triede zámerne vytvorená nejaká skupina slabších žiakov z matematiky, tejto skupine by sa mal venovať najviac. Na konci hodiny by mal zhodnotiť prácu všetkých žiakov. Veľmi dôležité je pochváliť aj menej matematicky zdatných žiakov a motivovať ich do ďalšej práce. Zábavné hodiny matematiky a pochvala od učiteľa za snahu, môžu výrazným spôsobom ovplyvniť žiakov vzťah k hodinám matematiky a v neposlednom rade aj zlepšiť jeho študijné výsledky.

Počas testovania sme však zistili, že počet žiakov 4 – 6 je privysoký, odporúčame zmeniť počet žiakov na 2 – 4. Žiadne ďalšie veci, s ktorými sme na začiatku nerátali, sa neobjavili. Preto ďalšie úpravy hry nepovažujeme za nutné.

5.4 Spätná väzba

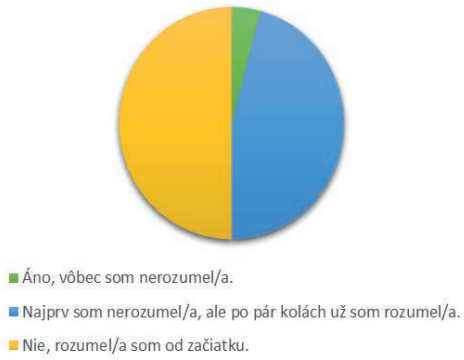
Po odohratí hry sme žiakom dali krátky dotazník, ktorý pozostával z 5 otázok. Chceli sme zistiť predovšetkým to, či žiakov naša hra bavila. Prostredníctvom dotazníku sme sa tiež dozvedeli, či pre nich bolo ťažké pochopiť pravidlá. Žiaci mali možnosť v dotazníku vyjadriť svoj názor na podobné „netradičné“ hodiny matematiky. Výsledky dotazníka sme spracovali do grafov. Celý dotazník je uvedený v prílohe C. Takisto sme požiadali pani učiteľku, aby pár vetami zhodnotila nami vytvorenú didaktickú hru.

5.4.1 Žiaci

Celkovo sa dotazníka zúčastnilo 48 žiakov z dvoch tried (II. OA a II. OB) a odpovedali na 5 krátkych otázok. Prvé dve otázky boli len demografického charakteru a na výsledky využiteľnosti nemali vplyv. Až tretia otázka sa týkala samotného názoru na nami vytvorenú hru (graf č. 1). Až 29 žiakov uviedlo, že sa im hra páčila. 16 žiakom sa hra celkom páčila a len 3 žiaci uviedli, že sa im hra nepáčila.

Graf 1: Zastúpenie jednotlivých odpovedí

V ďalšej otázke sme sa chceli zamerať na zistenie, či žiaci mali problém s pochopením pravidiel alebo ich vysvetlenie bolo dostatočné a žiadny problém v pochopení zo strany žiakov nenastal (graf č. 2). Z dotazníka sme sa dozvedeli, že len 2 žiaci mali problém s pochopením pravidiel a vôbec im nerozumeli. 22 žiakov uviedlo, že pochopenie pravidiel pre nich bolo spočiatku ťažké, ale po pár kolách už vedeli, ako hrať. Presná polovica opýtaných, teda 24 žiakov uviedlo, že pravidlám rozumeli hneď od začiatku. Na základe pozorovaní pozorovateľov uvedených v kapitole 4.2.3 toto hodnotenie zodpovedá skutočnosti. Žiaci hrať začínali ihneď. Prvé dve kolá prvých hier v niektorých skupinách boli akoby overením pravidiel a následne už hry mali rýchly spád, ku ktorému by bez pochopenia pravidiel nemohlo dôjsť. Overenie pravidiel na prvých dvoch kolách však nemožno chápať ako neporozumenie. Skôr ide o neistotu z nového.



Graf 2: Zastúpenie jednotlivých odpovedí

V poslednej otázke sme sa žiakov opýtali, či by uvítali viac podobných aktivít na hodinách matematiky (graf č. 3). Odpoveď bolo takmer jednoznačná. Až 42 žiakov by podobných aktivít zaradilo do vyučovania matematiky oveľa častejšie. 5 žiakov odpovedalo, že je im to jedno a 1 sa vyjadril, že by podobné aktivity do matematiky nezaradil.

Graf 3: Zastúpenie jednotlivých odpovedí

Odpoveď na poslednú otázku bola pre našu motiváciu pokračovať v spôsobe sprístupňovania vybraných tém učiva v rámci ďalšej – diplomovej práce rozhodujúcou.

5.4.2 Učiteľka matematiky

O spätnú väzbu sme poprosili aj učiteľku matematiky. Zaujímalo nás, čo si o nami vytvorenej didaktickej hre myslí človek, ktorý má viac ako 10-ročnú prax vo vyučovaní matematiky. Mgr. Denisa Makytová sa vyjadrila: „ Didaktická hra „*Horí*“ bola po technickej aj grafickej stránke dobre pripravená. Barbora žiakom jasne a zrozumiteľne vysvetlila pravidlá hry, ktoré boli jednoznačne dané, použila názornú ukážku a tiež zodpovedala ich otázky. Hra prebiehala v súlade s týmito pravidlami, kedy žiaci po dvoch kolách ovládali systém hry. Usmerňovanie pozorovateľmi bolo minimálne. Žiakov hra zaujala, pravidlá hry si osvojili, a tak mohli taktizovať ako najrýchlejšie dosiahnu víťazstvo. Dôkazom je aj to, že sa žiaci pýtali, kde si hru môžu zakúpiť. Hra je vhodná ako úvod pred preberaním pravidiel pre súčin celých čísel, ale dala by sa použiť aj pred samotným tematickým celkom „Celé čísla“. Osobne by som vytvorila ešte dve hry: na jednoduchý posun po poschodiach (pochopenie samotných kladných a záporných čísel), a na posun po poschodiach s využitím pravidiel pre sčítanie a odčítanie celých čísel. Tým by sa dala použiť každá hra pred konkrétnymi operáciami s celými číslami (úvod, sčítanie a odčítanie, súčin a podiel)“.

6 Záver

K spracovaniu tejto témy nás viedla myšlienka nadviazať na prirodzenú túžbu detí po hre. Preto sme hru preniesli do vyučovania, skryli sme do nej konkrétne učivo z matematiky (záporné čísla) a vytvorili tak didaktickú hru, ktorá žiakom pomôže s osvojením záporných čísel a priblíži im pracovanie s nimi.

Žiaci sa už od prvého momentu zdali nadšení, hra sa im nepochybne páčila. Ešte pred vysvetľovaním pravidiel niektorí z nich so záujmom čítali pravidlá hry položené na stole, vyberali si farbu panáčika, či si medzi sebou rozdelili kocky. Po ústnom vysvetlení pravidiel padali zo strany žiakov aj otázky, ktoré sme zodpovedali. Väčšina z nich, (ako aj sami uviedli v dotazníku) nemala žiadny problém s pochopením pravidiel a rozumeli im od začiatku. Samotné hranie hry prebiehalo v skupinkách. Každá skupinka mala svojho pozorovateľa, ktorý zapisoval priebeh hry a kontroloval dodržiavanie pravidiel. Atmosféra v triede bola uvoľnená a radostná. Žiaci sa tešili, ak

na kockách padli čísla, ktoré im zaručili víťazstvo alebo naopak boli smutní, ak im takéto čísla nepadli. S určitosťou môžeme povedať, že hra sa žiakom páčila a bavilo ich hrať ju. Dôkazom sú kladné odpovede žiakov v dotazníku na otázku, či sa im hra páčila.

Počas testovania sme sa zamerali hlavne na používanie slova mínus. Nakoľko títo žiaci sa vo vyučovaní matematiky so zápornými číslami ešte nestretli, nepoužívali slovo mínus. Na vyjadrenie smeru posunu po hracom pláne používali slová hore a dole. S pochopením samotných pravidiel násobenia nemali žiadny problém, pri násobení čísel z kociek s rovnakou farbou sa posunuli hore a pri násobení čísel z rôznofarebných kociek sa posunuli dole. Čiernu kocku si žiaci vyberali rozvážne. Vždy povedali, či chcú aby čierna kocka reprezentovala červenú alebo modrú kocku na základe toho, akým smerom chceli ísť a s ktorou kockou chceli násobiť. Pravdepodobnostné úvahy sme vyhodnotili ako zle merateľný údaj, nakoľko nie všetci žiaci uvažovali nahlas. Nami odsledované množstvo podľa nášho názoru nezodpovedá skutočnosti. Chybovosť u žiakov bola oveľa menšia ako sme očakávali. Počet hodov sa pohyboval od 2 do 8 v závislosti od čísla s poschodím požiaru a čísel hodených na kockách. Čísla s poschodím požiaru boli zámerne volené tak, aby sa na nich nedalo dostať jedným hodom kociek. Ak si žiaci na začiatku hry vyžrebovali číslo s poschodím požiaru pomerne malé, napr. 19, dalo sa na toto poschodie dostať 2 hodmi kockami (napr. 5 . 3 + 1 . 4 = 19). V prípade vyžrebovania čísla 47, vieme toto poschodie dosiahnuť najmenej 3 hodmi kockami (napr. 5 . 5 + 5 . 5 + 1 . (-3) = 47). V závislosti na vyžrebovanom čísle s poschodím požiaru a číslach, ktoré na kockách padli, sa odvíjal aj čas hry. Niektoré skupinky (tie, čo vyžrebovali menšie čísla) mali hru odohratú za pár minút, kým skupinkám, ktoré si vytiahli väčšie číslo hra trvala dlhšie. Na základe tohto testovania sme stanovili čas hry na 2 – 20 minút na jednu hru bez vysvetlenia pravidiel. Hra je preto vhodná na 45 minútovú vyučovaciu hodinu a veríme, že si nájde svoje uplatnenie pri zavádzaní záporných čísel ako aj pri osvojovaní si pravidiel násobenia.

Nadšené tváre žiakov a hlavne chuť do hry je pre nás motiváciou do ďalšej práce, kedy by sme chceli pokračovať v sprístupňovaní tejto témy ale aj mnohých ďalších hravým spôsobom. V budúcnosti by táto práca mohla byť rozšírená o ďalšie verzie hry *Horí!*, napríklad jednoduchšie verzie hry (bez násobenia, len s jednoduchým posunom po hracom pláne) pre mladších žiakov, o vytvorenie pracovných listov k tejto hre alebo o ďalšie hry s tematikou záporných čísel.

Poďakovanie

Rada by som poďakovala svojej školiteľke RNDr. Monike Dillingerovej, PhD. za odborné vedenie, vecné pripomienky, cenné rady, poskytnutú literatúru a čas, ktorý mi venovala počas písania tejto práce.

Ďalej by som chcela poďakovať pani riaditeľke štátneho gymnázia v Malackách RNDr. Elene Krajčírovej za to, že som si tam mohla vyskúšať svoju didaktickú hru v praxi. Rovnaká vďaka patrí aj Mgr. Denise Makytovej – učiteľke matematiky v triedach, v ktorých prebiehalo testovanie.

V poslednom rade by som sa chcela poďakovať svojim spolužiačkam, menovite Darine Ďuranovej a Petre Javorkovej, za pomoc pri realizácii praktickej časti.

Literatúra

[Průcha, 1998] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha : Portál, 1998. ISBN 80-7178-252-1.

ŽABKA, J., ČERNEK, P. *Matematika 8 – 1. časť.* Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, spol. s. r. o., 2018. ISBN 978-80-8120-585-9.

ŽABKA, J., ČERNEK, P. *Matematika 8 – 2. časť.* Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, spol. s. r. o., 2012. ISBN 978-80-8120-125-7.

ŠPÚ. *Inovovaný štátny vzdelávací program – MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami) PRÍLOHA ISCED 2.* [online]. Bratislava : ŠPÚ, 2014. [cit. 2019-02-14].
Dostupné na internete: <http://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf>

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 164–170
ISBN 978-8081470936, © 2019 Mária Mihalová

Využitie modelu 5E vo vyučovaní matematiky na ZŠ

Mária Mihalová[1]*
Školiteľ: Mária Slavíčková[1‡]

[1] Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

V predkladanom príspevku sa zameriavame na využitie vzdelávacieho modelu 5E pri vyučovaní matematiky. Bližšie predstavíme model 5E a jeho päť fáz: zapojenie, skúmanie, vysvetlenie, rozšírenie a vyhodnotenie. S využitím tohto modelu sme navrhli dve vyučovacie hodiny pre triedy 2. stupňa základnej školy. Model 5E je založený na konštruktivistickom princípe a jeho základom je skúmanie. Žiaci sa na hodinách zabavia a zároveň objavujú nové vedomosti. Navrhnuté úlohy sme spracovali do metodiky pre učiteľov. Na základe realizácie vytvorenej metodiky v dvoch triedach na základnej škole a konzultácie s učiteľkou matematiky sme metodiku upravili. Vytvorená metodika slúži ako pomôcka pre učiteľov, ktorí chcú u žiakov prebúdzať záujem o matematiku alebo iba oživiť hodiny matematiky.

Kľúčové slová: model 5E, konštruktivizmus, motivácia, skúmanie, vysvetlenie, rozpracovanie, hodnotenie

1 Úvod

V posledných rokoch sa v školstve zdôrazňuje význam konštruktivistického prístupu k vyučovaniu. Na rozdiel od tradičného transmisívneho prístupu je konštruktivistický prístup viac zameraný na aktivitu žiakov, ktorí vlastným skúmaním a experimentovaním objavujú nové poznatky. Využívajú pri tom svoje prvotné skúsenosti a vedomosti. Svoje objavy zdôvodňujú a vyvodzujú závery. Keďže vedomosti sú viazané na ich vlastnú skúsenosť, vedomosti sú trvácnejšie, čím sa takéto vyučovanie javí ako výhodnejšie. V konštruktivizme však vieme nájsť rôzne modely, ktoré uľahčujú prácu učiteľovi a aj žiakovi. My sme sa orientovali práve na jeden z týchto modelov a to na model 5E.

Tento model bol vytvorený v rámci bádateľsky orientovaného vyučovania, využívaného najmä v prírodných vedách. My sme spomínaný model využili v matematike, kde sme si vybrali dve témy z učiva ZŠ a navrhli sekvenciu úloh pre daný ročník. Navrhnuté sekvencie sme spracovali do metodiky a na základe výuky sme vytvorili metodiku pre učiteľov. Cieľom našej práce bolo vytvorenie metodiky pre učiteľov, ktorá by učiteľom pomohla vyučovanie oživiť prípadne priniesť na hodiny matematiky niečo nové. Zároveň sme chceli model 5E využiť v matematike a tým podnietiť aj iných učiteľov k využívaniu tohto modelu.

2 Bádateľsky orientované vyučovanie

Bádanie je mnohostranná činnosť, ktorá zahŕňa pozorovanie, kladenie otázok, skúmanie rôznych zdrojov informácií, plánovanie bádania, preskúmanie už známych objavov na základe experimentálnych dôkazov, použitím nástrojov na zber, analýzu a interpretáciu dát, navrhovanie odpovedí, vysvetlení a predpovedí a prezentovanie výsledkov. [NRC, 1996]

Na termín bádanie môžeme pozerať z troch hľadísk [Minner et al., 2010]:

- z pohľadu vedy – činnosti skúmania prostredníctvom vedeckých metód
- z pohľadu študenta – aktívne bádanie prostredníctvom premýšľania
- z pohľadu učiteľa – bádanie ako pedagogický prístup

Bádateľsky orientované vyučovanie sa výrazne líši od tradičných metód. Zameriava sa na konštruktivistické princípy. Zdôrazňuje dôležitosť učenia sa vede a tým hlbšiemu pochopeniu a aplikovaniu rôznych vedeckých metód. Aby sa uľahčila práca učiteľovi, bádateľsky orientované vyučovanie sa vyvíja. V rámci rozvíjania bolo vytvorených niekoľko vzdelávacích cyklov. Vzdelávacie cykly rozdeľujú inštrukcie do niekoľkých fáz, založené na základe stanovenia metód, v súlade s teóriami o učení sa jednotlivcov aj konštruktivistickými princípmi.

Vzdelávací cyklus môže viesť k lepšiemu zachovaniu vedeckých koncepcií, vyššie úspechy vo vede, vynikajúce procesné zručnosti, zlepšené postoje k vzdelávaniu v oblasti vedy a vedeckému

* majkamih@gmail.com
‡ slavickova@fmph.uniba.sk

vzdelávaniu samotnému a zlepšené argumentačné schopnosti. [Duran and Duran, 2004]

Použitie vzdelávacích cyklov zdôrazňuje vysvetlenie a skúmanie javov, pomocou dôkazov a argumentov žiaci vyvodzujú závery. Veľmi dôležitou je experimentálna časť, v ktorej sa žiaci učia vedeckej činnosti.

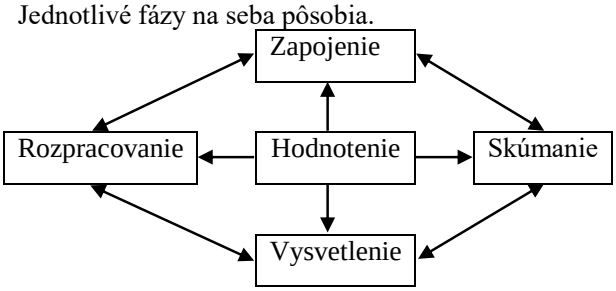
„Ak učíme bádateľským spôsobom, so žiakmi realizujeme aktivity, prostredníctvom ktorých si žiaci osvojujú poznatky a porozumenie vedeckých ideí, pričom postupujú podobným spôsobom ako vedec vo svojej práci.“ [Kireš et al., 2016]

3 Model 5E

Model 5E je vzdelávací cyklus, ktorý vytvorili v polovici 80-tych rokov. Tento model je založený na kognitívnej psychológii, teórii konštruktivistického učenia a osvedčených postupov vo vyučovaní. [Duran and Duran, 2004]

Bybee [1997] deklaruje, že s použitím tohto prístupu študenti redefinujú, reorganizujú, prepracovávajú a menia svoje počiatočné koncepty prostredníctvom sebareflexie a vzájomného pôsobenia so svojimi rovesníkmi a ich prostredím. Žiaci interpretujú objekty z hľadiska ich súčasnej koncepcie pochopenia.

Tento model zahŕňa 5 fáz: zapojenie, skúmanie, vysvetlenie, rozpracovanie a hodnotenie. Jednotlivé fázy na seba pôsobia.



Obrázok 1: 5E model [Duran and Duran, 2004]

Bybee [Bybee et al., 2006] a Duran [Duran and Duran, 2004] popisujú jednotlivé fázy nasledovne:

3.1 Zapojenie

Učiteľ predkladá žiakom úlohu, pri ktorej definujú problém. Žiaci sa zameriavajú na túto úlohu a spájajú si ju s prvotnými vedomosti. Učiteľ sa snaží zhodnotiť predchádzajúce vedomosti a skúseností, prípadne identifikovať určité miskoncepcie. Po ukončení tejto fáze by mali všetci žiaci v triede mať spoločné skúsenosti a vedomosti, na ktorých sa formujú nové koncepty v ďalších fázach.

Predovšetkým je však táto fáza zameraná na vnútornú motiváciu. Táto fáza by mala u žiakov vyvolávať zvedavosť a túžbu dozvedieť sa viac o danej téme.

3.2 Skúmanie

Táto fáza je založená na prieskumných aktivitách, ktoré vykonávajú žiaci. Cieľom týchto aktivít je získanie skúseností a vedomostí, ktoré žiaci neskôr využijú na formálne vytvorenie vedomostí. Zároveň sa žiaci učia vedeckej činnosti. Preto by táto aktivita mala byť pre žiakov uchopiteľná. V rámci tejto aktivity žiaci skúmajú určitý predmet, jav, situáciu. Učiteľ nediktuje postup skúmania, žiaci pracujú samostatne, prípadne v skupinách. Učiteľ pôsobí iba ako facilitátor, ktorý ich usmerňuje prácu žiakov, ale necháva im čas aj priestor preskúmať predmety, javy a situácie na základ vlastných myšlienok a postupov.

3.3 Vysvetlenie

Túto fázu vieme rozdeliť na dve časti. V prvej časti žiaci podávajú vlastné vysvetlenia, ktoré odvodili na základe zapojenia a skúmania. Prezentujú takým spôsobom svoje pochopenie. Žiaci svoje vysvetlenia prediskutujú a kladú otázky o predmetoch, javoch a situáciách, ktoré skúmali. Tým získavajú nový pohľad skúmané objekty. Svoje prvotné vedomosti tak transformujú do nových situácií.

V druhej časti učiteľ pomáha žiakom svoje vysvetlenie a myšlienky formálne vyjadriť, zavádza pojmy, definície. Učiteľ tiež môže v tejto fáze odstrániť miskoncepcie, ktoré objavil v prvej fáze.

3.4 Rozpracovanie

Aktivity v tejto fáze by mali využívať nové chápanie pojmov a nové zručnosti. Žiaci navrhujú nové experimenty, modely, rozvíjajú ich a rozširujú. Cieľom tejto fáze je zovšeobecnenie nových pojmov a konceptov, aby ich žiaci zvládali využívať v nových situáciách alebo dokonca v nových disciplínach.

3.5 Hodnotenie

Fáza hodnotenia môže obsahovať formálne hodnotenie ako je napríklad hodnotenie výkonnosti, modelov, denníkov, ... V prvom rade by však malo obsahovať neformálne hodnotenie. Žiaci by mali zhodnotiť svoje porozumenie. Okrem toho by mali získať spätnú väzbu ich vysvetlení. Neformálne hodnotenie sa môže vyskytovať počas celej sekvencie modelu 5E. Učiteľ tiež môže využiť sebahodnotenie žiakov alebo ich vzájomné hodnotenie.

4 Návrh a realizácia vyučovacej sekvencie na dané témy

Z tém nachádzajúcich v ŠVP sme si vybrali dve témy, ktoré sme spracovali do vyučovacej sekvencie pričom sme využili model 5E. Dané návrhy sme overili na základnej škole. Na základe výučby sme popísali priebeh a výhody a nevýhody niektorých častí navrhnutej sekvencie.

4.1 Základné vlastnosti geometrických telies

ŠVP: Ihlan, valec, kužeľ, guľa, ich objem a povrch
Výkonový štandard:

- Opísať ihlan, valec, kužeľ a guľu a pomenovať ich základné prvky
- Určiť počet hrán, stien, vrcholov ihlana

Požadované vedomosti/zručnosti:

- Vlastnosti štvorca, obdĺžnika, trojuholníka
- Výpočet obsahu a obvodu štvorca, obdĺžnika, trojuholníka
- Vlastnosti kruhu
- Výpočet obsahu a obvodu kruhu
- Vlastnosti kocky
- Výpočet povrchu a objemu kruhu
- Čo je objem a povrch

Výstupná vedomosť:

- Určiť vlastnosti kvádra, ihlana, valca, kužeľa a gule
- Určiť výpočet povrchu a objemu kvádra, ihlana, valca, kužeľa a gule

Ročník: 9.

Tému Základné vlastnosti geometrických útvarov sme odučili v Kvarte A. Ich pubertálny vek sa odzrkadľoval na reakciách. Trieda nebola zvyknutá na konštruktivistickí prístup a preto bola hlučnejšia a roztržitejšia ako zvyčajne na iných hodinách. Žiaci boli šikovní, z výberovej triedy, preto im niektoré aktivity trvali kratšie. V bežnej triede, v ktorej sa nachádza aj niekoľko slabších žiakov, by niektoré aktivity trvali dlhšie.

Na **zapojenie** do témy sme využili obrázok kocky na tabuli. Pomocou obrázka kocky sme si frontálne vo forme diskusie zopakovali pojmy vrchol, hrana, stena, uhlopriečka, podstava, mnohosten, súmernosť. Tiež sme si tieto konkrétne časti ukázali na kocke. Motivačná časť nám trvala odhadovaný čas 5 minút.

Na proces **skúmania** sme využili didaktickú hru. Žiaci sedeli v kruhu na stoličkách. Každé dieťa si vyžrebovalo kartičku s geometrickým útvarom (obrázok, používajú ho pre lepšiu predstavivosť). (štvorboký ihlan, valec, kužeľ, guľa, kváder). Učiteľ stál v strede kruhu a žreboval z pripravených kartičiek s vlastnosťami geometrických útvarov. Každý žiak počúval jednotlivé vlastnosti a keď vlastnosť platila pre jeho daný geometrický útvar, posunul sa o stoličku doprava. Ak na tej stoličke niekto sedel, zostával sedieť na kolenách. Posúval sa vždy iba žiak, na ktorom nikto nesedel. Hru vyhral žiak, ktorý sa prvý dostal na svoje miesto a sedel na ňom samostatne. (Nikto nesedel jemu na kolenách a nikomu na kolenách nesedel.)

V Kvarte A bolo 28 žiakov a preto sme sa rozhodli hru urýchliť. Každé kolo sme hádzali kockou. Číslo, ktoré padlo na kocke bolo aj počtom stoličiek o ktoré sa žiaci dané kolo posúvali doprava. Aby bola hra zaujímavejšia, ak padlo na kocke číslo 6, žiak sa posúval o jednu stoličku doľava. Pre lepšiu motiváciu je výhercovi sľúbiť výhru. Napríklad plusové body alebo cukrík.

Aktivita bola organizačne aj priestorovo náročná. Usadiť 28 žiakov do kruhu v malej triede nie je jednoduché. Vyriešili sme to takým spôsobom, že žiaci z krajných dvoch radov si posadali do uličiek vedľa lavíc a stredný rad vytvoriť okraje sploštěného kruhu pri tabuli a za lavicami. Je dôležité upozorniť žiakov, aby sa presúvali v tichosti.

V našom prípade vytvorenie kruhu bolo dosť hlučné a po vytvorení kruhu sa žiaci spolu rozprávali. Myslíme si, že to môže byť spôsobené zaujímavým spôsobom vyučovania v danej triede, keď je aktivita počas hodiny hlavne na učiteľovi a nie na žiakovi. Preto je dôležité, aby učiteľ počítal v takýchto prípadoch s vyšším hlukom a roztržitosťou žiakov.

Ďalším problémom bol pubertálny vek žiakov. Niektorí si nechceli sadnúť na kolená spolužiakovi. Tento problém vieme vyriešiť tak, že žiaci nebudú sedieť na stoličkách, ale iba pred stoličkou stáť. Potom namiesto toho, aby si žiak sadol na kolená spolužiakovi sa pred spolužiaka iba postaví. Posúva sa iba ten žiak, ktorý prišiel najneskôr, čiže je úplne vpredu.

Na túto aktivitu sme odhadovali čas 15 minút. Reálny čas bol približne 30 minút. Aby sme nemuseli časť vysvetlenia rozdeliť na záver prvej a začiatok druhej hodiny, je výhodnejšie časť skúmania predĺžiť do konca prvej vyučovacej hodiny a na druhej vyučovacej hodine môžeme začať časťou vysvetlenia.

Aby mala aktivita nejaký význam, na **vysvetlenie** si žiaci vytvoria tabuľku. Do tabuľky vpisovali postupne vlastnosti, ktoré platili pre jednotlivé útvary.

Vyučujúca nakreslila tabuľku na tabuľu a vypisovali sme jednotlivé vlastnosti do nej spolu so žiakmi, ktorí si vypisovali vlastnosti v zošitoch. Na vypisovanie vlastností je vhodné, ak si učiteľ nájde nejaký systém, pretože inak ľahko nejakú spomenutú vlastnosť zabudneme vysvetliť. Napríklad určitú vlastnosť určíme v rovnakom riadku tabuľky pre všetky útvary (počet hrán, počet stien, tvar podstavy, počet osí súmernosti, ...). Žiaci si k niektorým častiam tabuľky doplnili aj obrázky.

V prvom riadku tabuľky si žiaci nakreslili jednotlivé útvary. Tiež si nakreslili siete jednotlivých útvarov a na náčrtkoch si naznačili osi súmerností jednotlivých útvarov. Odhadovaný čas 10 minút sa predĺžil o 10 minút.

V **rozpracovaní** mali žiaci skúsiť odvodiť vzorce pre výpočet objemu a povrchu jednotlivých útvarov. Výpočet pre objem a povrch kvádra už poznali, preto stačilo, keď ho do tabuľky iba vpísali. Výpočet pre objem a povrch gule si žiaci na základnej škole neodvádzajú, preto sme ich od nich nevyžadovali. Tieto odvodenia sa robia až na strednej škole. Ak chceme vzorce spomenúť alebo sa žiaci na tieto vzorce pýtajú, môžeme im tieto vzorce povedať s náznakom odvodenia. Všeobecný vzorec na výpočet objemu ihlana a kužeľa treba žiakom pomôcť odhaliť voľbou vhodných pomôcok. ($V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v je výška útvaru) Ak má učiteľ k dispozícii vhodné modely, vie im vo vzorci ukázať prelievaním vody z kužeľa do valca, čím odhalí práve trojnásobok objemu kužeľa vo valci. Obe telesá s rovnakou podstavou a výškou. K výpočtu povrchov im môžu pomôcť náčrtky jednotlivých sietí. Žiaci sa budú objemom a povrchom jednotlivých útvarom budú venovať ešte neskôr v osnove, preto nie je potrebné, aby nutne odvodili všetky vzorce. Táto úloha trvala žiakom odhadovaných 15 minút.

V **hodnotení** mali žiaci na základe opisu určiť o aký geometrický útvar ide. Úloha bola jednoduchá a žiaci ju bez problémov zvládli. Odhadovaný a zároveň reálny čas bol 5 minút.

Úloha 2: Na základe opisu urči o aký geometrický útvar sa jedná:

1. nemá vrcholy, nemá hrany, vieme nakresliť sieť, vzniká rotovaním obdĺžnika okolo jednej jeho osi
2. má iba jednu podstavu, nemá steny
3. má iba jednu podstavu, podstava môže mať rôzne rovinné útvary, má 5 vrcholov
4. protiľahlé steny sú rovnobežné, má stred súmernosti, každé 2 hrany zvierajú pravé uhly
5. nemá vrcholy, nemá hrany, nemá steny, vzniká rotovaním kruhu

Námety na pokračovanie na ďalšej vyučovacej hodine na overenie pochopenia učiva:

Riešenie úloh na výpočet povrchu a objemu ihlana, kužeľa, valca a gule, napr.:

- Vypočítaj objem kužeľa, ktorý je vysoký 12 cm a priemer postavy je 13 cm
- Vypočítaj povrch valca, ktorý je rovnako vysoký ako kocka s objemom 8 cm^3 a priemer podstavy je 4 cm.
- Vypočítaj objem trojbokého ihlana, ktorého podstava má obsah 12 cm2 a výška je 6 cm.

4.2 Pytagorova veta

Téma: Pytagorova veta
ŠVP: Pytagorova veta
Výkonový štandard:

- Formuláciu Pytagorovej vety a jej význam
- Zapísať Pytagorovu v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri inom označení strán pravouhlého trojuholníka
- Vyjadriť a zapísať zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnami, podobne aj pri inom označení trojuholníka

Požadované vedomosti/zručnosti:

- Mocniny a odmocniny
- Obsah trojuholníka a štvorca
- Vlastnosti jednotlivých typov trojuholníkov

Výstupná vedomosť:

- Formulácia Pytagorovej vety
- Výpočet odvesien pomocou Pytagorovej vety

Ročník: 9.

Tému Pytagorova veta sme odučili v Tercii A a VIII.A. Triedy boli odlišné a aj výučba v nich prebiehala odlišne. Tercia A bola výberová trieda, žiaci boli veľmi šikovní a keďže väčšina z nich rieši matematickú olympiádu. Pytagorovu vetu poznali práve z matematickej olympiády. VIII. A bola tiež šikovná, ale vedeli menej učiva navyše a bolo tam aj niekoľko slabších žiakov. Najskôr sme odučili vyučovaciu hodinu v Tercii A., kde sme sa zamerali na aktivitu a jej prevedenie, v VIII. A sme sa zamerali už aj na poznámky žiakov, ktoré v predchádzajúcej triede absentovali. Túto chybnú časť sme upravili aj v metodike pre učiteľov, ktorá sa nachádza v prílohe.

Na **motiváciu** žiaci dostali úlohu narysovať a vystrihnúť niekoľko geometrických útvarov. Na základe skúseností z testovania odporúčame, aby si každý žiak rysoval a vystrihoval svoje geometrické útvary. Útvary sme vystrihovali z farebného papiera, čím sme lepšie rozlíšili jednotlivé útvary. Rovnaké útvary boli rovnakej farby. Neskôr si ich mohli nalepiť do zošitov. Tiež je dôležité, aby si žiaci zadanie zapísali do zošitov, aby si neskôr vedeli spomenúť, čo na hodine robili.

Úloha 1: Narysuj 4 trojuholníky ABC, kde $a = 3\,cm, b = 4\,cm, \gamma = 90°$. Narysujte 3 štvorce so stranami m, n, o, keď $m = a, n = b, o = c$. Útvary vystrihnite a pomenujte strany.

Časť zapojenia pokračovala diskusiou, kedy sme si so žiakmi zopakovali všetko, čo o trojuholníku vieme. Učiteľ riadil diskusiu pomocnými otázkami. Napríklad: Aký obsah má trojuholník? Aké typy trojuholníkov rozlišujeme? Čo vieme povedať o výškach? Čo je odvesna a prepona? Diskusiu sme ukončili tým, čo vieme

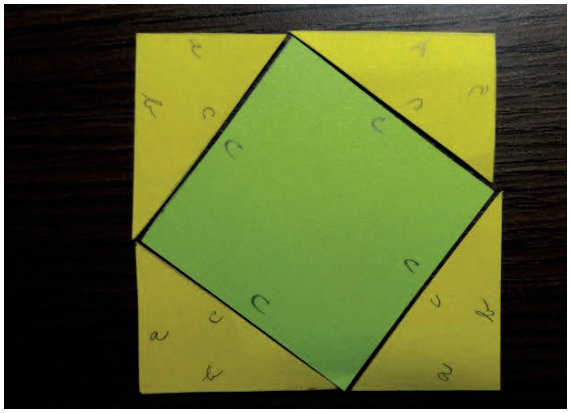
povedať o trojuholníku, ktorý sme vystrihli. (pravouhlý, 3 strany, 3 vrcholy, $V_a = b, V_b = a, S = 6cm^2, \dots$)

Niektorí žiaci mali výrazný problém jednotlivé trojuholníky správne narysovať. Najčastejšou chybou bolo, že obe odvesny mali rovnaký rozmer. Z tohto dôvodu sa odhadovaný čas predĺžil z 15 minút na približne 25 minút. Pre časté chyby, ktoré žiaci robili je preto lepšie, keď si jednotlivé útvary žiaci samostatne rysujú a vystrihujú, čím zlepšujú svoje zručnosti v rysovaní. Ak chce učiteľ tento čas ušetriť, môže nechať žiakov, narysovať a vystrihnúť útvary na domácu úlohu.

V Tercií sme vyskúšali vystrihovať jednotlivé geometrické útvary vo dvojiciach. Niektoré dvojice poctivo pracovali, ale v niektorých dvojiciach pracoval iba jeden. Preto tento variant neodporúčame. Vystrihnuté útvary po aktivite už nevyužívali, čím sa im aktivita zdala zbytočná. V VIII. A si každý žiak vystrihol svoje geometrické útvary a neskôr si ich nalepil do zošita pri definícii Pytagorovej vety, čím ich znova využil.

V časti **skúmania** sme pracovali s vystrihnutými geometrickými útvarmi. Žiaci mali vystrihnuté 4 trojuholníky s danými rozmermi a 3 štvorce, ktoré sme pomenovali M (strana m), N (strana m) a O (strana o). Na Úlohu 2 si žiaci zobrali 4 trojuholníky a štvorec O a mali z nich poskladať štvorec. Na zjednodušenie riešenia bolo dobré, ak si žiaci písmenkami popísali strany všetkých vystrihnutých geometrický útvarov.

Úloha 2: Z trojuholníkov a najväčšieho štvorca poskladajte štvorec použitím všetkých daných geometrických útvarov, tak, aby sa útvary neprekrývali.



Obrázok 2: Útvar U_1

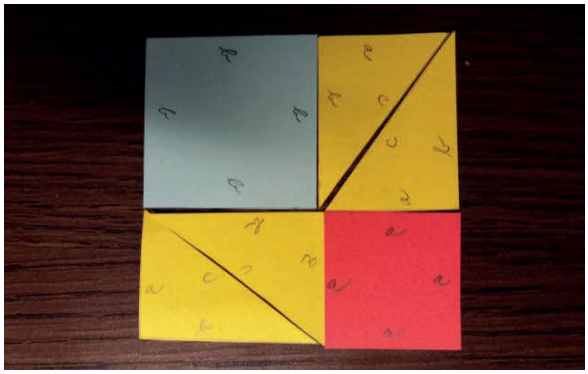
Keď žiaci poskladali útvar U_1, učiteľ položil žiakom 3 otázky. Žiaci pomocou nich prišli na vzťah $S_1 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$ a dĺžka strany štvorca je $(a+b)$.

Pomocné otázky:

- Prečo je váš útvar U_1 štvorcom? (má pravé uhly, všetky strany sú zhodné)
- Aká je dĺžka strany štvorca U_1? $(a+b)$
- Aký je obsah štvorca U_1? $((a+b)^2)$

Na ďalšiu úlohu žiaci potrebovali opäť 4 trojuholníky a štvorce M a N. Zadanie úlohy bolo rovnaké, poskladať použitím všetkých daných útvarov štvorec. Keď žiaci útvar U_2 poskladali, učiteľ opäť položil rovnaké tri otázky ako pri predchádzajúcej úlohe a žiaci odvodili vzťahy $S_1 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$ a dĺžka strany štvorca U_2 je $(a+b)$.

Úloha 3: Z trojuholníkov a dvoch menších štvorcov poskladajte štvorec použitím všetkých daných geometrických útvarov, tak aby sa útvary neprekrývali.



Obrázok 3: Útvar U_2

Pomocné otázky:

- Prečo je váš útvar U_2 štvorcom? (má pravé uhly, všetky strany sú zhodné)
- Aká je dĺžka strany štvorca U_2? $(a+b)$
- Aký je obsah štvorca U_2? $((a+b)^2)$

Žiaci si vytvorené útvary načrtli do zošitov. Do zošitov zapíšu objavené vzťahy v útvaroch U_1 a U_2. V Tercií A. sme si tieto náčrtky nerobili, ale po odučení danej témy sme videli, že poznámky žiakov sú slabé. Aby si žiaci osvojili prezentované vedomosti, potrebujú sa vrátiť k poznámkam, ktoré im pripomenú čo robili na vyučovacích hodinách a aké vedomosti na nich získali. Z tohto dôvodu sme metodiku upravili a pridali časti, ktoré zabezpečia žiakom kvalitné poznámky.

Pre žiakov nebolo náročné útvary U_1 a U_2 poskladať. Tieto úlohy vyriešili rýchlo a bez problémov. Úlohou 4 bolo porovnanie niekoľkých geometrických útvarov.

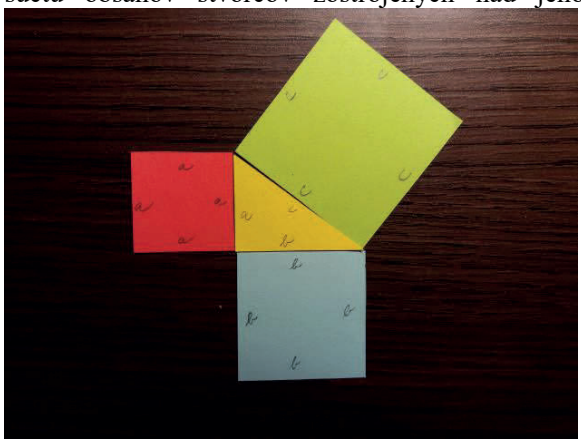
Úloha 4: Porovnaj obsahy štvorcov:

- U_1 vs. U_2 $(S_1 = S_2)$
- O vs. M a N

Keď žiaci porovnali obsahy štvorcov U_1 a U_2, zistili, že obsahy sa rovnajú. Na základe útvarov U_1 a U_2 ďalej vyvodzovali, že obsahy štvorcov boli vo vzťahu $S_O = S_M + S_N \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$. Skúmanie sme odhadovali na 10 minút, reálny čas bol približne 15 minút.

Ako **vysvetlenie** sme žiaci skúsili sformulovať znenie Pytagorovej vety. Do zošitov si následne napísali slovné znenie Pytagorovej vety a vzorec na výpočet. Tiež si do zošitov nalepili už vystrihnuté geometrické útvary v tvare, o akom hovorí definícia Pytagorovej vety.

Definícia: Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami.



Obrázok 5: Grafické vyjadrenie Pytagorovej vety

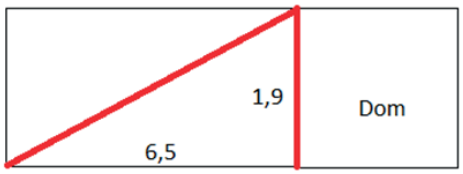
Žiakom sme položili doplňujúcu otázku. Platil by vzťah $c^2 = a^2 + b^2$, keby bol trojuholník rovnoramenný?/ rovnostranný?/ rôznostranný/ tupouhlý/ ostrouhlý? Žiaci svoje odpovede zdôvodňovali. (Prečo to pri jednom konkrétnom trojuholníku platí, resp. prečo to neplatí.). Ak by si žiaci neboli istí svojou odpoveďou, môžu si vyskúšať namiesto pravouhlých trojuholníkov vystrihnúť ostrouhlé alebo tupouhlé a postup nášho skúmania zopakovať. Iné typy trojuholníkov môžu žiaci skúšať aj na domácu úlohu. Keď už sme vedeli znenie Pytagorovej vety, vedeli sme dopočítať pomocou nej aj stranu c v našom vystrihnutom trojuholníku. Správnosť sme overili aj odmeraním danej strany. Na vysvetlenie sme vyhradili čas 10 minút, reálny čas bol 15 minút.

V **rozpracovaní** dostali žiaci zadanie, v ktorom mali zadanú preponu a jednu odvesnu. Riešením bolo vypočítanie druhej odvesny. Keď úlohu vyriešili, spoločne sme odvodili všeobecný vzorec na výpočet odvesny. Úloha bola bezproblémová, žiaci ju vyriešili samostatne a rýchlo. Odhadovaný čas 10 minút bol aj skutočným časom.

Úloha 5: Je daný trojuholník ABC, kde je daná strana c = 10 cm, a = 6 cm a pri vrchole C je pravý uhol. Akú dĺžku má strana b? Skúste odvodiť všeobecný vzorec na výpočet odvesny.

V **hodnotení** žiaci riešili úlohu, v ktorej použili výpočet Pytagorovej vety. Úloha bola zasadená do bežného života. Vyriešiť úlohu žiakom trvalo odhadovaných 5 minút.

Úloha 6: Zuzka má za domom dvor tvaru obdĺžnika s rozmermi 6,5 m a 1,9 m. Popri dome vedie kratšia strana obdĺžnika. Zuzka sa rozhodla urobiť chodník popri dome a potom chodník uhlopriečne cez dvor. Aký dlhý bude chodník?



Obrázok 4: Nákres dvora

Námety na pokračovanie na ďalšej vyučovacej hodine na overenie pochopenia učiva:

Riešenie úloh na výpočet prepony pomocou Pytagorovej vety napr.:

- Rodina Nešťastných prišla počas silnej búrky o strechu rovnako ako polovica dediny. Otec rodiny sa rozhodol strechu opraviť. Dom má štvorcové priečelie a je široký 6,2 m. Otec chce, aby najvyšší bod na streche bol 4,8 m nad domom. Aké dlhé budú trámy, ktoré idú od vrcholu strechy ku okraju budovy. Strecha je robená na stred.

- Chceme si postaviť na dvore šmykľavku a máme dve možnosti. Pôjde 2 m od rebríka a vysoká bude 1,30 m alebo pôjde od rebríka iba 1,80 m a 2 m do výšky. Ktorú možnosť si vyberieme, ak chceme, aby bola šmykľavka čo najdlhšia?

5 Záver

V rámci našej práce sme vytvorili metodiku pre učiteľov, ktorá zjednodušuje a oživuje ich prácu. Práca zároveň podnecuje učiteľov zaujímať sa o model 5E a využívať ho v praxi. Vybrali dve témy z učiva ZŠ: Pytagorova veta a Základné vlastnosti geometrických telies, kde sme vytvorili úlohy pre jednotlivé fázy modelu 5E. Navrhnuté sekvencie úloh sme overili v praxi v Tercii a Kvarte. Úlohy u žiakov vzbudili záujem a aktívne sa zapájali do vyučovacích hodín. Špeciálne ich lákali aktivity z časti skúmania, kde sa učili počas hry. Na základe tejto výučby sme vytvorili metodiku, ktorá obsahuje navrhnuté sekvencie spracované do modelu 5E. Do úpravy sme zahrnuli aj pripomienky a postrehy niekoľkých učiteľov z praxe, aby bola zrozumiteľná najmä pre nich. Veríme, že model 5E sa začne viac využívať aj v matematike a aj táto metodika bude učiteľom nápomocná.

Poďakovanie

Rada by som poďakovala predovšetkým mojej školiteľke PaedDr. Márii Slavíčkovej, PhD za odbornú pomoc, rady a trpezlivosť. Moje poďakovanie tiež patrí RNDr. Zuzane Valáškovej za priestor na vyučovaní a rady pri tvorbe metodiky.

Literatúra

[Bybee et al., 2006] Bybee, R. W. et al. (2006). *The BSCS 5E Instructional Model: Origins, Effectiveness, and Application*. [online] [cit. 3.4.2019] Colorado Springs. 46 s. Dostupné na: http://www.fremonths.org/ourpages/auto/2008/5/11/1210522036057/bscs5efullreport2006.pdf

[Duran and Duran, 2004] Duran, L. B. Duran, E. (2004). *The 5E Instructional Model: A Learning Cycle Approach for Inquiry-Based Science Teaching*. In The Science Education Rewiew. [online] [cit. 3.4.2019] 49 – 58 s. Dostupné na: https://eric.ed.gov/?id=EJ1058007

[Minner et al., 2010] Minner, D. D. Levy, A. J. Century, J. (2010). *Inquiry-Based Science Instruction—What Is It and Does It Matter? Results from a Research Synthesis Years 1984 to 2002*. In Journal of research in science teaching [online] [cit. 3.4.2019] 474 - 496 s. Dostupné na: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/tea.20347

[NRC, 1996] National Research Council (1996). *National Science Education Standards*. [online] [cit. 3.4.2019] Washington: The NationalbAcademies Press. 272 s. ISBN 978-0-309-05326-6 Dostupné na: https://www.nap.edu/login.php?record_id=4962

[Bybee, 1997] Bybee, R. W. (1997). *Achieving Scientific Literacy: From Purposes to Practices*. Portsmouth: Heinemann. 265 s. ISBN 0-435-07134-3

[Kireš et al., 2016] Kireš, M. Ješková, Z. Ganajová, M. Kimáková, K. (2016). *Bádateľské aktivity v prírodovednom vzdelávaní*. Bratislava: ŠPÚ. 128 s. ISBN 978-80-8118-155-9

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 171–173
ISBN 978-8081470936, © 2019 Ivona Demčáková

Kritický pohľad na kritické myslenie

Ivona Demčáková[1*]
Školiteľ: Zbyněk Kubáček[1‡]

[1] Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

V príspevku sa budeme venovať pojmu kritické myslenie a pokúsime sa tento poslednú dobu často spomínaný pojem vysvetliť. V druhej časti príspevku prinesieme výsledky niekoľkých pozorovaní učiteľky matematiky pričom sa zameriame na miesta vhodné na rozvíjanie kritického myslenia. Týmito miestami, ktoré sme počas pozorovaní identifikovali, sa budeme v ďalšom výskume podrobnejšie zaoberať a budeme okrem iného skúmať ich súvis s jednotlivými vlastnosťami kritického myslenia, ako ich opisujeme v našej práci.

Kľúčové slová: Kritické myslenie, hodiny matematiky, pozorovanie.

1 Kritické myslenie

Poslednú dobu sa verejnosť viacej zameriava na rozširovanie povedomia o kritickom myslení a potrebe jeho rozvíjania. Dôkazom je aj vznik Akadémie kritického myslenia, ktorá sa zameriava na rozvíjanie kritického myslenia a argumentácie manažérov a ľudí pôsobiacich v biznise.

„Najdôležitejšou črtou kritického myslenia je snaha o pochopenie akejkoľvek informácie v čo najširších súvislostiach. Kriticky mysliaci človek má myseľ vytrénovanú tak, že pri akomkoľvek tvrdení, argumente, štúdii či článku pozerá pod povrch. Skúma motívy a kvalifikáciu autorov, logickú súdržnosť prezentovaných tvrdení, dôveryhodnosť použitých dôkazov, poctivosť vo vyvodzovaní dôsledkov či vernosť vedeckej metodológii. Chápe, že na jednu vec sa dá pozerať z rôznych uhlov pohľadu a miesto toho, aby si z nich vybral jeden konkrétny a ostatné zavrhol, snaží sa ich pochopiť viacero.“ [Akademia, 2016].

Z toho vyplýva, že na predmetoch ako slovenský jazyk, cudzie jazyky, geografia, dejepis či občianska náuka, teda predmety, kde sa pracuje s informáciami, sú podmienky na rozvíjanie kritického myslenia optimálne. Náplň a charakter týchto predmetov poskytuje veľa príležitostí na rozvíjanie kritického myslenia. V matematike či iných prírodovedných predmetoch sa podmienky na rozvíjanie kritického myslenia vytvárajú ťažšie. Práca s informáciami je tu menej zastúpená, pretože sa tu pracuje vo väčšej miere s faktami.

Pre kritické myslenie sú charakteristické vyššie myšlienkové procesy ako analýza, usudzovanie, dedukcia a hodnotenie. V rámci riešenia problému človek musí uvažovať, rozhodovať sa a usudzovať. Počas uvažovania a rozhodovania človek porovnáva možnosti a rozhoduje sa podľa výhod a nevýhod jednotlivých riešení. Z preštudovaných materiálov a rôznych zdrojov informácií si človek usudzovaním vytvorí závery. Kritické myslenie sa opiera o argumenty, ktoré pozostávajú z tvrdení, dôvodov a dôkazov.

V našej práci vychádzame z definícii kritického myslenia od [Ennis, 1998] , [QepCafe, 2012], [Kolláriková, 1995] a preto budeme pracovať s nasledujúcimi vlastnosťami kriticky mysliaceho človeka. Takýto človek vie vybrať dôležité informácie, určiť pravdivosť týchto informácií, vie ich spracovať a overiť dôsledky. Kriticky mysliaci človek má schopnosť vybrať vhodné riešenie problému, podložiť svoje tvrdenia správnymi argumentmi a dokázať ich správnosť a následne dokáže zhodnotiť reálnosť svojho riešenia a výsledku.

2 Rozvíjanie kritického myslenia

„Kritické myslenie začína nastolením problémov, respektíve kladením si otázok. Hlavný rozdiel medzi kritickým a nekritickým myslením spočíva v tom, že nekritické myslenie neodhaľuje, nehodnotí, nepredpokladá, je iba iracionálne a nedôsledné, len pasívnou domnienkou“ [Eduworld, 2018].

Kritické myslenie je spravidla a zakaždým tvorivým aktom. Dominantným dejom i výsledkom v tomto procese sú však vždy zmeny v osobnej štruktúre poznania človeka, ku ktorým dochádza práve kritickým myslením. Žiak obracia v poznávacom procese pozornosť do seba, k vlastnému uchopeniu témy, a tak ide o osobne angažované učenie.

* ivona.demcakova@fmph.uniba.sk
‡ Zbynek.kubacek@fmph.uniba.sk

Máme viac možností ako rozvíjať kritické myslenie. Môžeme využiť metódy, ktoré kopírujú metódy vedeckého bádania a tak môžeme žiakom priblížiť aj spôsob práce skutočných vedcov. Rozvíjať kritické myslenie žiakov môžeme pomocou metód ako:

- brainstorming,
- myšlienková mapa,
- voľné písanie,
- sokratovský rozhovor,
- I.N.S.E.R.T,
- kladenie otázok,
- problem solving,
- riadené čítanie s diskusiou,
- prípadová štúdia,
- pexeso,
- tajničky a hlavolamy,
- šifrovačky,
- rôzne hry.

Najdôležitejšou časťou aktivít je, aby žiaci počas nich argumentovali, vysvetľovali a využívali svoje deduktívne a induktívne myslenie, ktoré im pomôže lepšie spracovávať a vyhodnocovať informácie.

Prejavom kritického myslenia sú časté otázky, ktoré človek kladie buď sám sebe, alebo svojmu okoliu. Kriticky mysliaci človek kladie otázky: Prečo? Čo sa tým myslí? Čo je dôležité? Aké sú fakty? Dá sa to overiť? [Ennis, 2011]

3 Pozorovanie

Uskutočnili sme pozorovania hodín matematiky učiteľky s malou praxou. Pozorovali sme hodiny matematiky v dvoch rôznych skupinách v piatom ročníku na bratislavskom gymnáziu. Cieľom pozorovaní bolo zistiť, či mladá začínajúca učiteľka bude rozvíjať kritické myslenie žiakov. Tiež nás zaujímalo, či sa prirodzene vyskytnú na hodinách matematiky, ktoré neboli pripravené zámerne na rozvíjanie kritického myslenia, miesta vhodné na rozvíjanie kritického myslenia. Vzhľadom na to, že sme po každej pozorovanej hodine dávali učiteľke spätnú väzbu, vyhodnotili sme aj jej celkový posun za pozorovacie obdobie.

Celkovo bolo urobených 8 pozorovaní, ktoré jej boli oznámené väčšinou jeden deň dopredu. Na začiatku sa so žiakmi venovali desatinným číslam, neskôr prešli na uhly a ich rysovanie. V každej skupine bolo približne 14 žiakov.

3.1 Desatinné čísla

Pozorované hodiny s desatinnými číslami boli prevažne zamerané na precvičovanie násobenia, delenia a zaokrúhľovania čísel a tiež na usporiadanie desatinných čísel. Hlavným typom práce počas hodín bola práca žiakov pri tabuli a zároveň ostatných do zošita. Na pozorovaných hodinách sa často stávalo, že práca žiaka pri tabuli bola pomalšia ako ostatných žiakov, ktorí potom strácali pozornosť a začínali vyrušovať.

Počas prvej pozorovanej hodiny učiteľka využívala čas, kým žiaci riešili príklady na tabuľu, aby chodila medzi ostatnými žiakmi a korigovala ich chyby a povysvetľovala časti učiva, ktoré nechápali. Často sa však vyskytovali poznámky k metóde násobenia desatinných čísel, ktoré boli charakteru „tu ti chýba čiarka“. V druhej časti hodiny používali dopredu vyrobené plagátiky s tovarom rôzneho typu. Pri tovare bola uvedená cena a žiaci mali vypočítať koľko budú platiť, ak kúpia ľubovoľné množstvo tovaru. Žiakom nerobilo problém kúpiť 2,5 parfému alebo iba 0,32 kg mrkvy. Okrem toho mali určiť akou bankovkou zaplatia a vypočítať výdavok. Tu žiaci používali bankovky z bežného života, ale vymýšľali si aj svoje, napr 7000vku. Na tejto hodine učiteľka používala zaujímavé metódy, nakupovanie žiakov bavilo, ale nepresnosti a chyby ona sama rýchlo opravovala a nedávala veľa priestoru žiakom na vzájomnú diskusiu o chybe.

Na nasledujúcej hodine začali hodinu kontrolou domácej úlohy, ktorú niektorí žiaci nemali alebo mali chyby. Rozhodli sa overiť výsledok výpočtom na tabuľu. Niektorí žiaci sa počas toho rozprávajú a nesústredia sa na dianie pri tabuli. Počas kontroly museli svoj výpočet zaokrúhľovať a preto vznikla debata, či vzniknutý rozdiel vo výsledku je malý alebo nie. Učiteľka však debatu nevyužila a pokračovala ďalej a dávala príklady na zaokrúhľovanie. Vrámci príkladov sa vyskytla situácia či 42,9 je to isté ako 42,90. Keďže niektorí žiaci váhali, učiteľka zvolala žiakov na koberec a rozdala im rôzne čísla. Ich úlohou bolo vytvoriť číselnú os. Následne si poradie čísel skontrolovali a vrátili sa na svoje miesta do lavíc.

Po týchto pozorovaných hodinách sme učiteľke dali spätnú väzbu, kde sme si spoločne prešli hodiny a pokúsili sme sa spoločne identifikovať problémové miesta hodín a navrhnúť úpravu aktivít. Učiteľka bola ochotná spolupracovať a prijímala poznámky k hodinám. Identifikovali sme, že veľkým problémom, bolo nesprávne formulovanie otázok a nedostatočná trpezlivosť pri odpovediach žiakov.

Po nejakom čase sme znova navštívili hodiny matematiky tejto učiteľky. Časť hodiny žiaci riešili príklady na delenie prirodzených čísel zo zvyškom a časť sa venovali opakovaniu desatinných čísel. Učiteľka používala rovnakú metódu, jeden žiak počíta pri tabuli a zvyšok žiakov počíta príklady do zošita.

Keďže učiteľka učí zároveň v dvoch skupinách, pozreli sme aj túto druhú skupinu, kde však práca bola rovnaká. Uzavreté otázky s jasnou odpoveďou, práca pred tabuľou a samostatne do zošita, upozorňovanie učiteľkou na chyby a ich rýchla oprava, upozornenie na dôležité veci. Mali sme

možnosť ešte vidieť aj hodinu, na ktorej sa venovali riešeniu slovných úloh s desatinnými číslami.

3.2 Uhly

Okrem týchto hodín sme pozorovali aj hodiny, ktorých témou boli uhly. Začiatok prvej pozorovanej hodiny bol venovaný meraniu uhlov uhlomerom. Učiteľka podrobne vysvetlila správny postup merania uhla aj s ukážkou na tabulu. Následne žiaci dostali pokyn, aby rysovali rôzne uhly do zošita. Následne si rozdelili narysované uhly podľa veľkosti. Na tejto hodine nastala situácia, keď učiteľka položila otázku „prečo voláme priamy uhol priamy?“ Táto otázka nás potešila a znamenala, že rozvíjanie kritického myslenia na hodinách matematiky je možné a realizovateľné. Odpoveď žiakov bola, lebo je to priamka. Následne sa vrátili k desatinným číslam a kontrolovali si domácu úlohu.

Na ďalších pozorovaných hodinách precvičovali prenášanie a porovnávanie uhlov. Učiteľka používala rysovacie pomôcky na tabulu a žiaci rysovali v zošite. Vyskytlo sa málo prípadov, kedy žiaci museli používať kritické myslenie. Na pozorovaných hodinách išlo skôr o tréning manuálnych zručností.

4 Výsledky pozorovania

Z pozorovaných hodín sme videli, že je dôležitá atmosféra na hodine a najdôležitejšie je kladenie správnych otázok. Pozorovaná učiteľka mala tendencie klásť otázky, ktoré mali uzavretú odpoveď. Neskôr pri geometrických úlohách sa vyskytli momenty, kedy učiteľka začala klásť aj otvorené otázky, ale nerozvinula ich potenciál.

Po každej odučenej hodine sme sa s učiteľkou rozprávali a analyzovali hodinu a spoločne hľadali miesta, kde by bolo možné hodinu pozmeniť tak, aby sa rozvíjalo kritické myslenie. Ako malé pozitívum týchto sedení môžeme vidieť ochotu spolupracovať a meniť svoj prístup k hodine.

Keďže učiteľka učí v ročníku dve skupiny, plánujeme urobiť pozorovania tak, že si pozrieme prvú skupinu, následne urobíme rozbor hodiny a potom necháme znovu v druhej skupine odučiť učiteľku bez našej prítomnosti. Po skončení hodiny potom zreflektujeme spoločne čo a ako na druhej hodine spravila inak. Dúfame, že budeme môcť pozorovať osobný posun pozorovanej učiteľky. Tiež sa chceme ďalej zaoberať miestami, ktoré sme počas pozorovaní identifikovali a v ďalšom výskume sa budeme podrobnejšie zaoberať a skúmať ich súvis s jednotlivými vlastnosťami kritického myslenia, ako ich opisujeme v našej práci.

5 Záver

Kritické myslenie je veľmi aktuálnou témou a potreba jeho rozvíjania v školách naráža na malú pripravenosť učiteľov. Z pozorovaní nám vyplynulo, že možnosť uskutočniť hodiny, na ktorých sa bude rozvíjať kritické myslenie nie je jednoduché a vyžaduje to aj kriticky mysliaceho učiteľa. Pozitívnym výsledkom pozorovaní je zistenie, že na hodinách matematiky prirodzene vznikajú miesta vhodné na rozvíjanie kritického myslenia.

Literatúra

[Akademia, 2016] *Čo je kritické myslenie* [online] https://kritickemyslenie.sk/co-je-kriticke-myslenie/

[Eduworld, 2018] *Kritické myslenie – povinná výbava každého z nás* [online] https://eduworld.sk/cd/nl/570/kriticke-myslenie--povinna-vybava-kazdeho-z-nas

[Ennis, 1998] Ennis, R. 1998. Is Critical Thinking Culturally Biased? In *Teaching Philosophy*. Roč. 21. č. 1. 1998. s. 15-33. ISSN 0145-5788.

[Ennis, 2011] Ennis, R. 2011. *The Nature of Critical Thinking: An Outline of Critical Thinking Dispositions and Abilities.* [online] http://faculty.education.illinois.edu/rhennis/documents/TheNatureofCriticalThinking_51711_000.pdf

[Kolláriková, 1995] Kolláriková, Z. a kol. 1995. *Výchova ku kritickému mysleniu teória a prax.* Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 1995. 93s. ISBN 80-85756-18-8.

[QepCafe, 2012]. *Facione's American Philosophical Association Statement of Expert Consensus on Critical Thinking* [online] https://sites.google.com/site/qepcafe/modules/overview/facione

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 174
ISBN 978-8081470936, © 2019 Matej Uher

Tvorba databázy úloh z matematických súťaží s cieľom aplikácie vo vyučovacom procese (rozšírený abstrakt)

Matej Uher[1†]
Školiteľ: Štefan Solčan[1‡]

[1] Katedra algebry a geometrie, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Matematika je veľmi zaujímavý vyučovací predmet. Niektorí vnímajú matematiku iba ako súbor výpočtových zručností a algoritmov, ktoré sa treba naučiť a správne používať. Avšak to nie je úplne v súlade s tým, aké ciele sú dané pre matematiku v Štátnom vzdelávacom programe. Tam nachádzame ciele ako: rozvíjať logické a kritické myslenie, usmerňovať a pobádať žiakov k vhodnej argumentácii svojich tvrdení, pracovať s číselnými aj nečíselnými údajmi a hľadať medzi nimi súvislosti a vzťahy. Dané ciele sa najčastejšie dosahujú pomocou riešenia rôznych matematických úloh. A preto je dôležité využívať vhodné problémy, ktoré budú rozvíjať hore uvedené ciele.

Keď sa pozrieme na úlohy z rôznych matematických súťaží, tak si môžeme všimnúť, že väčšina z nich sa snaží rozvíjať spomenuté ciele. Avšak tieto úlohy sú roztrúsené v rôznych súťažiach a taktiež v nich nebývajú triedené, čo sťažuje prácu s nimi. Preto sme sa rozhodli úlohy z týchto súťaží zozbierať a roztriediť, aby boli pre učiteľov ľahšie využiteľné v ich prípravách na vyučovanie. Ako vhodný nástroj, ktorým tieto úlohy chceme ponúknuť, sme si vybrali online databázu.

Databázu sme začali tvoriť postupne, pričom sme sa rozhodli, že si vyberieme iba jednu matematickú súťaž a tou začneme databázu napĺňať. Ako vhodnú súťaž sme si zvolili Riešky, pretože obsahuje dostatočné množstvo úloh (200+) a tieto úlohy sú väčšinou neštandardné a obsahujú aj motivačný text. Ďalej bolo potrebné určiť si kategórie, podľa ktorých sa bude dať v databáze úlohy vyhľadávať, respektíve triediť. Na základe iných databáz a vlastného usúdenia sme si zvolili nasledujúcich 7 hlavných kategórii:

- Ročník
- Séria
- Úloha
- Téma
- Štandardná/Neštandardná úloha
- Úloha s motivačným textom
- Úloha z reálneho života

Prvé tri kategórie slúžia na jednoznačné určenie úlohy, aby sa dala dohľadať v archívoch spomínanej súťaže. Zvyšné kategórie približujú charakter úlohy a jej možné využitie vo vyučovacom procese.

Takýmto spôsobom sme rozkategorizovali 213 úloh zo súťaže Riešky a následne sme túto databázu predstavili menšej skupinke učiteľov (dokopy 25 učiteľov), ktorých sme skrze dotazník poprosili o spísanie podnetov na zmenu danej databázy.

Z dotazníka nám vyplynulo niekoľko zistení. Prvým je, že učitelia by takúto databázu privítali a to najmä v dvoch rovinách: ako pomoc pri ich prípravách na vyučovania a pri rozvíjaní talentovaných žiakov. Druhým zistením bolo, že učitelia by potrebovali, aby úlohy v databáze pokrývali väčšinu tém zo Štátneho vzdelávacie programu.

Ďalej sme na základe vlastnej skúsenosti pri kategorizovaní úloh narazili na pár problémov, ako nejednoznačnosť niektorých kategórii (hlavne reálny kontext) a ďalej na to, že niektoré kategórie nemajú triediaci charakter (väčšina úloh je neštandardná).

Preto sa v najbližšej dobe zameriame na prestavbu kategórii v databáze a následne ju na základe toho budeme prerábať. Konkrétne zmeny budú nasledovné:

- Pridanie delenia úloh na základe Bloomovej taxonómie cieľov
- Namiesto používania kategórie „Štandardná/ Neštandardná“ budeme používať delenie tvorivých úloh podľa Zelinu.
- Kategóriu „reálny kontext“ zmeniť, aby bola jednoznačnejšie určiteľná v rôznych typoch úloh a nezamieňala sa s kategóriou „motivačný text“.

Literatúra

[Riešky, 2019] Riešky (2019). O nás. [online]. Dostupné na: http://riesky.sk/o-nas/

[Uher, 2019] Uher M. (2018). Tvorba databázy úloh z matematických súťaží s cieľom aplikácie vo vyučovacom procese. (Písomná časť dizertačnej skúšky). KAGDM FMFI UK Bratislava.

[Uher, 2018] Uher, M (2018). Matematické súťaže môžu byť in. IN Zborník z konferencie Dva dni s didaktikou matematiky. FMFI UK Bratislava. 98-101 s. ISBN 978 – 80 – 8147 – 087 – 5.

† uher.matej@gmail.com
‡ Stefan.Solcan@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 175
ISBN 978-8081470936, © 2019 Mária Čujdíková

Hranie videohier a vnímanie matematiky (rozšírený abstrakt)

Mária Čujdíková[1]*
Školiteľ: Ivan Kalaš[1‡]

[1] Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Videohry neodmysliteľne patria k dnešnej digitálnej dobe. Sú obľúbenou formou zábavy mnohých, najmä mladých ľudí. Viacero výskumov však ukazuje, že nie sú iba zdrojom zábavy, ale že predstavujú aj dobrý prostriedok na rozvoj rôznych kompetencií potrebných pre život v 21. storočí. Dnes už existuje tiež viacero štúdií, ktoré potvrdzujú aj koreláciu medzi hraním videohier a rozvojom matematického myslenia.

Videohry sa javia ako jeden z výborných nástrojov, ako sa stretnúť s matematikou svojím spôsobom prirodzene (Devlin, 2011; Gee, 2003). Poskytujú množstvo výziev, kde potrebujeme logicky rozmýšľať, rýchlo reagovať, tvoriť stratégie, lúštiť rôzne šifry, chápať mechanizmy, spájať súvislosti, odhaľovať zákony platiace v danom prostredí, využívať kombinatorické úvahy, premýšľať nad pravdepodobnosťou a tiež orientovať sa v zložitom priestore. Na problémy, ktoré treba riešiť, narážame spontánne, objavujeme ich ako súčasť preskúmavania herného sveta. Sú pre nás niečím, čo sa nás dotýka, súčasťou dobrodružstva.

Formou dotazníka som skúmala, ako žiaci tretieho ročníka na troch bratislavských gymnáziách vnímajú matematiku, aké videohry a ako často hrajú a tiež ako vnímajú, že sa pri hraní videohier stretávajú s matematikou. Celkovo sa zapojilo 108 žiakov.

Otázky na vnímanie matematiky som v dotazníku úmyselne formovala tak, aby sa neviazali automaticky len na školskú matematiku a zaujímalo ma, ako sa k nim žiaci postavia. Súčasťou dotazníka bola otázka, ktorá zisťovala, ako žiaci vnímajú, že sa s matematikou stretávajú pri hraní videohier

Ukázalo sa, že až 68 % z týchto žiakov hrá počítačové, konzolové alebo mobilné hry aspoň niekoľko krát za mesiac. Medzi najobľúbenejšie počítačové a konzolové hry zaraďovali GTA (RPG, akčná, adventúra), FIFA (športová), NHL (športová), Minecraft (adventúra, RPG) a Call of Duty (akčná). Medzi najobľúbenejšie mobilné hry zaradili PUBG (akčná - battle royale), Episode (interaktívny príbeh), Candy crush (logická), Rider (športová) a Hearthstone (kartová stratégia).

Na základe analýzy otázok zameraných na matematiku som vyhodnotila vzťah jednotlivých žiakov k nej. Ukázalo sa, že vnímanie matematiky je u týchto žiakov veľmi rôznorodé. Pri otázke "Čo pre teba znamená riešenie matematických problémov?" sme mohli identifikovať niekoľko uhlov pohľadu. Niektorí sa zamerali na vyjadrenie pocitov alebo postojov, iní na opísanie činnosti a ďalší na popis zmyslu. V otázke zameranej na pocity z matematiky žiaci najčastejšie vyberali pocit zložitá (59,6 %), užitočná (53,2 %) a zaujímavá (47,7%). Pestrosť vnímania sa ukázala aj pri otázke „Čo sa ti na matike páči/baví ťa?". Na základe analýzy otázok zameraných na matematiku som vyhodnotila vzťah jednotlivých žiakov k matematike..

Ukázalo sa, že väčšina žiakov, ktorí hrajú videohry si uvedomuje, že sa v nich v určitej miere stretáva s matematikou. Iba 14-ti z celkového počtu 65 hráčov si myslia, že sa vo videohrách s matematikou nestretávajú vôbec. Takých, čo si myslia, že sa pri hraní stretávajú s matematikou často bolo 13. Za obzvlášť zaujímavé považujem, že až 45% z nich boli žiaci, ktorí k matematike inak nemajú moc dobrý vzťah. V budúcom výskume chcem zistiť, ako presnejšie títo žiaci matematiku v hrách vnímajú a aký rozdiel vidia medzi touto matematikou a matematikou, ktorú mali na mysli pri zvyšných otázkach. Pre dobrovoľníkov spomedzi žiakov, ktorí vyplnili dotazník, povediem herný krúžok. Na ňom ich budem počas hrania pozorovať a pýtať sa ich, ako pri hraní uvažujú. Na základe toho chcem hľadať odpoveď na otázku, ako presnejšie nastáva rozvoj matematického myslenia vďaka hraniu videohier. Článok bude dostupný v zborníku česko-slovenskej psychologickej konferencie PHD existence 2019.

Literatúra

[DEVLIN, K.] (2011). Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning. Natick: A. K. Peters, Ltd. Natick, MA. [GEE, J. P.] (2003). What videogames have to teach us about learning and literacy. New York: Palgrave Macmillan.

* cujdikova1@uniba.sk
‡ Ivan.Kalas@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 176
ISBN 978-8081470936, © 2019 Barbora Matušková

Vyučovacia metóda Flipped Classroom na hodinách štatistiky strednej školy (rozšírený abstrakt)

Barbora Matušková[1]*
Školiteľ: Monika Dillingerová[2†]
[1] Katedra algebry a geometrie, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
[2] Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

V súčasnej dobe sme neustále obklopení internetom a internetovými zdrojmi, ktoré mám poskytujú množstvo dokumentov, rôznych materiálov s informáciám. Nie vždy sú tieto informácie dôveryhodné a pravdivé. Rovnako sú týmito online materiálmi obklopení aj študenti stredných škôl/gymnázií. V poslednej dobe sme si všimli, že mnoho študentov pri riešení domácich úloh hľadá informácie práve z rôznych internetových zdrojov. Taktiež na našej pedagogickej praxi sme zaznamenali, že učiteľ matematiky vysvetlí nové učivo a študentom zadá na domácu úlohu vyriešiť niekoľko úloh. Nasledujúcu vyučovaciu hodinu prvých 20 minút strávi kontrolou domácej úlohy a vysvetľovaním správneho riešenia. Na vyučovaní nie je čas na precvičovanie problémových alebo komplexnejších úloh, niekedy ani tých jednoduchších. Problém s nedostatkom času na vyučovaní rieši, podľa nášho názoru vyučovací model *Flipped Classroom*. Hlavnou myšlienkou tohto modelu je, aby si študenti teóriu pozreli doma z materiálov poskytnutých od učiteľa a v škole na vyučovaní precvičovali praktické zručnosti s pomocou a pod dozorom učiteľa.

Vyučovací model *Flipped Classroom* sme sa rozhodli aplikovať do vyučovacieho procesu predmetu matematika. Hlavný cieľom bolo zistiť, či je vôbec možné vyučovať matematiku prostredníctvom spomínanej vyučovacej metódy. Vytvorili sme celkovo 11 modelov vyučovacích hodín s uplatnením vyučovacej formy *Flipped Classroom* v rámci tematického celku *Štatistika*. Tieto návrhy modelov sme následne začlenili priamo do vyučovania matematiky na jednom z gymnázií v Bratislavskom kraji. Celkovo sme mali k dispozícii jednu triedu s 28 respondentami. Vyučovacie hodiny viedol ich učiteľ matematiky. My sme boli na daných vyučovacích hodinách prítomní ako pozorovatelia.

Na základe spracovania a vyhodnotenia uskutočneného výskumu, sme vytvorené návrhy modelov vyučovacích hodín upravili na ich konečnu verziu. Taktiež sme v rámci týchto modelov vytvorili aj materiál, ktorý je určený pre študentov na ich domácu prípravu na vyučovanie. Dúfame, že tieto nami vytvorené hodiny a materiály budú nápomocné pre učiteľov, ktorých zaujal vyučovací model *Flipped Classroom* a chcú v rámci neho začať realizovať svoju výuku.

Po realizácií výskumu a vyhodnotení výsledkov môžeme povedať, že podľa nás má zmysel *Flipped Classroom* používať aj na hodinách predmetu matematika. Táto forma vyučovania poskytuje priestor na riešenie zaujímavých, aplikačný, problémových úloh, ale aj na mechanické precvičovanie a nácvik počtových zručností. Väčšina študentov zapojených do výskumu si plnila školské povinnosti, takže nemali problém si doma pred vyučovaním pozrieť teóriu. Odporúčame však na začiatku pomôcť študentom a naučiť ich správne sa doma učiť, teda ako zmysluplne prechádzať materiálom, aby to malo pre nich význam aj do budúcnosti. Pripravíme ich týmto aj na štúdium na vysokej škole.

Literatúra

[Bergmann, 2011] Bergmann, J. The History of the Flipped Class. 2011. [online], [cit. 2019-04-04]. Dostupné na: <https://flippedclass.com/the-history-of-the-flipped-class/>

[Bergmann, Sams, 2014] Bergmann, J.; Sams, A. Flipped Learning. 2014. [online], [cit. 2019-04-04]. Dostupné na: <https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/>

[Matušková, 2019] Matušková, B. Vyučovacia metóda Flipped Classroom na hodinách štatistiky strednej školy. Rigorózna práca. KDMFI FMFI UK Bratislava, 2019. 87s.

* barbora.matuskova@fmph.uniba.sk
† monika.dillingerova@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 177–185
ISBN 978-8081470936, © 2019 Simona Gorčáková

Možnosti využitia tichého videa v príprave študentov učiteľstva fyziky

Simona Gorčáková[1]*
Školiteľ: Klára Velmovská[1]‡

[1]Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

Tiché video, ako úloha zadávaná študentom, vzniklo s cieľom dostávať do povedomia učiteľov matematický softvér GeoGebra, a zároveň rozvíjať verbalizáciu matematického jazyka. Autori definujú tiché video ako úlohu, ktorá môže byť použitá na hodinách matematiky naprieč rôznymi kultúrami a jazykmi. Vidíme možnosť využiť takúto formu úlohy aj na hodinách fyziky, konkrétne pre študentov učiteľstva fyziky. V príspevku sa venujeme vymedzeniu pojmu tiché video a možnostiam jeho využitia v príprave budúcich učiteľov. Príspevok taktiež obsahuje analýzu konkrétnych okomentovaných videí. Aktivity s tichými videami sme realizovali so študentmi prvého ročníka magisterského stupňa v odbore učiteľstvo fyziky v kombinácii na predmete Metódy riešenia fyzikálnych úloh, videá sme ohodnotili a tiež vypracovali rozbor komentárov.

Kľúčové slová: tiché video, SOLO taxonómia, študenti učiteľstva fyziky, vyučovanie fyziky

1 Úvod

Tento príspevok je venovaný tichému videu, ako úlohe zadávanej študentom učiteľstva fyziky. V práci predstavujeme tiché video ako úlohu, ktorú možno využiť v príprave študentov učiteľstva fyziky. Ako možný nástroj na hodnotenie komentárov vidíme využitie SOLO taxonómie.

Našim cieľom spolu s vytvorením tichých videí je overiť možnosti zaradenia takejto úlohy do prípravy budúcich učiteľov fyziky. V prvom rade sme realizovali predvýskum, vďaka ktorému sme sa zorientovali v možnostiach použitia a zaradenia tichého videa do prípravy študentov učiteľstva fyziky z hľadiska technickej realizácie. Závery tohto predvýskumu sme využili pri realizácii prieskumu, v ktorom sme hodnotili a porovnávali komentáre k tichým videám od študentov učiteľstva fyziky a diskutovali s nimi o prínosoch a nedostatkoch tichého videa ako typu úlohy.

1.1 Tiché video – vymedzenie pojmu

Hreinsdóttir a kolektív [Hreinsdóttir, Kristinsdóttir, Lavicza, 2018] definujú tiché video nasledovne: „Tiché video je animované krátke video bez akéhokoľvek textu, tituliek alebo slovného komentáru, ktoré ukazuje matematiku dynamicky, sústrediac sa na jeden matematický problém. Tiché video môže byť použité na hodinách matematiky naprieč rôznymi kultúrami a jazykmi dávajúc študentom za úlohu nahrať komentár k videu."

Úloha zadaná pomocou tichého videa bola vytvorená pre použitie v matematike, kde napomáha rozvíjať verbalizáciu matematického jazyka, čo nie je pre študentov v dnešnej dobe triviálna záležitosť. Podľa autorov definície môže byť tiché video ako úloha použitá naprieč rôznymi krajinami. My si myslíme, že aj naprieč rôznymi prírodovednými predmetmi, a teda aj vo fyzike. A taktiež aj naprieč rôznymi stupňami vzdelávania, a teda aj počas vysokoškolského štúdia.

1.2 Nordic GeoGebra Network

GeoGebra je matematický softvér, ktorý spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Bola vytvorená predovšetkým pre učiteľov a ich študentov. Šírenie tohto softvéru, ako aj iných materiálov a skúseností súvisiacich s digitálnymi technológiami vo vyučovaní matematiky, je hlavným cieľom združenia Nordic GeoGebra Network. Toto zoskupenie tvoria prevažne učitelia matematiky, ale taktiež v značnej miere aj vzdelávatelia učiteľov, výskumníci a budúci učitelia z viacerých európskych krajín, a to z Dánska, Estónska, Fínska, Islandu, Litvy, Lotyšska, Nórska a Švédska. „Každoročne v jednej zo svojich krajín usporadúvajú konferenciu pre učiteľov matematiky, aby tak umožnili učiteľom navzájom sa od seba učiť a tiež spolupracovať na medzinárodných projektoch súvisiacich s digitálnymi technológiami vo výučbe matematiky." [Hreinsdóttir, Kristinsdóttir, 2016]

* simagorcakova@gmail.com
‡ Klara.velmovska@fmph.uniba.sk

Každá konferencia sa nesie v duchu spoločnej témy. Posledná konferencia v Kodani, ktorá sa konala v septembri 2018, sa niesla v duchu motta: „Učitelia zajtrajška v multikultúrnej a digitálnej spoločnosti.“ [Nordic Geogebra Network, 2018]

Počas konferencie v Dánsku v roku 2013 bola prvýkrát predstavená myšlienka tvorby tichého videa ako formy úlohy.

2 Tiché video v príprave budúcich učiteľov fyziky

Cieľom prípravy budúcich učiteľov je aj rozvoj ich kompetencií. Podľa Krajčovej a Daňkovej [Krajčová, Daňková, 2001] kompetencie učiteľa tvorí súbor určitých dispozícií a zručností v rôznych oblastiach, medzi inými aj v komunikatívnej. Kožuchová [Kožuchová a kol., 2011] podľa návrhu Európskej komisie uvádza medzi kompetenciami učiteľa vzťahujúcimi sa na výsledky učenia aj schopnosť reflexie a sebahodnotenia vlastnej práce. Krušpán s Volníkovou [Krušpán, Volníková, 2007] zas v rámci organizačných kompetencií spomínajú aj organizovanie informácií učiteľom v priebehu ich vysvetľovania.

Vychádzajúc z vyššie spomenutých kompetencií, máme za to, že tiché video rozvíja tieto aspekty súvisiace s budúcim povolaním učiteľa:

- **Verbalizácia myšlienok** a **argumentácia** – často sa na vyučovaní fyziky stáva, že študenti diskutujú o nejakom jave. Lenže vždy je to jeden človek, ktorý sa vyjadrí a ostatní si možno mysleli presne to isté, alebo ak aj nie, už sú ovplyvnení predošlými názormi a buď súhlasia alebo nie. Tiché video dáva jedinečnú možnosť študentovi, aby sa vyjadril bez ovplyvnenia ostatnými študentmi. Druhý aspekt je aj samotná verbalizácia, pretože často si myslíme, že niečo nejako funguje, ale nevieme to vyjadriť slovne, preto keď odpovie jeden človek v triede, to vyjadrenie spraví za nás. Pokiaľ sa vyjadrujeme k tichému videu, musíme slová naformulovať sami.
- **Časový manažment prejavu** – dĺžka tichého videa je v rozmedzí jednej až dvoch minút, čo nedáva študentovi čas na rozsiahle rozpravy o danom jave. Podobne je dôležité pre učiteľa, aby sa vedel vyjadrovať presne, stručne a jasne. Preto je tiché video dobrým prostriedkom pre nácvik aj tejto zručnosti.
- **Technické zručnosti** – samotná technická realizácia je pre študenta užitočnou, pretože rozvíja a rozširuje jeho technické zručnosti.
- **Sebareflexia** – študent má možnosť prehrať si video po nahratí komentára a tým zhodnotiť svoj prejav. Tento aspekt je pre budúceho učiteľa veľmi dôležitý kvôli uvedomeniu si svojich nedostatkov, zrozumiteľnosti svojho prejavu a podobne.
- **Sebahodnotenie** - pri spoločnom prezeraní niektorých videí spolu s učiteľom si môžu študenti porovnať svoje komentáre s komentármi spolužiakov a tak ohodnotiť svoj komentár v porovnaní s ostatnými.

2.1 Obsah tichých videí

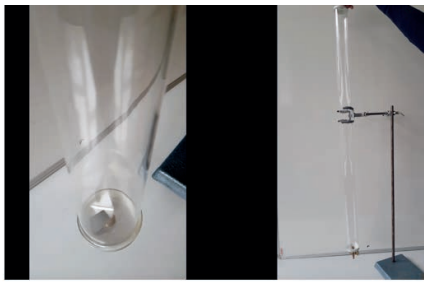
Vo fyzike tiché video zachytáva nejaký fyzikálny jav. Dĺžka videosekvencie by mala byť v rozmedzí jednej až dvoch minút, preto sú vhodné napr.:

- videá vytvorené pomocou interaktívnych fyzikálnych appletov,
- krátke videosekvencie fyzikálnych pokusov,
- krátke videosekvencie situácií z bežného života a iné.

My sme vytvorili tiché videá pomocou appletov aj tiché videá zobrazujúce fyzikálne javy. Pri fyzikálnych appletoch treba dávať pozor, či sú fyzikálne správne, pretože sa v nich môžu nachádzať nejaké fyzikálne nezrovnalosti, teda nemusia byť celé fyzikálne bezchybné. Čo však neznamená, že ich nemôžeme použiť, pokiaľ chceme overiť pochopenie daného javu u študentov, chyba v applete je vtedy pre nás javom žiaducim.

Čo sa týka krátkych pokusov, vyberali sme také pokusy, ktoré sú známe, ale zo skúsenosti vyučujúcich ich študenti nevedia správne vysvetliť. Spravidla však môže byť akýkoľvek krátky pokus spracovaný do úlohy zadanej pomocou tichého videa. Po konzultácii s viacerými vyučujúcimi v oblasti didaktiky fyziky sme zvolili nasledovné pokusy:

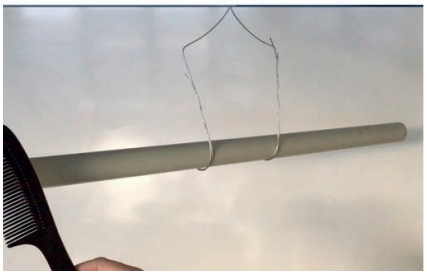
Newtonova trubica (Obr. 1) – v Newtonovej trubici necháme padať pierko a kus kovového pliešku najskôr vo vzduchu a potom po vysatí vzduchu. Na videu nevidno, že vysávame vzduch pomocou vývevy, avšak očakávame, že to bude v komentári spomenuté.



Pohár (Obr. 2) – najskôr pohár naplníme doplna vodou, položíme naň papier tak, aby zakrýval celý otvor pohára a pohár otočíme. Voda z pohára

nevytiekla. Pokus opakujeme, ale s poloprázdnym pohárom.

Elektrostatika (Obr. 3) – skúmame priťahovanie sa a odpudzovanie sa rôznych materiálov nabitých kladne,



2.2 Využitie tichých videí

Spôsobov, ktorými sa dá zaradiť video do prípravy budúcich študentov je viacero. Všetky závisia od toho, ktorú spôsobilosť chce vyučujúci pomocou tichého videa u študentov rozvíjať. Pod rôznym zaradením rozumieme zaradenie do rôznych častí vyučovacieho procesu, ale aj zadanie rôznej úlohy pomocou tichého videa. Rozlišujeme tieto základné typy úloh:

- **nahratie komentáru k tichému videu,**
- **hodnotenie okomentovaného tichého videa,**
- **tvorba tichého videa.**

Prvým základným zadaním úlohy je nahratie komentáru k tichému videu. Úloha môže byť zadaná ako domáca, ale aj na prácu priamo na vyučovaní. Doma majú študenti možnosť sledovať video koľkokrát potrebujú a nie sú nijako časovo obmedzení, nikto ich neruší a môžu pokojne pracovať. Negatívom však je, že si môžu veľa vecí vyhľadať a pokiaľ chce učiteľ overiť pochopenie nejakého javu, výsledný komentár nemusí odrážať skutočnú vedomosť študenta. Počas práce na hodine študenti nemajú prístup k ostatným zdrojom, ale sú obmedzení na 45 prípadne 90 minút, zároveň keď v jednej triede nahráva zvuk viacero študentov, vzniká hluk, ktorý môže študentov vyrušovať. Závisí teda od učiteľa, či chce použiť tiché video na overenie vedomostí, vtedy je použitie na hodine určite výhodnejšie, alebo na rozvoj kompetencií učiteľa, vtedy má väčšie výhody domáca úloha.

Ďalším spôsobom použitia je hodnotenie už existujúcich komentárov k tichým videám. Budúci učiteľ bude pravidelne hodnotiť svojich študentov a ich práce, preto je pre neho užitočný nácvik aj takýchto zručností. Pričom vyučujúci môže študentovi poskytnúť akúsi osnovu alebo hodnotiaci hárok s aspektmi, ktoré treba hodnotiť. Alebo môže nechať celý tento proces na študentovi s tým, že si študent sám vytvorí takýto hárok a kritériá, podľa ktorých bude komentár hodnotiť.

Tretím spôsobom, ktorým sa dá zaradiť tiché video do vyučovania, je jeho tvorba. Úlohou študenta by bolo vytvorenie tichého videa, ktoré bude zadané spolužiakom. Budúci učiteľ, ktorý už má za sebou komentovanie tichého videa a prejde hodnotením okomentovaných videí, by dostal za úlohu takéto video vytvoriť. Musel by vybrať vhodný pokus, prípadne nejaký fyzikálny jav, zaznamenať ho, spracovať video, vytvoriť hodnotiaci hárok, zamyslieť sa nad tým, ktoré kompetencie by to u žiakov rozvíjalo. Táto aktivita by modelovala budúcu tvorbu napríklad testov alebo pracovných listov, ktoré učiteľ v praxi tvorí.

2.3 Hodnotenie tichých videí

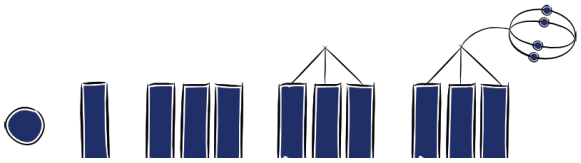
Predtým, ako sa budeme venovať hodnoteniu tichých videí, spomenieme hodnotenie ako také.

Demkanin [Demkanin, 2018] rozlišuje hodnotenie na formatívne a sumatívne. Pod formatívnym hodnotením rozumieme hodnotenie pre učenie, a teda v podstate aj každú spätnú väzbu. Sumatívne hodnotenie je zas hodnotením dosiahnutých výsledkov. Najčastejšie je aj nejakým spôsobom kvantifikované. Pri úlohách zadaných tichým videom využívame oba typy hodnotenia. Zatiaľ čo pri formatívnom hodnotení zohľadňujeme aj subjektívnu stránku študenta, jeho progres, pri sumatívnom hodnotení hodnotíme samotný komentár. Preto je potrebné stanoviť si kritéria, na základe ktorých budeme komentáre hodnotiť. Na tento účel je vhodná SOLO taxonómia.

2.3.1 SOLO taxonómia

Na hodnotenie obsahu nahratých komentárov používame podobne ako Hreinsdóttir [Hreinsdóttir, Kristinsdóttir, 2016] SOLO (the Structure of Observed Learning Outcomes) taxonómiu, ktorá

rozlišuje úrovne poznatkov na preštrukturálnu, uništrukturálnu, multištrukturálnu, relačnú a rozšírenú abstraktnú. Preštrukturálna úroveň obsahuje poznatky nesprávne, mimo témy, chybné a nerelevantné. Uništrukturálna úroveň charakterizuje zameriavanie sa na jeden jav, jednu konkrétnu vec, ktorú študent opisuje. Multištrukturálna pozostáva z viacerých poznatkov, ktoré študenti menujú, vytvoria algoritmus. Relačná obsahuje multištrukturálne poznatky, ktoré študenti dávajú do vzťahu, kombinujú ich, analyzujú, aplikujú a vytvárajú širší obraz o jave. Rozšírená abstraktná úroveň poznatkov obsahuje opis rôznych nových pohľadov na daný jav, hodnotenie, generalizáciu, vytváranie nových predstáv. Pre nás je najzaujímavejšou práve tá najvyššia, rozšírená abstraktná, úroveň. SOLO taxonómia je graficky znázornená na Obr. 4. Túto taxonómiu sme ďalej použili na klasifikáciu poznatkov a vytvorenie hodnotiacich hárkov.



Obr. 4 SOLO taxonómia poznatkov – Úrovne poznatkov zľava: preštrukturálna, uništrukturálna, multištrukturálna, relačná a rozšírená abstraktná.

2.3.2 Hodnotiace hárky

Pri hodnotení komentárov nás nezaujíma len obsah, ale aj forma a určité črty, ktoré nahrané komentáre mali. Všímame si presnosť vyjadrovania, jasnosť, používanie správnych názvov fyzikálnych veličín, originalitu komentáru, či sa študent stavia do roly učiteľa, ktorý vysvetľuje, alebo učiteľa, ktorý kladie otázky. Všímame si aj rôzne špecifiká, ktoré sa môžu vyskytnúť v komentároch – napr. emóciami podfarbený komentár, z ktorého cítiť rozhorčenie a iné.

Tieto faktory spomíname hlavne vo formatívnom hodnotení, ktoré dávame vo forme spätnej väzby pri diskusii so študentmi. Na sumatívne hodnotenie sme ako pomôcku vytvorili hodnotiace hárky pre každé video, ktoré obsahujú konkrétne kritériá spolu s bodovým ohodnotením. Obsah komentáru, teda poznatky, ktoré boli potrebné na jeho vytvorenie, sme zaradili podľa SOLO taxonómie do jednotlivých úrovní a podľa toho im priradili bodové hodnoty. Zároveň sme určili niektoré kritériá, čo sa týka formy komentáru, ktoré chceme hodnotiť:

- Jedným zo základných kritérií formy je zrozumiteľnosť. Pod zrozumiteľnosťou myslíme dostatočnú artikuláciu, správnu vetnú skladbu, intenzitu hlasu a podobne.
- Ďalším kritériom je, či výklad ako taký je postačujúci, či študent nepreskakuje dôležité myšlienkové kroky.
- Dôležité je aj nejaké oživenie, tým myslíme niečo navyše, čo študent do komentáru vloží, napr. kladenie doplňujúcich otázok, nejaká iná aktivizácia publika, originálny koncept komentáru a podobne.
- Nedá nám nespomenúť aj parazitické slová, pretože ich používanie častokrát publikum vyrušuje. Akýkoľvek prejav učiteľa by mal obsahovať minimum takýchto slov.
- Posledným kritériom, ktoré hodnotíme, je technické spracovanie komentáru k videu, a to konkrétne, či je komentár počuť, či nie je v pozadí nejaký šum, nejaké hluché miesta a iné.

Každé z týchto kritérií hodnotíme na stupnici 0 až 2 body, pričom 2 body sú za ideálny stav, 0 za nežiaduci stav. Jeden bod znamená niečo medzi. Pričom pokiaľ sa vyskytujú nejaké minimálne odchýlky od ideálneho komentára prikláňame sa k plnému počtu bodov.

Obsahové kritériá hodnotíme na podobnom princípe, pričom bodové intervaly závisia od úrovne daných poznatkov podľa SOLO taxonómie. Hodnotenie potom predstavuje súčet bodov za oblasť obsahovú a formálnu.

Na obr. 5 uvádzame Hodnotiaci hárok pre úlohu Pohár.

Meno:

	Všimol si, že pri prevrátení vytiekla z pohára voda	0 1
	Rozlišuje pojmy sila a tlak	0 1 2
	Identifikuje a správne pomenuje príčinu javu - podtlak	0 1 2 3
	Správne vysvetlí, prečo vznikol podtlak	0 1 2 3 4
	Zovšeobecní tvrdenie aj pri poloprázdnom pohári, vysvetlí, že ide o ten istý jav v oboch prípadoch. Prepojí obe situácie.	0 1 2 3 4 5
Spolu - obsah		
Komentár je zrozumiteľný.		0 1 2
Nepreskakuje dôležité kroky pri vysvetľovaní.		0 1 2
Oživenie – kladenie otázok, aktivizácia publika, niečo originálne		0 1 2
Nepoužíva parazitické slová		0 1 2
Po technickej stránke video s komentárom neobsahuje žiadne chyby.		0 1 2
Spolu - forma		
Celkom		

Obr. 5 Hodnotiaci hárok – Pohár

3 Predvýskum zameraný realizáciu tichého videa v rámci vyučovania

Cieľom príspevku je vytvorenie súboru tichých videí a overenie možností ich zaradenia do prípravy študentov učiteľstva fyziky. Keďže chceme takýto súbor videí vytvoriť vhodne, najskôr sme uskutočnili tzv. predvýskum. Pozostával zo štyroch bodov:

- vytvorenie tichého videa pomocou appletov na stránke: https://phet.colorado.edu/sk/simulations/category/physics,
- zadanie domácej úlohy študentom učiteľstva fyziky,
- analýza výsledkov,
- diskusia so študentmi.

Úlohou predvýskumu bolo overiť technickú stránku spracovania tichého videa – vhodnej dĺžky, zadania úlohy a ostatných technických možností, získanie spätnej väzby od študentov, ktorí tiché videá komentovali, overenie vhodnej voľby obsahu tichých videí.

V rámci predvýskumu sme si kládli nasledovné výskumné otázky:

- Dokážu študenti učiteľstva fyziky pracovať s technológiami a nahrať komentár k videu?
- Na akej úrovni študenti učiteľstva fyziky ovládajú a správne používajú odbornú terminológiu z fyziky?
- Budú študenti učiteľstva komentovať video z pozície pozorovateľa alebo aj z pozície vysvetľujúceho?

Na tvorbu tichého videa sme využili už vyššie spomínané applety z PhET-u. Zvolili sme applet Matematické kyvadlo, ktorý zobrazuje podstatu fungovania matematického kyvadla, avšak nie je úplne fyzikálne korektný. Úloha pre študentov bola zadaná nasledovne: *Nahrajte komentár k nasledujúcemu videu. Ak budete potrebovať pomôcť s technickou stránkou, obráťte sa na nás.* Úlohu sme zadali otvorene, čo sa týka roly komentujúceho, pretože nás zaujímalo, akú úroveň komentovania študenti zvolia – video sa dá okomentovať na úrovni študenta ZŠ, SŠ aj VŠ, prípadne na úrovni učiteľa. Rovnako sme nechali otvorené aj technické možnosti, pretože cieľom bolo zistiť práve, aké spôsoby sú najvhodnejšie pre spracovanie, a zároveň overiť technické zručnosti týchto študentov.

Úlohu sme zadali desiatim študentom prvého ročníka magisterského stupňa učiteľstva fyziky. Na spracovanie úlohy mali študenti desať dní, pričom odovzdávanie prebehlo online – cez google drive, úschovňu a sociálnu sieť. My sme následne zhromaždili všetky videá do jedného priečinku na google disku. Prvým postrehom pre nás teda je **vytvoriť dopredu priečinok na google disku**, aby mohli študenti priamo odovzdávať videá sem, čo nám značne uľahčí prácu.

Čo sa týka vyhodnotenia výsledkov, videá sme zanalyzovali a následne sme ich sledovali spoločne so študentmi, ktorí ich spracovali. Technickú stránku nahratia komentáru k videu študenti riešili viacerými spôsobmi:

- nahratie komentáru k videu na mobil, prípadne v zvukovom editore a následné vloženie zvuku do obrazu pomocou programu na úpravu videí,
- pomocou aplikácie, ktorá priamo nahráva komentár k spustenému videu,
- nahrávanie obrazovky počítača mobilným telefónom, na ktorej je prehrávané video, rozprávajúc komentár.

Najčastejším spôsobom spracovania bolo práve nahratie komentáru osobitne na nejaké zariadenie a vloženie do videa pomocou videoeditora. Takýmto spôsobom bolo spracovaných päť z 8 videí. Dve videá boli spracované pomocou konkrétnych aplikácii, ktoré do spusteného videa priamo nahrali zvuk, tu bol však problém s kvalitou výsledných videí, ktorá bola značne obmedzená. Taktiež sa vo videách nachádzal vodoznak, čo však neprekážalo, lebo video sa nemenilo a my sme ho mali v pôvodnej forme. Zároveň má mať video náučný charakter a nebude slúžiť na prezentáciu niečoho, teda ani v tomto ohľade nie je vodoznak na škodu. Najzaujímavejší bol pre nás ale tretí, posledný spôsob spracovania, pretože bol časovo aj technicky najmenej náročný a tento spôsob nám pred samotnou realizáciou nenapadol. Nahrávanie obrazovky počítača mobilom so súbežným komentovaním by tiež mohlo byť vhodnou formou spracovania tichého videa priamo v škole, keďže od študentov nie je vyžadovaná znalosť či už nejakej aplikácie alebo videoeditora. Jediným nedostatkom tohto spôsobu bola stabilita mobilu, teda obraz bol roztrasený, čo by sa ale dalo vyriešiť položením mobilu na nejaký pevný stojan. Takže ďalším dôležitým záverom pre nás bol nový spôsob nahratia komentáru, a to **nahrávaním obrazovky počítača mobilom so súbežným komentovaním videa,** ktoré na obrazovke počítača beží.

Kvalita komentárov bola u všetkých rovnaká, čo sa týka voľby úrovne znalostí komentujúceho. Všetci komentovali video na úrovni strednej školy, nie všetci si však všimli malú fyzikálnu nezrovnalosť. Aj v tejto časti sa ukázali rôzne spôsoby poňatia úlohy, a to konkrétne v štýle komentáru. Niektorí komentovali video, akoby vysvetľovali učivo žiakom v škole, iní rozprávali o tom, čo vidia bez toho, že by to bolo pre niekoho určené. Najčastejšie však boli videá s cieľom jav

vysvetliť. Môžeme povedať, že kvalita komentárov bola všeobecne dobrá. Nevyskytol sa komentár, ktorý bol úplne chybný, ani komentár, ktorý by sa už nedal nijako vylepšiť. Záverom z tejto časti je pre nás najmä **jasnejšie definovanie roly komentujúceho** vzhľadom na účel videa – či chceme, aby komentár bol nahratý z pozície učiteľa alebo študenta vysvetľujúceho učivo.

Keďže tiché video ako také má za úlohu rozvíjať komunikačné zručnosti a môže byť aj vhodným spôsobom preskúšania, je dôležitá spätná väzba pre študenta po nahratí komentáru. Preto sme aj my študentom ich videá na hodine prehrali a diskutovali sme o všetkých aspektoch. Takisto sme určovali kvalitatívne najlepší komentár, resp. komentár, ktorý sa nielen nám, ale aj študentom najviac páčil, aby to pre nich malo nejaký prínos, prípadne vylepšovali ostatné. Rovnako sme sa rozprávali o technických problémoch, vhodnej dĺžke videa a iných postrehoch študentov, ktoré počas tejto úlohy zaznamenali. Z diskusie so študentmi pre nás vyplynuli nasledovné závery:

- výber najlepšieho komentáru nebol jednoznačný, závisel od subjektívneho hodnotenia, **spätnú väzbu** však hodnotili všetci pozitívne a brali ju ako **nevyhnutnosť,**
- technické problémy študenti nemali, lebo sú v tejto oblasti zbehlí a komentovanie im nezabralo príliš veľa času,
- dĺžka videa sa zdala neprimeraná, čo je však individuálna záležitosť, pretože niektorým sa zdalo príliš krátke, iným príliš dlhé a niektorí to brali tak ako to je, vidíme však možnosť, aby toto konkrétne video malo namiesto 2 minút trvanie 1,5 minút,
- nahranie komentáru trvalo všetkým do 2 hodín, niektorým dokonca 30 minút, v závislosti od formy spracovania a od toho, či si predtým text, ktorý budú hovoriť, napísali.

Najviac prínosným postrehom bola pre nás nová forma spracovania videa, ktorú sme neočakávali, taktiež zadanie pozície rozprávača – učiteľ, študent, rovnako zadanie toho, či má byť komentár opisný alebo vysvetľujúci. Rovnako prínosnou bola aj celá spätná väzba, ktorá má v tomto procese neodmysliteľné miesto, aby úloha pre študenta bola prínosná.

4 Prieskum zameraný na hodnotenie tichého videa v príprave študentov učiteľstva fyziky

4.1 Úloha prieskumu

Ako hlavnú úlohu prieskumu sme si stanovili:

Ohodnotiť a porovnať komentáre k tichým videám od študentov učiteľstva fyziky a diskutovať s nimi o prínosoch a nedostatkoch tichého videa ako typu úlohy zadávanej takýmto študentom.

Nazdávame sa, že tiché video môže študentom slúžiť na rozvoj učiteľských kompetencií, ktoré sme spomínali v predošlých kapitolách, a zároveň ako prostriedok sebareflexie a sebahodnotenia. Očakávame, že z prieskumu vyplynú nasledovné zistenia:

1. Študenti učiteľstva fyziky pri objasňovaní fyzikálnych javov správne používajú odbornú terminológiu a v ich komentároch sa nevyskytujú fyzikálne nezrovnalosti.
2. Študenti si dokážu vhodne zadeliť čas pri komentovaní videa.
3. Študenti si po vypracovaní úlohy zadanej tichým videom a po diskusii vedia zaujať kritický postoj k svojmu komentáru.

4.2 Metódy prieskumu a charakteristika súboru

Prieskum sme uskutočnili v marci 2019 v rámci predmetu Metódy riešenia fyzikálnych úloh na FMFI UK. Prieskumu sa zúčastnilo 5 študentov, ktorí dostali za úlohu nahrať komentár k tichému videu *Pohár*. Tieto komentáre sme ohodnotili pomocou vytvoreného hodnotiaceho hárku. Vypracovali sme k nim javovú analýzu a v rámci diskusie sme získali spätnú väzbu od študentov, ktorí ich komentovali.

4.3 Spracovanie a interpretácia výsledkov

Komentáre k videu Pohár nahrávalo 5 študentov, ktorých sme si pomenovali písmenami A – E. Každé video sme si prehrali viackrát a na základe stanovených kritérií v hodnotiacom hárku udelili počet bodov. Výsledky študentov sme spracovali do tabuľky 1 (Z – zrozumiteľnosť, DK – nepreskakuje dôležité kroky, O – oživenie, originalita, PS – nepoužíva parazitické slová, TS – technická stránka).

Študent A	1	2	3	4	0	2	2	1	2	2	19
Študent B	0	2	1	0	2	2	1	1	2	2	13
Študent C	0	1	1	0	2	2	2	1	2	2	13
Študent D	0	1	1	0	2	2	2	2	2	2	14
Študent E	0	2	0	0	0	2	2	1	2	2	11
Maximálne	1	2	3	4	5	2	2	2	2	2	25
Priemer	0,33	1,67	1,50	1,33	1,83	2,00	1,83	1,33	2,00	2,00	15,83

kritérií

Z výsledkov prieskumu vyplýva, že s formálnou časťou komentáru študenti nemajú takmer žiadne problémy, ich bodové hodnotenia sa v súčte za formu pohybovali od 8 do 10 bodov

z desiatich, pričom 8 bodov dosiahol jeden študent, 10 bodov tiež jeden študent a zvyšní traja dosiahli 9 bodov.

Čo sa týka obsahu komentára, vyskytli sa zjavné problémy s vysvetlením daného javu. Za žiaden z komentárov sme neudelili plný počet bodov. Najvyšší počet bodov dosiahol Študent A, a to 10 bodov z 15. Tento študent správne používal terminológiu, správne identifikoval, o aký jav ide, nedotiahol to však dokonca, neprepojil obe situácie, riešil ich ako samostatné prípady. Tento komentár bol však po obsahovej stránke výrazne najlepší. Zvyšní štyria študenti dosiahli za obsah hodnotenie od 2 do 5 bodov. Ich komentáre boli obsahovo veľmi podobné, študenti dokázali správne používať terminológiu, avšak nedokázali identifikovať, o aký jav ide. To spôsobilo, že ani ich vysvetlenia neboli správne, aj keď niektoré ich tvrdenia boli pravdivé.

4.3.1 Rozbor komentárov

Komentáre študentov sme ohodnotili počtom bodov podľa hodnotiacich hárkov, a zároveň sme vypracovali rozbor jednotlivých komentárov.

Študent A:

Jeho komentár získal podľa našich kritérií najviac bodov. Študent vo svojom prejave využíva mnoho citosloviec, rečnícke otázky a snaží sa o interakciu s poslucháčom. Čo sa týka formálnej stránky, komentár sa veľmi dobre počúva. Obsahovo dokážeme komentár rozdeliť na dve časti – prvá, kedy na obraze prebieha pokus s pohárom plným vody a na druhú časť, kedy je vykonávaný pokus s poloprázdnym pohárom. V prvej časti študent správne používa terminológiu, avšak nevšimne si dôležitú časť a to vytečenie malého množstva vody. Jeho vysvetlenie na základe rovnosti tlakov teda nie je postačujúce, pretože nespomína vzniknutý podtlak spôsobený únikom vody. V druhej časti však študent hneď na začiatku upozorňuje na tento fakt, a teda sa dopracuje k správnemu vysvetleniu javu. Dokonca uvedie aj analogickú situáciu s papierikom, ktorý drží na ústach, keď ho pritiahneme. Čo si však študent neuvedomil, že aj situácia z prvej časti videa funguje na rovnakom princípe, ako táto. Preto nedosiahol plný počet bodov.

Študent B:

Študent na začiatku komentára opisuje, čo sa deje na obraze. Neskôr spomína, čo spôsobuje to, že papier nespadne, no nijakým spôsobom sa to nesnaží odôvodniť. Študent síce správne používa terminológiu, no nedostatočne vysvetľuje dané javy. Oceňujeme však, že študent spomína papierik prehnutý dovnútra, čo súvisí s podtlakom, aj keď ten explicitne nepomenúva. V tomto komentári sa nachádza viacero tichých momentov. Zo 144 sekúnd študent rozpráva necelých 70 sekúnd, čo nie je ani polovica. Je to spôsobené tým, že si študent nevšimol, že malé množstvo vody z pohára vytieklo, a teda jav nevysvetlil správne. V druhej časti s poloprázdnym pohárom študent len spomenie, že ide o rovnakú situáciu ako v prvom prípade, viac to už nekomentuje.

Študent C:

Začiatok komentára venuje študent motivačnej časti, tým, že prezradí, čo sa dozvieme. Formálne to považujeme sa dobrý začiatok, avšak obsahovo študent nesprávne identifikoval, o čom daný pokus je. Ďalej opisuje, čo sa deje na obraze, vyzýva na všímanie si detailov, napriek tomu nespomína, že malé množstvo vody vytieklo. Spomína však papierik prehnutý dovnútra, čo by mohlo viesť k pomenovaniu podtlaku, ale študent ho nakoniec nespomenie. Študent čaká na druhú situáciu a potom vyzýva publikum k diskusii, prečo papier na pohári drží. Nakoniec jav vysvetlí. Vysvetlenie však nie je správne.

Študent D:

Tento komentár sa od ostatných odlišuje tým, že študent vložil ako podklad do videa hudbu. Komentár je však dostatočne hlasný, teda hudba poslucháča nevyrušuje. Pôsobí to pozitívne. Na začiatku študent opisuje jav a dopĺňa ho rečníckymi otázkami, ktoré sú po formálnej stránke veľmi povzbudzujúce. Vysvetlenie nie je správne, hoci študent tlak ako taký vysvetľuje až na molekulárnej úrovni. Príčinu udržania papiera študent nevysvetlil. Zároveň študent nepoužíva správne pojmy sila a tlak. Hovorí o ich sčítavaní. Po formálnej stránke však považujeme toto video za najlepšie.

Študent E:

Komentár tohto študenta dosiahol najmenej bodov. Hoci po formálnej stránke sa komentár vyrovnal ostatným, po obsahovej stránke bol najslabší. Študent opisuje, čo sa deje na obraze, snaží sa tento dej vysvetliť. Terminológiu používa správne, avšak príčinu neobjasňuje. Neidentifikuje podtlak. Dokonca jeho vysvetlenie druhého prípadu je rozdielne od prvého, čiže nepozoruje súvislosť medzi javmi.

Komentáre ako také s výnimkou Študenta A boli na približne rovnakej úrovni. Veľmi dobré boli po formálnej stránke, po obsahovej ale študenti nedokázali identifikovať pravú príčinu udržania papierika na pohári po jeho prevrátení. Každý zo študentov zvolil iný prístup ku komentáru, čiže na prvý pohľad sa komentáre od seba líšili, ale podľa našich kritérií sa v konečnom dôsledku takmer vyrovnali. Komentár Študenta A sa od ostatných líšil hlavne tým, že študent, aj keď v prvom prípade príčinu nevysvetlil, v druhom k nej dospel a podal aj

správne vysvetlenie. Preto bol jeho komentár v konečnom výsledku najlepší.

4.3.2 Diskusia so študentmi, ktorí sa zúčastnili prieskumu

Komentáre k videám sme si prehrali na hodine bezprostredne po odovzdaní aj spolu so študentmi, ktorí ich komentovali. Prvou témou, o ktorej sme diskutovali, bola technická stránka. Všetci študenti uvádzali, že nemali problém s technickou stránkou. Každý si našiel nejaký spôsob, ktorý použil pri nahratí komentáru. Najčastejšie študenti pracovali s nejakým videoeditorom, kedy osobitne nahrali komentár a potom ho k videu vložili. Jeden študent využil priamo program určený na komentovanie videa, kedy video beží a nahrávaný komentár sa priamo ukladá. Problém takéhoto programu bol, že cez tretinu obrazu necháva vodoznak, čo však pre nás nie je veľmi dôležité, pretože hodnotíme zvuk.

Ďalej sme diskutovali proces, ktorý absolvovali, kým dospeli k záverečnému komentáru. Všetci študenti si prehrali viackrát video a napísali, čo budú hovoriť. Niektorí však mali problém naraz čítať komentár aj sledovať video. Nakoniec si však komentár zapamätali. Taktiež študenti spomínali problémy s načasovaním komentáru priamo k videu tak, aby to, čo hovorili súviselo s tým, čo sa práve deje na obraze. Tento proces študentom trval v rozmedzí 1 až 1,5 hodiny.

Zaujímalo nás, či si študenti prehrali video a počúvali sa. Jeden študent uviedol, že pri počúvaní komentáru si uvedomil, že rozpráva veľmi pomaly, že jeho komentáru chýba dynamika a že má pocit, že by sa pri tom ostatní nudili. Ďalší študent si uvedomil, že používa nesprávnu gramatiku, našiel si chyby, uvedomil si zlú intonáciu aj zahabkanie.

Po prezretí všetkých videí, sme diskutovali aj o videách ostatných študentov. V jednom videu študent použil hudobný podklad, ktorý všetci študenti ocenili. Študenti si uvedomili rozdiely medzi obsahom jednotlivých komentárov, dokázali spoločne nájsť chyby v komentároch, opravili ich a zhodli sa na najlepšom komentári. Ocenili tiež kladenie otázok počas vysvetľovania, aj na konci.

Najdôležitejším záverom z celej diskusie bolo, že študenti ocenili spätnú väzbu. Už samotné vypočutie svojho aj ostatných komentárov im pomohlo a povedali, že by vedeli, ako by komentár zmenili a čo by spravili inak. Aj keď by študenti ocenili komentovanie reálne prebiehajúceho pokusu pred ľuďmi viac ako rozprávanie na mikrofón počítača, boli si vedomí výhody, ktorú voči tomuto spôsobu tiché video má, a to že každý komentuje tú istú situáciu bez toho, aby bol ovplyvnení tým, čo už predtým počul.

4.4 Zhrnutie výsledkov prieskumu

Na základe výsledkov prieskumu môžeme konštatovať, že prvé očakávanie, že študenti budú používať správne odbornú terminológiu, sa potvrdilo. Avšak nepotvrdila sa jeho druhá časť, kedy sme očakávali, že v komentároch sa nevyskytnú fyzikálne nezrovnalosti. Študenti za obsahovú časť dostali v priemere 6,67 boda z 15-tich (44,5 %), pričom za terminológiu sme udelili priemerne 1,67 boda z 2 bodov (83,5 %).

Vo formálnej časti študenti dosahovali v priemere 9,16 boda z 10-tich, čo teda potvrdzuje naše druhé očakávanie, že si študenti dokážu vhodne zadeliť čas pri komentovaní videa. Taktiež to vypovedá o tom, že sa študenti snažili vložiť niečo originálne do svojho komentára, nepoužívali parazitické slová, pri vysvetľovaní nepreskakovali dôležité kroky, zvládli technickú stránku nahratia komentára k videu a ich komentár bol celkovo zrozumiteľný.

Z diskusie so študentmi vyplynulo potvrdenie tretieho očakávania, kedy sa študenti vyjadrili k nedostatkom svojho komentára, ale aj k jeho pozitívnym aspektom, a teda zaujali k nemu kritický postoj.

5 Záver

Našim cieľom bolo overiť možnosti využitia tichého videa v príprave študentov učiteľstva fyziky. Preto sme vytvorili súbor takýchto tichých videí. Taktiež sme realizovali prieskum zameraný na hodnotenie tichého videa, v ktorom sa potvrdili naše očakávania. Za najdôležitejší aspekt celého prieskumu považujeme potvrdenie nášho očakávania, že študenti po vypočutí svojho komentára nahratého k tichému videu, k nemu dokážu zaujať kritický postoj, čo im môže pomôcť v príprave na svoje povolanie.

Poďakovanie

Rada by som na prvom mieste poďakovala doc. PaedDr. Kláre Velmovskej, PhD. za odbornú pomoc, korekcie, poskytnuté rady a za vedenie pri vypracovávaní tohto príspevku. Veľká vďaka tiež patrí Mgr. Jakubovi Čevajkovi za jeho ochotu a za jeho rady.

Literatúra

[Demkanin, 2018] Demkanin, P. (2018). Didaktika fyziky pre študentov magisterského štúdia a učiteľov v praxi. Bratislava: Univerzita Komenského, 2018. 156 s. ISBN 978-80-223-4374-9.

[Hreinsdóttir, Kristinsdóttir, Lavicza, 2018] Hreinsdóttir, F., Kristinsdóttir, B., Lavicza, Z. (2018). Realizing students' ability to use technology with silent video tasks. In Proceedings of the 5th ERME Topic Conference, pp. 163-170, MEDA, 2018. ISBN 978-87-7078-798-7

[Hreinsdóttir, Kristinsdóttir, 2016] Hreinsdóttir, F., Kristinsdóttir, B.(2016). Using silent videos in the teaching of mathematics. In Ceretkova, S. (Ed.), Staircase to Even More Interesting Mathematics Teaching. Nitra, Slovakia: Constantine the Philosophers University in Nitra, 2016. s. 157-164

[Kožuchová a kol., 2011] Kožuchová, Mária a kol. (2011). Elektronická učebnica didaktiky technickej výchovy. [online]. Bratislava: Univerzita Komenského, 2011. [cit. dňa 15. 3. 2018]. Dostupné na: http://utv.ki.ku.sk. ISBN 978-80-223-3031-2

[Krajčová, Daňková, 2001] Krajčová, N., Daňková, A. (2001). Všeobecná didaktika. Prešov : ManaCon, 2001. 118 s. ISBN 80-89040-09-8

[Krušpán, Volníková, 2007] Krušpán, I, Volníková, M. (2007). Didatika odborného výcviku. Dubnica nad Váhom: DTI, 2007. ISBN 978-80-969615-7-3

[Nordic Geogebra Network, 2018] Nordic Geogebra Network (2018). Nordic and Baltic GeoGebra Conference 2018. [online]. [cit. dňa 15. 3. 2018]. Dostupné na: https://ggbconference2018.wordpress.com

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 186–190
ISBN 978-8081470936, © 2019 Klára Horváthová

Téma digitálnej bezpečnosti v modernom kurikule informatiky

Klára Horváthová[1]*

Školiteľ: Ivan Kalaš[2]†

[1] Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava
[2] Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: V tomto článku prezentujeme dôležitosť vyučovania digitálnej bezpečnosti počas povinnej školskej dochádzky. Ukazujeme, ako je táto téma implementovaná v zahraničných vzdelávacích systémoch a na základe ich inšpirácie sme vytvorili mapu oblastí digitálnej bezpečnosti. Taktiež pripájame vyjadrenia slovenských pedagógov, zo základných a stredných škôl, k tejto téme.

Kľúčové slová: digitálna bezpečnosť, vzdelávanie, kurikulum, informatika

Poznámka:

Táto práca vznikla ako súčasť projektu Prevencia kriminality v digitálnom veku, ktorého riešiteľom je Indícia, n.o. a bol realizovaný s podporou MV SR, pozri [Kalaš et al., 2019].

1 Téma digitálnej bezpečnosti

Rýchly rozvoj digitálnych technológií priniesol okrem množstva výhod aj riziká, ktoré nie sú na prvý pohľad dostatočne jasné, avšak online prostredie prináša podobné nástrahy ako rušné ulice veľkomesta, bez nutnosti vyjsť z domu. Denne sa stretávame s digitálnymi technológiami, no neuvedujeme si riziká, ktoré prinášajú. Aby sme vedeli technológie používať zodpovedne a bezpečne, potrebujeme tieto riziká poznať. Britská vláda si v roku 2008 objednala od psychologičky T. Byronovej správu, ktorá popisuje bezpečné správanie sa detí v digitálnom veku. Správa rozlišuje 3 okruhy rizík [Byron, 2008]:

- obsah (content) - internet zvýšil prístupnosť mladých ľudí k nevhodnému obsahu, napr. sexuálnemu, nenávistnému, surovému alebo neželanému komerčnému,
- kontakt (contact) – za potenciálne nebezpečný kontakt považuje správa situáciu, kedy je dieťa neželane kontaktované cez internet, napr. s cieľom e-šikanovania (kyberšikanovania) alebo iného obťažovania,
- správanie (conduct) – nevhodné a nebezpečné správanie v online prostredí predstavuje ilegálne sťahovanie, zverejňovanie osobných informácií a s tým súvisiace zneužitie, napr. ukradnutie online identity.

Rodičia na to často reagujú tak, že radšej svojim deťom nedajú k digitálnym technológiám prístup. V [Kalaš et al., 2013] píše: *Ak sa však (aj tak márne) snažia odoprieť deťom príležitosti, aby sa učili rozpoznávať riziká a žiť s nimi, iba zvyšujú ich zraniteľnosť. Riskovanie je prirodzenou súčasťou vývoja detí, je jednou z hnacích síl ich učenia sa a objavovania. Ak chceme, aby sa naše deti učili žiť s rizikami, ktoré na ne striehnu napr. na internete, musíme vedieť, o aké riziká vlastne ide a, čo z toho vyplýva.*

Ako, teda učiť deti o rizikách na internete, keď ani rodičia nestíhajú sledovať vývoj digitálnych technológií? V [Kalaš et al., 2019] popisujeme komplexné, kvalitné a efektívne vzdelávanie, ktoré má za cieľ sledovať vývoj technológií a oboznamovať žiakov so všetkými rizikami, ktoré prinášajú; musí byť implementované vo všetkých stupňoch vzdelávania, nielen v informatike a musí byť akceptované celým školským prostredím, nielen ako prierezová téma, ale každý učiteľ musí mať o tejto problematike prehľad.

Na Slovensku sú rôzne iniciatívy, ktoré sa tejto problematike venujú. Známe rozprávky `ovce.sk`, `kybersikanovanie.sk`, `nezavislost.sk`, `stopline.sk`, fungujúce v rámci platformy `zodpovedne.sk` Taktiež sa zapájajú aj ďalší do boja proti falošným správam a hoaxom: checkbot.sk - odhaľujúci falošné správy cez Messenger a Denník N s rôznymi príručkami pre školy (Klamstvá a konšpirácie, ako fungujú médiá a pod.). Komplexnému školstvu chýba národná podpora, reakcia zo strany štátu. V krajinách ako Británia, Austrália či Nový Zéland majú všetky portály pod hlavičkou ministerstva školstva. Okrem oficiálnych metodických dokumentov na vyučovacie hodiny ponúkajú aj počítačové hry, ktoré pomáhajú žiakom orientovať

*`horvathova115@uniba.sk`
†`ivan.kalas@fmph.uniba.sk`

sa bezpečne v digitálnom svete.

Preto sa v najbližších odsekoch pokúsime preskúmať, ako na fenomén bezpečnosti reaguje náš inovovaný Štátny vzdelávací program, a to (a) v predmete informatika, (b) v ďalších predmetoch, a napokon (c) z pohľadu rôznych prierezových tém, a ako reagujú rôzne zahraničné vzdelávacie systémy. Predstavíme pohľad niekoľkých učiteľov informatiky na to, aké oblasti bezpečnosti v kontexte vzdelávania považujú za dôležité, a ako ich oni sami implementujú do vzdelávacieho procesu. Zo všetkých týchto vstupov v závere navrhujeme konsolidovanú mapu rôznych pohľadov na bezpečnosť v digitálnom veku a jej aspektov a tém, a to v prostredí formálneho vzdelávania a taktiež navrhujeme prvú (východiskovú) iteráciu toho, akú úlohu by v implementácii týchto pohľadov na bezpečnosť, a jej rôznych tém, mala hrať školská informatika a ktoré z týchto tém by sa mali premietnuť do vzdelávacích obsahov iných predmetov, resp. by sa mali produktívne implementovať ako prierezové témy.

2 Analýza vzdelávacích systémov

Najprv ukážeme aká je situácia u nás na predmete Informatika, v iných predmetoch, a ako sa venujú bezpečnosti v zahraničných vzdelávacích systémov. Na záver ponúkame zopár vyjadrení pedagógov zo základných a stredných škôl.

2.1 Na Slovensku

Inovovaný Štátny vzdelávací program (iŠVP) pre informatiku sa najviac venuje bezpečnosti v tematickom okruhu Informačná spoločnosť [*súčasné trendy digitálnych technológií a ich vplyv na spoločnosť(limity a riziká) a odhadovanie ich ďalšieho vývoja, ich vplyv na učenie sa*] [Štátny pedagogický ústav, 2014], no používanie digitálnych technológií je aj v ostatných tematických okruhoch, okrem Algoritmického myslenia. Chýbajú tam, ale explicitne popísané riziká súvisiace s digitálnou bezpečnosťou. **Neinformatické predmety a prierezové témy** súvisiace s bezpečnosťou žiakov v digitálnom veku sme priamo našli len v predmete etická výchova (4. a 9. ročník ZŠ) [*rozlíšiť na príkladoch pozitívne i negatívne vplyvy televízie a iných komunikačných prostriedkov; diskutovať o výhodách a nevýhodách používania internetu*]. Podobne, ako pri informatike, tiež sa v ostatných predmetoch spomína používanie digitálnych technológií, ale nezameriavajú sa na ich bezpečnosť.

2.2 Zahraničné vzdelávacie systémy

Analyzovali sme národné kurikulum Anglicka, Austrálie, Nového Zélandu, spoločnú iniciatívu niekoľkých amerických inštitúcií, významných pri formovaní vzdelávacích politík jednotlivých štátov v USA a napokon prebiehajúcu prípravu reformy Rámcového vzdelávacieho programu v Českej republike.

Podľa anglického kurikula nového predmetu Computing [Department for Education, 2013a] je cieľom informatického vzdelávania, aby si žiaci rozvinuli tvorivosť a informatické myslenie (computational thinking) tak, aby mohli lepšie spoznávať náš svet, a aby ho mohli meniť k lepšiemu. Odporúča tiež prepájať toto myslenie s matematikou a matematickým myslením, vedou, dizajnom a technológiami tak, aby žiaci dokázali vytvárať zmysluplné programy, informatické systémy, modely a digitálny obsah. Ďalším cieľom predmetu je prispieť k tomu, aby boli žiaci digitálne gramotní, a aby sa dokázali vyjadrovať a prezentovať aj pomocou digitálnych technológií. Žiaci, ktorí absolvujú tento predmet, majú byť zodpovední, kompetentní, sebaistí a tvoriví používatelia technológií. Na tvorbe tohto vzdelávacieho programu spolupracovali najmä BCS (British Computer Society) a vládou financovaná iniciatíva CAS (Computing at School).

Aj v Austrálii [Australian curriculum, 2015] uvažujú o transformácii doterajšej stratégie na nový predmet Computing. Zatiaľ však školy realizujú povinný predmet Technológie, ktorý sa delí na Digitálne technológie a na Dizajn a technológie. Časť Digitálne technológie má za cieľ rozvíjať vedomosti a zručnosti, ktoré zabezpečia, aby študenti individuálne a spoločne vedeli navrhnúť, vytvoriť, spravovať a ohodnotiť inovatívne a udržateľné digitálne riešenia, ktoré napĺňajú potreby budúcnosti, aby vedeli sebaisto používať digitálne systémy, aby dokázali účinne a efektívne automatizovať transformáciu dát na informácie a tvorivo komunikovali svoje názory a myšlienky prostredníctvom rôznych informatických nástrojov.

Na Novom Zélande [Ministry of Education, 2017] pripravujú nové kurikulum, ktoré má byť účinné od roku 2020 a má posilniť pozíciu digitálnych technológií. Cieľom tejto zmeny je zaručiť, aby mali všetci žiaci príležitosť stať sa schopnými a digitálne gra-

motnými ľuďmi. Táto zmena si sľubuje umožniť žiakom rozvinúť svoje zručnosti, aby boli tvorivými tvorcami digitálnych riešení a nie iba používateľmi a konzumentmi digitálnych technológií.

Konzorcium amerických inštitúcií (niektoré z nich majú ešte širšie, až globálne pôsobenie, napr. ACM) prišlo so spoločnou predstavou moderného informatického vzdelávania pre každého žiaka pod názvom K-12 Computer Science Framework [K12CS, 2016]. Partnermi sú ACM (Association for Computing Machinery), Code.org, CSTA (Computer Science Teachers Association), Cyber Innovation Centre a National Math and Science Initiative. Výstupom tejto spolupráce je návrh vzdelávacieho obsahu pre každého v predmete Computer Science. Autori chcú, aby sa žiaci vďaka tomuto predmetu transformovali z počítačových používateľov na digitálne gramotných tvorcov, ktorí sú zruční v používaní informatických konceptov a postupov. Návrh obsahuje moduly Počítačové systémy; Siete a internet; Bezpečnosť v digitálnom svete; Dáta a analýza; Algoritmy a programovanie; a Vplyvy digitálnych technológií na spoločnosť.

Ďalší zdroj, ktorý sme použili, je výsledkom zaujímavej snahy českého Národního ústavu pre vzdělávání o reformu informatického vzdelávania v Čechách. Jej cieľom je zaviesť (prvýkrát) na všetky stupne školy povinný predmet informatika, avšak explicitne pomenovať, čo majú byť jeho výlučne informatické ciele. Všetky ďalšie zložky tradičnej „informatiky“, teda rozvoj digitálnej gramotnosti a zručností v používaní softvérových nástrojov majú po novom zabezpečovať (všetky) iné predmety.

2.3 Názory Slovenských pedagógov

V rozhovoroch s pedagógmi zo základných a stredných škôl na Slovensku sme zisťovali, aké témy považujú za dôležité pri výučbe bezpečnosti v digitálnom veku a akým problémom čelia. Jedným z takýchto problémov, ktoré vnímajú viacerí učitelia, je nedostatočná príprava pedagógov v tejto oblasti a malý prehľad a nízka úroveň digitálnej gramotnosti rodičov, ktorí často zaostávajú za svojimi deťmi v zručnostiach používať digitálne technológie. Z. Lišková, riaditeľka ZŠ Ľudovíta Štúra v Modre hovorí: „Všetci učitelia by mali byť v tejto oblasti vzdelaní a byť si vedomí rizík, mali by reagovať na potreby žiakov a mali by im ísť príkladom, niekedy väčším, ako ich vlastní rodičia“. Žiaci sú mimoriadne vnímaví: argumentujú, že, keď si učiteľka zapne na hodine Facebook či internet banking a nakoniec sa z neho neodhlási, asi to nie je až také nebezpečné, ako ich učitelia na informatike učia. Pridáva, že je dôležité žiakom ukázať hraničné prípady aj keď im na začiatku nebudú veriť, lebo ani rodičia si často neuvedomujú, akým rizikám sa vystavujú.

Veľa oblastí bezpečnosti nezapadá iba do informatiky, preto na školách robia projekty v rámci multimediálnej výchovy, kde sa pracuje s témou autorských práv či kyberšikanovania, personalizovanej reklamy a iných dôležitých bezpečnostných tém. Mnohí učitelia si uvedomujú, že tieto témy by sa mali preberať na etickej výchove, náboženstve a slovenskom jazyku. Témy, ktoré sa vyučujú na hodinách informatiky, realizujú so žiakmi 1. stupňa prevažne formou hier, ... „aby pochopili, že nemajú nikde bezdôvodne zadávať svoje heslá, aby vedeli, čo môžu dať na internet a, čo nie“, pripomína L. Budinská zo ZŠ Esprit v Bratislave. Pre žiakov 2. stupeň už idú viacej do hĺbky práve z informatického hľadiska. Pani riaditeľka Lišková napr. navrhuje venovať sa bezpečnosti najneskôr od 3. ročníka ZŠ a opakovane so žiakmi prejsť otázky bezpečnosti pri práci s počítačmi, od správneho sedenia až po nastavenie monitora a zdravý čas strávený za počítačom. Učiteľ informatiky I. Bezák z Gymnázia Ladislava Novomeského v Bratislave v rámci programovania pracuje s hašovaním a na seminároch z informatiky sa venuje témam kódovania pomocou súkromného a verejného kľúča či bezpečnostnej vrstve. Vďačnou témou sú šifry, napr. formou filmu alebo ako populárna prednáška o Enigme. Dôraz kladie pri práci so žiakmi aj na kritické myslenie, uvedomenie si, že na internet môže dať hocikto hocičo a potrebu zvažovať zdroje informácií.

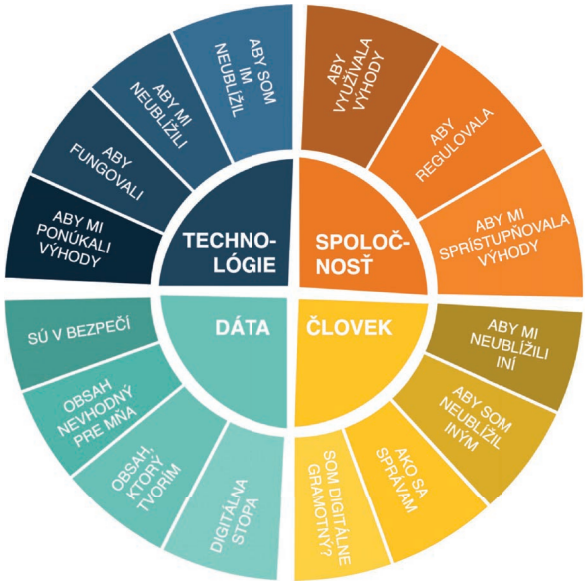
Učiteľka informatiky V. Dropčová z Evanjelického lýcea v Bratislave považuje za dôležité, aby „aspoň maturanti vedeli, že elektronický podpis nie je to, čo vzniká, keď sa podpisujeme na elektronickú podložku v banke, aby pochopili prácu antivírusových programov, aby sa vyvarovali phishingu či pharmingu a mali aspoň akú-takú šancu odhaliť takéto pokusy. A tiež, aby vedeli, čo znamená, keď sa im na stránke, ktorú si chcú prezerať, zobrazí správa o tom, že stránka nemá platný bezpečnostný certifikát. A samozrejme, aby si volili rozumné heslá – niečo, čo si ľahko zapamätajú, no pritom to bude ťažko odhaliteľné.“

Učiteľka informatiky J. Pekárová z Gymnázia Veľká okružná v Žiline upozorňuje na problém ší-

renia extrémistických názorov, a preto sa venuje analýze falošných správ a hoaxov.

3 Mapa oblastí digitálnej bezpečnosti

Pri analýze či už iŠVP alebo zahraničných vzdelávacích systémov, každá krajina k téme bezpečnosti pristupuje inakšie, či už majú témy pokryté v predmete Informatika, alebo v iných predmetoch, pokúsili sme sa spojením týchto tém vytvoriť jednu konsolidovanú reprezentáciu. Rozhodli sme sa všetky témy zaradiť do štyroch pohľadov: spoločnosť, človek, dáta a technológie.



Obr. 1: Mapa rôznych pohľadov na otázky bezpečnosti v digitálnom veku

Uvedomujeme si, že všetky tieto oblasti so sebou úzko súvisia a aj témy, ktoré pokrývajú sa často môžu zdať rovnako relevantné pre inú oblasť. Preto sa na to pozerajte viac ako jeden systém a nie ako oddelené disjunktné množiny tém.

3.1 Technológie:

- Aby ponúkali výhody – využívanie služieb, online nákupy a rôzne softvérové nástroje
- Aby fungovali – počítačové a robotické systémy(napr. v zdravotníctve), sieť, sieťová komunikácia, internet, softvér a hardvér
- Aby mi neublížili – neúmyselné ohrozenie, fyzické ohrozenie, ohrozenie systémami s umelou inteligenciou
- Aby som im neublížil – pravidlá používania a zaobchádzania

3.2 Dáta

- Sú v bezpečí- rozumne uložené dáta, prepojené databázy, vírus, špehovanie
- Obsah nevhodný pre mňa – reklamy, nevhodný a nenávistný, vývinovo neprimeraný, nevítaný obsah, vyhľadávanie, regulácia
- Obsah, ktorý tvorím – vytváranie a zverejňovanie obsahu
- Digitálna stopa – ochrana osobných dát, reputácia, súkromie

3.3 Spoločnosť

- Aby využívala výhody – komunikácia, úrad, občan
- Aby regulovala – právo, regulácie, legálnosť, ochrana
- Aby mi sprístupňovala výhody – digitálne občianstvo

3.4 Človek

- Aby mi neublížili iní – falošné informácie a správy, nevítané presvedčenia, sebapoškodzovanie, nebezpečný kontakt, neznámy, grooming, šikana, kontakt
- Aby som neublížil iným – ochrana a rešpektovanie druhých, šikana, finančné podvody, terorizmus
- Ako sa správam – chránim si zdravie? Chovám sa bezpečne a zodpovedne? Môj sociálny a kognitívny vývin, netiketa, práva a povinnosti, ilegálne sťahovanie, gambling, heslá, moja identita, digitálna stopa
- Som digitálne gramotný? – rozumiem bezpečnosti a rizikám? Rozumiem hackovaniu?

Rozumiem možnostiam, obchodu, komunikácii? Viem zhodnotiť zdroje? Mám kritické myslenie? Mám informatické myslenie? Vzdelávam sa, viem tvoriť

4 Záver

Pohľady na digitálnu bezpečnosť, ktoré sme načrtli v kapitole 3 ukazujú, že viaceré témy digitálnej bezpečnosti nie sú primárne informatické. V Anglicku v rokoch 2013 a 2014 uskutočnili oddelenie digitálnej gramotnosti od základov informatiky a rozvoja algoritmického myslenia, kedy vznikol aj nový predmet Computing. V Českej republike: v novom Rámcovom vzdelávacom programe navrhuje vyučovanie digitálnych technológií presunúť do predmetov, do ktorých to naozaj patrí, napr. kreslenie do výtvarnej výchovy, tabuľkový editor do matematiky a podobne. Vyžaduje to, ale od učiteľov všetkých predmetov, aby mali dostatočnú digitálnu gramotnosť.

Podobne je to aj s digitálnou bezpečnosťou, domnievame sa, že pre každú z identifikovaných oblastí je možné určiť či má charakter *prevažne informatický* alebo *prevažne neinformatický*. Témy bezpečnosti najviac prispievajúcimi do informatiky sú hlavne pohľady na **Technológie** a **Dáta**. Vďaka nim žiaci porozumejú, ako fungujú počítačové systémy, informačné siete, systémy s umelou inteligenciou a pod., naučia sa ako funguje elektronický podpis, kódovanie, dekódovanie a naučia sa pracovať s dátami.

Pohľad na bezpečnosť v oblasti **Človek** sa nám javí ako prevažne neinformatický, ktorý je zameraný hlavne na digitálnu gramotnosť, komunikáciu, digitálnu stopu a moju reputáciu či online identitu.

Pohľad na bezpečnosť s názvom **Spoločnosť** považujeme prevažne za spoločenskovedný. Viacero tém je obsiahnutých v iných predmetoch už teraz, no nie dostatočne explicitne zameraných na digitálnu bezpečnosť (napr. kyberšikanovanie, závislosť a iné).

V úvode sme spomenuli, že pri rozvoji digitálnej bezpečnosti hrá dôležitú úlohu komplexné a kvalitné vzdelávanie, a to v rámci povinných predmetov pre každého, počas všetkých stupňov formálneho vzdelávania. Preto navrhujeme:

- revidovať súčasný Štátny vzdelávací program a identifikovať v ňom témy a okruhy, ktoré sú pri dnešnej európskej a slovenskej legislatíve rizikové alebo neakceptovateľné (napr. regulácia GDPR),
- upraviť vzdelávacie programy predmetov tak, aby sa aktuálne, efektívne a komplexne venovali téme bezpečnosti žiakov v digitálnom veku, a to už od úrovne predprimárneho vzdelávania,
- prostredníctvom procesu akreditácie študijných programov týmto zmenám (viď predchádzajúci bod) prispôsobiť aj prípravu budúcich učiteľov.
- pripraviť, odborne garantovať a kontinuálne poskytovať programy ďalšieho vzdelávania učiteľov z praxe na tému bezpečnosti a jej implementácie na všetky stupne formálneho vzdelávania. S tým úzko súvisí nasledujúci bod:
- zaistiť, aby vznikli série moderných metodických materiálov, ktoré pomôžu učiteľom implementovať tieto nové témy do vyučovania.

Ak sa štát nepostará o kontinuálnu podporu učiteľov zo škôl v tejto problematike, nepodarí sa zvýšiť pripravenosť žiakov na život a prácu v digitálnom veku.

Literatúra

[Australian curriculum, 2015] Australian curriculum, R. (2015). Digital technologies: Sequence of content f-10.

[Byron, 2008] Byron, T. (2008). Safer children in a digital world: The report of the byron review: Be safe, be aware, have fun.

[Department for Education, 2013a] Department for Education, G. B. (2013a). Computing programmes of study: 1 and 2 framework documents.

[Department for Education, 2013b] Department for Education, G. B. (2013b). Computing programmes of study: 3 and 4 framework documents.

[K12CS, 2016] K12CS (2016). K–12 computer science framework.

[Kalaš et al., 2013] Kalaš, I. et al. (2013). Premeny školy v digitálnom veku. *ISBN: 9788010024094*.

[Kalaš et al., 2019] Kalaš, I., Horváthová, K., and Hrušecký, R. (2019). Bezpečnosť v digitálnom veku.

[Ministry of Education, 2017] Ministry of Education, N. Z. (2017). Technology in the new zealand curriculum.

[Palfrey and Gasser, 2011] Palfrey, J. G. and Gasser, U. (2011). *Born digital: Understanding the first generation of digital natives*. ReadHowYouWant. com.

[Štátny pedagogický ústav, 2014] Štátny pedagogický ústav (2014). Inovovaný štátny vzdelávací program.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 191–196
ISBN 978-8081470936, © 2019 Lucia Makasová

Aktivity s robotickou stavebnicou LEGO® WeDo 2.0

Lucia Makasová[1]*
Školiteľ: Karolína Mayerová[2]‡

[1] PRIF UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
[2] KDMFI, ODI , FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

Cieľom mojej výskumnej práce je iteratívnym spôsobom navrhnúť, zostaviť a overiť sériu materiálov pre prácu s robotickou stavebnicou LEGO® WeDo 2.0. Materiály budú obsahovať 9 aktivít. Sú určené pre žiakov tretieho až štvrtého ročníka základných škôl. Aktivity som nevytvárala od začiatku ale pri ich tvorbe som vychádzala z metodických materiálov určených pre prácu s robotickou stavebnicou LEGO® WeDo. Na rozdiel od stavebnice LEGO® WeDo je LEGO® WeDo 2.0 napájaná pomocou batérie (nie je potrebný kábel) a je ovládaná pomocou aplikácie v tablete. To poskytuje väčší priestor pre stavbu úplne odlišných modelov aj iný typ práce so žiakmi.

Vo svojej práci by som mala vytvoriť pre každú aktivitu (a) metodické materiály pre učiteľa (vo forme webovej stránky), (b) k vybraným aktivitám pracovné listy pre žiaka a (c) návody k niektorým modelom. Súčasťou metodiky bude technický popis práce s robotickou stavebnicou a aplikáciou určenou na jej programovanie.

Aktivity majú gradujúci charakter a sú zamerané hlavne na rozvoj algoritmického myslenia a základných programátorských zručností. Okrem týchto vymenovaných zručností, si žiaci vďaka skupinovej práci rozvíjajú komunikačné a kooperačné zručnosti. Samotné konštruovanie modelov vedie k zlepšovaniu jemnej motoriky žiakov.

V súčasnosti prebieha prvá fáza testovania aktivít. Počas nej overujeme vhodnosť mnou navrhnutých zmien a identifikujeme problémy, ktoré prináša technické prevedenie stavebnice s novšou verziou softvéru. Overujeme aktuálnosť atraktivity pre žiakov a zrozumiteľnosť metodického návodu pre učiteľa. Na základe získaných výsledkov plánujem niektoré aktivity modifikovať. Prvé výsledky ukazujú, že bude nutné zmeniť niektoré aktivity (Ahoj robot), či upraviť pracovný list určený žiakom (Staviame Mila, vedecké vozidlo).

Kľúčové slová: robotické stavebnice, LEGO® WeDo 2.0, prvý stupeň ZŠ, programovanie

1 Edukačná robotika na školách

Výzvou pre vzdelávanie v 21.storočí je vytvorenie nového prístupu, ktorý rešpektuje život žiakov mimo tried, ako aj ich budúcu schopnosť zamestnať sa. Väčšina krajín si uvedomuje, že ich súčasné vzdelávacie systémy nedokážu žiakov zaangažovať, alebo ich pripraviť na budúcnosť. Preto sa, spoločne so zmenou cieľov a priorít vzdelávania, vyvíjajú aj spôsoby a metódy potrebné pri ich napĺňaní. [Trilling, Fadel, 2012]

Prevládajúcou paradigmou súčasných teórií vzdelávania je dôraz na konštruktivistické vyučovanie. Jeho základom je myšlienka, že si žiak sám konštruuje svoje poznanie na základe vlastných skúseností. [Papert, 2005] Technológie sú pomocným nástrojom [Mikropoulos, Bellou, 2013] na dosiahnutie tohto cieľa.

Práve edukačná robotika vzbudzuje čoraz väčšiu pozornosť v školskom [Michalíková, Jochmanová, 2018] i mimoškolskom prostredí [Horváthová, Klimová, 2018]. Prostredníctvom nej môžu učitelia podporovať medzipredmetové vzťahy či snažiť sa žiakov motivovať k učeniu sa prírodovedne a technicky zameraných predmetov. Okrem toho edukačná robotika podporuje a rozvíja u žiakov myslenie v súvislostiach, tímovú prácu a kolaboráciu, ale aj schopnosť plánovať, testovať svoje postupy a odstraňovať chyby vo svojom riešení (konštruktérske a programátorské zručnosti).

2 LEGO® WeDo 2.0

V oblasti edukačnej robotiky ponúka firma LEGO® širokú paletu robotických stavebníc pre žiakov rôznych vekových skupín [Eduxe]. Pre žiakov mladšieho školského veku (od 7. rokov) je určená robotická stavebnica LEGO® WeDo 2.0.

Základná stavebnica obsahuje 280 dielov, vrátane elektronických dielov ako sú motor, Smart Hub, senzor nákonu a senzor pohybu. Na obsluhu robotických modelov sa využíva softvér WeDo 2.0 LEGO® Education, ktorý je možné zadarmo stiahnuť na stránkach výrobcu. Výhodou tohto softvéru je nielen jeho kompatibilita s danou stavebnicou, ale aj široká podpora v súčasnosti

*makasova3@uniba.sk
‡mayerova@fmph.uniba.sk

používaných operačných systémov pre stolné počítače aj mobilné zariadenia (napr. tablet), za predpokladu, že majú zabudovaný bluetooth. Softvér v sebe integruje ikonické programovacie prostredie, užívateľský manuál, databázu námetov na konštrukčné úlohy spolu s ukážkami programov. [Lego Education] Programovacie prostredie je užívateľsky príjemné, intuitívne a funguje na princípe skladania príkazov, ktoré su vo forme puzzle, do väčšieho celku – programu či častí programu, a to metódou ťahaj a polož.

3 Výskum na základnej škole

Prvú fázu výskumu sme realizovali na súkromnej základnej škole Esprit, v spolupráci s dvoma učiteľkami. Výskum prebiehal počas mesiacov január až apríl, v roku 2019. Žiaci boli rozdelení do dvoch výskumných skupín. Skupinu A tvorili žiaci tretieho ročníka, skupinu B žiaci štvrtého ročníka. Výskumu sa spolu zúčastnilo 14 žiakov. Okrem jedného dievčaťa vo výskumnej skupine B, sa jednalo o slovensky hovoriacich žiakov.

Cieľom nášho výskumu je zostavenie a overenie série materiálov pre prácu s robotickou stavebnicou LEGO® WeDo 2.0. Materiály obsahujú 9 aktivít, so zameraním na programovanie, pričom sú určené pre žiakov tretieho až štvrtého ročníka základných škôl. Aktivity som nevytvárala od začiatku, ale pri ich tvorbe som vychádza z materiálov určených pre prácu s robotickou stavebnicou LEGO® WeDo 1.0. [Mayerová, 2015]

Cieľom prvej fázy testovania je overenie mnou navrhnutých zmien. Navrhnuté zmeny sú uvedené pri jednotlivých aktivitách v článku. Zaujímalo nás, akým spôsobom žiaci pracovali so stavebnicou, aké mali problémy pri práci s aplikáciou, či boli schopní vypracovať pracovný list a nakoľko boli úlohy v vhodne gradované. Ďalej nás zaujímalo, aké prípadné problémy so sebou prináša zmena ovládania robotickej stavebnice LEGO® WeDo 2.0 oproti stavebnici LEGO® WeDo 1.0 (tablet namiesto počítača). Zamerali sme aj na vzájomné spolupracovanie vrámci skupiny.

Samotnej realizácii vyučovacích hodín predchádzalo pripravenie metodických materiálov pre učiteľa a pracovných listov pre žiaka. Metodické materiály sú realizované formou webovej stránky. Pracovné listy dostávali žiaci vždy v tlačenej verzii.

3.1 Výskumné skupiny a zber dát

Výskumnú skupinu A tvorilo 6 žiakov, pričom bolo 5 chlapcov a 1 dievča. Výskumnú skupinu B tvorilo 8 žiakov, pričom aj v tejto skupine bolo iba 1 dievča, zvyšní 7 žiaci boli chlapci.

Žiaci vykonávali aktivity v 2-3 členných týmoch, v závislosti od aktuálneho počtu žiakov na danej vyučovacej hodine. Vo výskumnej skupine A, žiakov rozdeľovala do skupín učiteľka. Dôvodom bola neochota chlapcov spolupracovať vo dvojici s dievčaťom. Žiaci vo výskumnej skupine B sa rozdeľovali sami. V tejto skupine však v prípade nepárneho počtu žiakov na vyučovacej hodine pracovalo dievča samé.

Počas každej aktivity boli prítomní na pozorovaní viacerí členovia zapojení do výskumu. Okrem priameho pozorovania sa všetky odučené hodiny digitálne zaznamenávali prostredníctvom fotoaparátu a videa z niekoľkých kamier.

Čiastočnú analýzu aktivity sme vykonávali po každom odučení danej aktivity v oboch skupinách. Pomocou krátkeho interview sme zisťovali názory zapojených učiteliek na danú aktivitu, i na prácu žiakov z pohľadu učiteľa.

Po otestovaní všetkých aktivít je na záver 1.fázy naplánované interview so samotnými žiakmi.

4 Aktivity a ich priebeh

V dobe písania článku je otestovaných prvých 6 aktivít a zanalyzované prvé 3 z pripravených 9 aktivít:

1. Ahoj, Robot!
1. Staviame Mila, vedecké vozidlo.
2. Ventilátor.
3. Ako sa budeme prepravovať?
4. Ako sme programovali ventilátor?
5. A predsa sa točí?!
6. Správa veternej elektrárne.
7. Rekreačná záhrada
8. Čo všetko už vieme.

4.1 Aktivita Ahoj, Robot!

V pôvodnej sérii úloh pre robotickú stavebnicu LEGO® WeDo 1.0 nájdeme túto aktivitu pod rovnakým názvom. Jej samotná štruktúra zostala nezmenená. Stále pozostáva z troch častí – úvodného rozhovoru, stavby vlastného modelu a záverečnej prezentácie. Bolo ale potrebné upraviť metodické materiály pre učiteľa. Zahrnula som do nich základné informácie o robotickej stavebnici, návod, ako pracovať so softvérom na jej ovládanie, a taktiež postup spárovania tabletu a Smart Hubu. Ďalej som v nich zmenila niektoré predpoklady predpoklady (žiaci majú skúsenosť a zvládajú základné úkony s dotykovou technológiou) a samozrejme pomôcky (tablet, robotická stavebnica LEGO® WeDo 2.0).

Úvodný rozhovor mal preveriť žiacke povedomie o robotoch a robotike. Učiteľ mal v diskusii klásť otázky typu:

- Poznáte slovo robot? Poznáte robotov?
- Stretli ste sa už s nejakým robotom? S akým? Kde?

- Z čoho sa skladajú roboti? Čo musia obsahovať, aby sa mohli hýbať?
- Na čo slúžia roboti? Aký je ich hlavný účel?
- Môžu roboti sami myslieť?
- Môžu byť dobrí alebo zlí roboti?

Žiaci mali nielen odpovedať učiteľovi na dané otázky, ale aj reagovať na odpovede spolužiakov. Učiteľ tak najľahšie zistil, aké majú žiaci predstavy a aké pojmy sa im s témou robotika spájajú.

Na konci rozhovoru mal učiteľ ukázať žiakom robotickú stavebnicu LEGO® WeDo 2.0 s tým, že aj z takejto stavebnice vieme postaviť robota. Ukázal im zloženie stavebnice (motor s baterkami, senzory a obmedzenia spustenia) a postup na spárovanie stavebnice (Smart Hubu) s tabletom. Následne sa žiaci mali rozdeliť do skupín a mali za úlohu postaviť svoj vlastný model robota. Použiť mali stavebnice LEGO® Wedo 2.0, pričom robotov ovládali cez softvér v tablete (LEGO® Education Wedo 2.0).

Na konci hodiny žiaci predstavili spolužiakom svoj postavený model robota v krátkej prezentácii. Mali sa zamerať aj na objasnenie toho, čo daný robot má robiť (akú funkciu má vykonávať).

4.2 Aktivita Staviame Mila, vedecké vozidlo.

Táto aktivita je založená na aktivite s názvom Staviame a hýbeme lietadielkom. Z konštrukčných dôvodov, som zmenila typ modulu na vedecké vozidlo. V pôvodnej aktivite boli žiakom zadávané jednotlivé úlohy ústnou formou. Moja úprava bola v tom, že žiaci dostali úlohy zadané na pracovnom liste. Bolo nutné, aby som zadanie jednotlivých úloh aj preformulovala, a aplikovala ho priamo na vybraný model. Pôvodne bolo napríklad zadané, že žiaci majú naprogramovať točenie vrtule takým spôsobom, že sa bude striedavo točiť pár sekúnd doprava a pár sekúnd doľava. V mojom pracovnom liste žiaci testujú, ako sa bude Milo pohybovať, keď sa dostane do oblasti, kde je vela serpentín. Z programátorského hľadiska sa jedná o podobný typ úloh. Po spustení jednotlivých programov bol však patrný rozdiel vo vizuálnom prejave – v správaní samotného modelu. Zatiaľ čo sa liedatielku iba točila vrtuľa do rôznych strán, tu vedecké vozidlo jazdilo dopredu alebo dozadu.

Na úvod sa spravilo krátke opakovanie na overenie si zapamätaných vedomostí žiakov z predchádzajúcej hodiny. Po opakovaní sa žiaci rozdelili do skupín a dostali pracovný list. Na základe neho mali vykonávať svoju ďalšiu činnosť – postaviť funkčný model robota Mila a otestovať jeho funkčnosť, pomocou vybraných príkladov.

Príklady v pracovnom liste boli zamerané na príkazy čakaj, hýb motor istý čas, nastav silu motora a opakuj. Žiaci vlastnou tvorivou činnosťou mali zistiť, čo tieto príkazy spôsobujú a ako sa ich použitie prejaví na vedeckom vozidle Milo.

4.3 Aktivita Ventilátor.

Táto aktivita má rovnaký názov ako aktivita, na ktorej je založená. V pôvodej aktivite, žiaci stavili model podľa fotonávodu. Nový softvér pre stavebnicu LEGO® WeDo 2.0 však v sebe už obsahuje návod na stavbu modelu ventilátora. To som sa rozhodla využiť. Žiaci tak v pripravenom pracovnom liste dostali iba pokyn, že návod nájdu v aplikácii. V pôvodnej aktivite za fotonávodom nasledoval zoznam úloh, ktoré mali žiaci vykonať. Tieto úlohy som prerobila do podoby pracovného listu. Zadanie úloh som zmenila tak, že som úlohy obohatila o interaktívne prvky. Žiaci musia v jednotlivých úlohách niečo dopisovať alebo dokresľovať. Zároveň som ho rozdelila na dve časti. Prvá časť obsahuje úlohy, ktoré na svoje otestovanie nepotrebujú sensor, v druhej časti je už prítomnosť senzoru nevyhnutná.

Aktivita sa skladá z dvoch častí. Prvou časťou je opakovanie. Žiaci mali za úlohu povedať, čo si pamätajú z predošlých hodín robotiky. Zamerať sa mali nielen na konštrukčnú časť, ale aj na časť programátorskú. Do diskusie sa mali zapojiť všetci žiaci, pričom každý zo žiakov mal povedať niečo originálne.

V druhej časti hodiny mali postaviť a rozhýbať ventilátor. Súčasťou tejto aktivity je duhý pracovný list. Úlohy v ňom sa zameriavajú hlavne na programovanie. Jednotlivé úlohy majú postupne gradujúci charakter. Začínajú úlohami na opakovanie. Sú zamerané na pohyb motora. Po vyriešení prvej sady úloh mali žiaci pripojiť senzorom náklonu a riešiť úlohy zamerané na prácu s ním.

V závere hodiny malo prebehnúť spoločné zhrnutie. Od tejto hodiny sa zároveň do hodnotenia zakomponovalo aj žiacke hodnotenie spolužiakov prostredníctvom metódy odznakov.

5 Výsledky aktivít

Na základe výsledkov z výskumu sme sa snažili analyzovať našu realizovanú aktivitu, a v prípade potreby budeme aktivity modifikovať. Vhodnosť zmien sa bude iteratívne testovať v 2. fáze.

5.1 Aktivita Ahoj, Robot!

Aktivita pozostávala z dvoch hlavných častí. Každú z nich sme vyhodnotili samostatne.

5.1.1 Diskusia

Diskusia prebehla podľa očakávania. Žiaci sa v oboch skupinách zapájali do diskusie. Medzi oboma skupinami bol ale značný rozdiel

v uvažovaní aj vo vyjadrovacích schopnostiach. Výskumná skupina B, sa do diskusie zapájala aktívnejšie. Žiaci reagovali nie len na otázky učiteľa, ale aj na odpovede spolužiakov. Mohlo to byť spôsobené jednak vekom žiakov, alebo tým, že hodinu vo výskumnej skupine A som viedla ja, nie učiteľka, na ktorú boli zvyknutí.

Na otázku čo je robot zazneli odpoved:

"Je to stroj." (A skupina)

"Je to mašina, ktorá urobí veci za teba" (B skupina)

"Elektrický vynález, ktorý vymysleli ľudia, aby si uľahčili robotu." (B skupina)

Ako príklady robotov, s ktorými sa stretli, v oboch skupinách odzneli tablety, notebooky či robotický vysávač. V A skupine mal jeden žiak už skúsenosti so Spherom. V B skupine boli žiaci starší. Ako robota identifikovali aj žeriav alebo bankomat. Prekvapivo neodznelo, že sa s robotmi stretli vo filmoch, a nepredstavovali si robota iba ako humanoidný kovový stroj.

Na otázku, či existujú dobré a zlé roboty, boli odpovede:

"Roboty sa môžu pokaziť."

"Sú zlé, keď je zlá batéria."

"Keď je robot zle naprogramovaný."

Pri otázke či sa vie robot rozhodovať sám zazneli odpovede:

"Nie. Musíme mu povedať čo má robiť."

"Musí byť naprogramovaný."

Ale zaznela aj odpoveď:

"Áno. Keď má umelú inteligenciu." (B skupina)

Táto odpoveď podnietila krátku diskusiu o tom, čo je to umelá inteligencia. Žiacka predstava bola taká, že my máme mozog a roboti niečo iné, čo ich ovláda – nejakú umelú inteligenciu.

Pri otázke, Na čo nám roboti slúžia, dospeli obe skupiny k záveru, že roboti nám majú pomáhať.

Obe skupiny sa zhodli na zložení robotov – že musia obsahovať nejaké súčiastky, ktoré môžu byť z rôzneho materiálu, potrebujú nejaký druh pohonu (palivo, elektrická energia).

5.1.2 Stavba vlastného modelu

Po úvodnej diskusii sa žiaci rozdelili do skupín a dostali tablety spolu s robotickými stavebnicami.

Žiaci vo výskumnej skupine A sa najskôr pokúšali zostrojiť autíčko. Mali však problémy so stavbou modelu bez návodu. V čisto chlapčenských skupinách žiaci medzi sebou spolupracovali. Zmiešaná skupina chlapec a dievča mala so spoluprácou problém. Nedokázali sa dohodnúť. Chlapec neuznával nápady od dievčaťa a nechcel jej dovoliť nič robiť. Žiaci nakoniec zostrojili rôzne modely vrtuliek. Skúšali náhodne vkladať ikony do plochy – jedna skupina testovala farby, všetky skupiny testovali rýchlosť. Zaujímali sa hlavne o to, aká rýchlosť je maximálna. Nepodarilo sa im však na to prísť. Značný problém bol opäť v skupine chlapec a dievča, kde chlapec netoleroval pokusy dievčaťa vyskúšať programovať, ikony z programu jej stále mazal.

Žiaci vo výskumnej B sa rozdelili na 4 skupiny – 3 dvojice chlapcov a samostatnú skupinu tvorilo dievča. To už malo predchádzajúce skúsenosti s robotickou stavebnicou LEGO® WeDo 2.0. Chlapčenské skupiny zo začiatku tiež chceli stavať autíčka. Jednotlivé skupiny ale celkom rýchlo identifikovali náročnosť a úskalia zvoleného modelu. Preto model prestavali. Dievčatko postavilo lietadielko, ktoré sa krútilo na mieste. Prvá skupina chlapcov na začiatku postavila model autíčka. Pretože sa však iba motal na mieste, prebudovali na veterný mlyn. Druhá chlapčenská skupina stavbu autíčka tiež vzdala a vyrobila model kuchynského tyčového mixéru. Tretia skupina autíčko skonštruovala, neboli ho ale schopní rozhýbať. Model neprestavali. Žiaci vo výskumnej skupine B sa venovali skôr stavbe vlastného modelu než programovaniu. Postavili síce pekné modely, programátorsky ich ale nespojaznili.

5.2 Aktivita Staviame Mila, vedecké vozidlo

Táto aktivita sa skladala zo začiatočného opakovania, stavby modely vedeckého vozidla, ktoré je súčasťou návodov v softvéri a testovania jeho funkčnosti. Žiaci pracovali s 1. pracovným listom.

Úvodné zopakovanie vedomostí z predchádzajúcej hodiny dopadlo v oboch výskumných skupinách zhodne. Žiaci si zapamätali väčšiu časť informácií – z čoho sa robot skladá, aká je jeho hlavná funkcia (pomoc ľuďom). Po úvodnej diskusii sa rozdelili žiaci do skupín, dostali pracovné listy, tablety a robotické stavebnice.

V pracovenej skupine A nastal problém už na začiatku. Žiaci najskôr nepochopili, že majú pracovať podľa návodu uvedeného v tablete. Začali vyťahovať Smart Hub a súčiastky a vymýšľať, ako postavia model. Po upozornení si prečítali, ako majú postuovať, ale opäť nastal problém pri hľadaní návodu na stavbu modelu. V pracovnom liste stálo, že žiaci majú návod nájsť v aplikácii sami. To sa ukázalo ako nadmieru zložité. Chvíľu trvalo, kým sa v aplikácii zorientovali, ale návod im v konečnom dôsledku aj tak ukázala učiteľka. Tu je viditeľný rozdiel oproti softvéru, ktorý ovládal robotickú stavebnicu LEGO® WeDo 1.0. V ňom sa návody na stavanie robotických modelov hľadali jednoduchšie. Zloženie skupín bolo odlišné od predchádzajúcej hodiny. Boli prítomní iba 4 žiaci, ktorí vytvorili 2 skupiny. Tentokrát bol s dievčaťom iný chlapec a spolupráca bola výrazne lepšia. Model postavili všetky skupiny pomerne rýchlo. Počas celej fázy stavania skupiny medzi

sebou diskutovali a porovnávali si aktuálny stav stavby.

Po postavení funkčného vedeckého vozidla mali pracovať na úlohách uvedených v pracovnom liste. Mali postupne zisťovať, ako fungujú príkazy na ovládanie motora – nastavovanie rýchlosti, sily otáčania, či využitie príkazu čakaj. Po rozhýbaní modelov sa však ukázalo, že žiaci stratili záujem o pracovný list. Väčšmi ich zaujalo vlastné skúmanie toho, čo je model schopný vykonať prostrdníctvom príkazov, ktoré si sami navrhnú. Obe skupiny sa zhlukli na jedno miesto a pracovali spoločne. Podarilo sa im prísť po postupné zrýchľovanie a aj spomaľavanie rýchlosti motora. Pomerne dobre pochopili princíp točenie motoru – keď sa motor točil do jednej strany, vozilo sa hýbalo dopredu, keď sa točilo do druhej strany vozidlá sa vracali späť k nim. Jedna zo skupín zapojila motor naopak. To spôsobilo, že program, ktorý posúval vozidlá ich spolužiakov vpred, posúval ich vozidlo vzad. Žiaci na záver hodiny nad touto vzniknutou záhadou diskutovali. Podarilo sa im prísť aj na príčinu.

Priebeh aktivity v skupine B bol obdobný. V tejto skupine boli na danej aktivite prítomní tiež iba 4 žiaci - chlapci, ktorí vytvorili 2 pracovné skupiny. Jedna zo skupín mala trochu problém postaviť model, nedarilo sa im pospájať motor s kockami. Stále sa im to rozpadalo.

Oproti výskumnej skupine A, skupiny pracovali separovane. Úlohy v pracovnom liste čítali, ale aj tu bolo badať, že pracovný list žiakov nezaujal. Na konci hodiny usporiadali preteky vozidiel.

5.3 Aktivita Ventilátor

Úvodná diskusia v výskumnej skupina A dopadla dobre. Žiaci sa zapájali a pomerne si pamätali modely aj príkazy.

Na hodine bolo prítomných 5 žiakov – 4 chlapci a 1 dievča. Problém opäť vyvstal pri vytváraní skupín – chlapci nechceli byť s dievčaťom, zároveň si ale neboli istí, či zvládne pracovať samé. Nakoniec sa vytvorili 3 skupiny, dve dvojice chlacov, dievča pracovalo samé.

Po zadelení do skupín sa rozdali tablety, robotické stavebnice a pracovné listy. Žiaci sa tešili, že nebudú musieť model vymýšľať, ale že budú postupovať podľa návodu. Pracovné listy zo začiatku ignorovali, ani ich neprečítali. Postavenie modelu žiakom nerobil problém, zabúdali ale spárovať Smart Hub s tabletom. Niektorí si ani nepamätali, ako sa to robí, musela im to ukazovať učiteľka.

Prvé úlohy zvládli pomerne dobre, aj keď nie vždy úplne porozumeli zadaniu. Spozorovali sme problém s pojmom ikona – nevedeli, čo znamená. Keď dostali k senzoru, učiteľka žiakom poskytla krátke vysvetlenie a následne ich opäť nechala pracovať samostatne.

Na konci žiaci porovnávali svoje programi a diskutovali medzi sebou o riešeniach.

Vo výskumnej skupine B bolo prítomných 6 žiakov – 5 chlapcov a 1 dievča. V počiatočnej diskusii si žiaci pamätali postavené modely. Programátorská časť už bola na tom horšie. Žiaci mali napríklad problém spomenúť si, ako zrýchľovali vozidlo. Do diskusie sa nezapojili všetci, aktívna bola len asi polovica žiakov.

Po diskusii sa vytvorili 3 skupiny - dve chlapčenské dvojice a jednu skupinu tvorilo dievča a chlapec. V tejto výskumnej vzorke sa najskôr rozdali pracovné listy a tablety. Robotické stavebnice žiaci dostali až po tom, čo si prečítali celý pracovný list.

Žiaci mali menší problém nájsť návod na postavenie ventilátora – ukázala im ho učiteľka. V tejto výskumnej skupine žiaci nemali až taký problém so spárovaním stavebnice a tabletu ako v skupine A. Žiaci pracovali pomerne aktívne, aj keď občas niektoré úlohy preskakovali a zabúdali si do pracovného listu zaznamenávať svoje riešenia. Musela ich na to neustále upozorňovať učiteľka.

6 Záver

Ukázalo sa, že aktivita Ahoj, Robot! sa bude musieť celá prepracovať. Úvodná diskusia môže zostať zachovaná, stavba vlastného modelu sa ale z aktivity bude musieť vypustiť. Hoci sa v pôvodnej sérii aktivít pre LEGO® WeDo 1.0 osvedčila, pre stavebnicu LEGO® WeDo 2.0 je nevhodná. Ukázalo sa, že mladší žiaci majú problém vymyslieť vlastný model a starší žiaci, majú problém postaviť model, na ktorom by boli schopný otestovať jednotlivé programovacie funkcie. Jedným z dôvodom získania rozdielnych výsledkov pre jednotlivé stavebnice môže byť fakt, že stavebnica LEGO® WeDo 2.0 obsahuje iné zloženie súčiastok, ktoré umožňujú stavať odlišný typ modelov než predtým. Stavba vlastného modelu by mala byť nahradená stavbou podľa návodu.

Pri aktivite Milo, vedecké vozidlo bude potrebné prepracovať pracovný list. Je potrebné upraviť úlohy tak, aby boli viac interaktívne, tj. žiaci budú nútení s listom pracovať – napr. dopisovať do neho, dokresľovať kódy alebo vyberať správne riešenie.

V aktivite Ventilátor je potrebné hlavne preformulovať niektoré zadania v pracovnom liste tak, aby boli konkrétnejšie. Pri súčasnej formulácii žiaci nevedeli, čo sa od nich vlastne vyžaduje. Počas tejto aktivity prišli deti prvý raz do styku so senzorom náklonu. Preto by sa do listu mala doplniť úloha, v ktorej budú musieť jasne identifikovať polohu senzora, podľa jeho ikonky. To

by malo slúžiť k tomu, aby si žiaci správne priradili obrazovú reprezentáciu k správnemu vizuálnemu prejavu.

Okrem toho je vhodné doplniť v oboch listoch k zadaniu úloh políčko, do ktorého by žiaci zaznačili, že už danú úlohu vyriešili. Vyhlo by sa tým problému s preskakovaním úloh. Je tiež nutné jednotlivé úlohy opticky výraznejšie oddeliť, aby žiakom nesplývali.

Diskutabilné je, či nahradiť pojem ikona, s ktorým mali žiaci problém, iným výrazom. Alternatívou k tomu je, že tento pojem, rovnako ako pojem program, zavedieme už na prvej hodine, pri prvej aktivite.

Všetky tieto zaznamenané pripomienky sa zapracujú do druhej verzie aktivít, ktoré sa budú následne ďalej testovať v 2.fáze. To ukáže, či vykonané zmeny budú dostatočné, alebo bude potrebná ich ďalšia modifikácia.

Poďakovanie

Poďakovanie v prvom rade patrí mojej školiteľke Mgr. Karolíne Mayerovej, PhD. za ochotu, odbornú pomoc a usmernenie počas celého výskumu. Veľká vďaka patrí v neposlednej rade PaedDr. Michaele Veselovskej, PhD a RNDr. Zuzane Kubincovej, PhD. za odbornú pomoc a asistenciu pri realizácii výskumu. Veľké poďakovanie aj Mgr. Lucii Budinskej a Mgr. Elene Fábryovej, ktoré sa zúčastnili výskumu s ich žiakmi, pretože bez nich by tento výskum nebolo možné realizovať. Ďakujem.

Literatúra

[Trilling, Fadel, 2012] Trilling, B., Fadel, CH. (2012). 21st Century Skills: Learning for Life in Our Times. 1.vydanie. San Francisco: Jossey-Bass, 2012. 256 s. ISBN 978-1118157060

[Papert, 2005] Papert, S. The Eight Big Ideas of the Constructionist Learning Laboratory. Nepublikovaný intený dokument. South Portland: Maine (1999) Citované v STAGER, G. Papertian Constructionism and the Design of Productive Contexts for Learning. In: *EuroLogo X* 2005. [cit. 12. 4. 2019]. Dostupné na: <http://www.stager.org/articles/eurologo2005.pdf>

[Mikropoulos, Bellou, 2013] Mikropoulos, T. A., Bellou, I. (2013) Educational Robotics as Mindtools. In *Themes in Science & Technology Education*, vol. 6, no. 1, p.5-14

[Michalíková, Jochmanová, 2018] Michalíková, A., Jochmanová, R. (2018) Stavebnica LEGO MINDSTORMS Education EV3 vo vyučovacom procese na základných školách. In *Sborník konference Didinfo 2018.* Liberec, 2018. ISBN: 978-80-7494-424-6, ISSN: 2454-051X [online]. Dostupné na: <http://didinfo.net/images/DidInfo/files/Didinfo_2018.pdf >

[Horváthová, Klimová, 2018] Horváthová, D., Klimová, N. (2018). Robot Phiro ožíva v rukách detí. In *Sborník konference Didinfo 2018. Liberec*, 2018. ISBN: 978-80-7494-424-6, ISSN: 2454-051X [online]. Dostupné na: <http://didinfo.net/images/DidInfo/files/Didinfo_2018.pdf >

[Eduxe] Eduxe: WeDo 2.0 Základná súprava. [online]. [cit. 12.04.2019] Dostupné na: <https://www.eduxe.sk/p/299/45300-wedo-20-zakladna-suprava>

[Lego Education] Lego Education: WeDo 2.0 software. [online]. [cit. 12.04.2019] Dostupné na: <https://education.lego.com/en-us/downloads/wedo-2/software>

[Mayerová, 2015] MAYEROVÁ K. (2015). Miesto edukačnej robotiky v informatickej výchove. Univerzita Komenského, Bratislava, dizertačná práca.

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 197–205
ISBN 978-8081470936, © 2019 Iveta Csicsolová

Nemusíš byť na to vždy sám

Iveta Csicsolová[1]*
Školiteľ: Zuzana Kubincová[1]‡

[1] Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

Code review je pomerne bežnou súčasťou programovania v IT firmách. Výskumy a prax dokazujú, že táto aktivita môže výrazne zlepšiť a zefektívniť skúmaný kód. V realizovanom výskume sme aplikovali code review do vyučovania na strednej škole. V tomto príspevku prezentujeme čiastkové výsledky nášho výskumu, ktoré sa týkajú programovania projektov.

Kľúčové slová: Code review, Projekty, Stredná škola, Programovanie

1 Úvod

Code review je aktivita, pri ktorej programátor kontroluje (cudzí) programový kód, v ktorom sa snaží nájsť a odstrániť chyby a tým zlepšiť kvalitu programu [1]. Recenzovanie kódu v praxi používajú mnohé veľké aj menšie IT firmy, napríklad Google, Facebook, Microsoft. Používanie code review opisujú väčšinou vo forme firemných blogových článkov [2, 3, 4].

Ako ukazujú viaceré výskumy, vzájomné recenzovanie programového kódu v tímoch profesionálnych programátorov vedie k významnému zlepšeniu kvality programového kódu a celkovej efektívnosti vývoja projektu [5, 6].

Táto aktivita môže priniesť aj študentom rôzne benefity napomáhajúce k zlepšeniu ich študijných výsledkov, prispieť k rozvoju ich interpersonálnych zručností (z angl. soft skills) a posilniť sociálne učenie sa [7, 8].

Väčšina publikovaných výskumov zaoberajúcich sa využitím code review vo vzdelávaní, bola z prostredia univerzitných kurzov [1, 9, 10]. Pokiaľ ide o výskum v tejto oblasti na Slovensku, nenašli sme žiadnu relevantnú publikáciu týkajúcu sa strednej školy. Preto sme sa pred viac ako rokom začali takémuto výskumu venovať. V tomto článku prinášame čiastkové výsledky nášho výskumu.

2 Code review na strednej škole

V snahe vyskúšať zapojenie techniky code review do vyučovania na strednej škole a zistiť jej vplyv na učenie sa žiakov sme navrhli aktivity spojené s touto technikou a otestovali ich v podmienkach bežného vyučovania.

Výskum bol realizovaný počas školského roka 2017/2018 na hodinách informatiky v dvoch triedach tretieho ročníka bilingválnej strednej školy, počas výučby informatického celku Algoritmické riešenie problémov. Výučba tohto celku prebiehala od novembra do júna, takže výskum zasahoval do oboch polrokov. Žiaci mali jednu hodinu informatiky do týždňa.

Žiaci už v predchádzajúcom ročníku programovali v jazyku Python, pričom sa stretli so základnými grafickými príkazmi knižnice tkinter, s náhodnými číslami, premennými a cyklom for. Toto učivo bolo najprv preopakované, a následne sa pokračovalo novými témami: funkcie, udalosti myši, klávesnica, podmienky, časovač a posúvanie objektov canvasu.

Do vyučovania boli zapojené dva typy aktivít s code review:

- **Malé recenzie**, ktoré prebiehali formou krátkej písomky po prebratí nejakého celku. Žiaci tu recenzovali vždy dva krátke nami pripravené programy. V prvom z nich mali za úlohu zistiť, čo daný programový kód vykoná, v druhom bolo treba v zadanom programe nájsť chyby (syntaktické aj logické) a správne ich opraviť. Podrobnejšie informácie o tejto aktivite boli publikované v iných našich prácach [11, 12] a budú publikované v diplomovej práci.
- **Recenzie projektov.** Žiaci počas školského roka dostali naprogramovať dva projekty – prvý v 1.polroku, druhý na konci 2.polroka. Výsledky boli čiastočne publikované v našej práci [12], budú publikované aj v [13] a diplomovej práci.

Analýze samotného recenzovania je venovaný tento príspevok.

* ivetkacs@gmail.com
‡ kubincova@fmph.uniba.sk

3 Recenzovanie projektov

Po uskutočnení niekoľkých malých recenzií, ktoré bolo možné chápať ako tréning, sme žiakov nechali recenzovať si navzájom projekty. Pri tejto recenzii teda už išlo o vzájomné komentovanie programového kódu vytvoreného samotnými žiakmi – čiže o aktivitu, ktorá bola podobnejšia skutočnému code review.

Vzájomné recenzovanie projektov sme v školskom roku 2017/2018 využili dvakrát. Prvý projekt dostali žiaci vypracovať počas zimných prázdnin, čo bolo len zopár týždňov po tom, ako sa na informatike začalo preberať programovanie. V tom čase mali okrem preopakovaného učiva z predchádzajúceho ročníka zvládnuté náhodné farby, cyklus for, funkcie, udalosti na klikanie myšou a udalosti s klávesnicou. Na celú projektovú aktivitu vrátanie komentovania mali žiaci 5 týždňov. Druhý projekt dostali zadaný ku koncu programátorského celku (v apríli), keď mali prebraté navyše podmienky, časovač a posúvanie objektov canvasu. Keďže v projekte bolo treba využiť všetky získané vedomosti, bol značne obtiažnejší, ako predchádzajúci. Žiaci si vyžiadali dlhšiu dobu na jeho vypracovanie, takže súhrnný čas, počas ktorého sa mu venovali, bol 7 týždňov.

Pri prvom projekte si žiaci vyberali jedno z troch zadaní – preteky, skicár a pohľadnica – takže v každej skupine sa projekt s rovnakým zadaním mohol viackrát opakovať. Každé z týchto zadaní bolo podrobne špecifikované.

Pri druhom projekte sme žiakom ponúkli sedemnásť rôznych zadaní – napr. Kameň-Papier-Nožnice, Športka, Odrážanie loptičky, Sofistikovaný skicár, T-Rex, a pod. – a mali si z nich vybrať jedno tak, aby sa v danej skupine žiadne zadanie neopakovalo. Aj pri týchto projektoch boli presne stanovené špecifikácie. Žiaci si mohli navrhnúť a dať schváliť aj svoju vlastnú tému projektu.

3.1 Účastníci

V prvom polroku sa výskumu zúčastnilo 52 žiakov, v druhom polroku 55 žiakov (pozn. traja žiaci, ktorí prestúpili do tried v 2.polroku, programovali naposledy v druhom ročníku).

Žiaci boli rozdelení do štyroch vyučovacích skupín. V skupine 3A1 bolo 13 žiakov, z toho traja chlapci (v 2.polroku plus 1 žiak), v skupine 3A2 bolo 14 žiakov, z toho päť chlapcov. V skupine 3B1 bolo 12 žiakov (v 2.polroku plus 1 žiačka), z toho štyria chlapci a v skupine 3B2 bolo 13 žiakov (v 2.polroku plus 1 žiačka), z toho šesť chlapcov.

3.2 Metodika vzájomného recenzovania

Vzájomné recenzovanie projektov prinieslo do projektovej aktivity nový aspekt – možnosť opraviť, resp. vylepšiť svoj projekt na základe komentárov získaných od spolužiakov. Celú prácu na projekte bolo možné rozdeliť do troch základných fáz: A. vývoj projektu, B. recenzovanie spolužiakovho projektu, C. úprava vlastného projektu. Jednotlivé fázy zahŕňali nasledovné kroky:

A. Vývoj projektu
   1. Výber jednej z ponúkaných tém projektu
   2. Naprogramovanie projektu
   3. Odovzdanie projektu na recenzovanie

B. Recenzovanie spolužiakovho projektu
   1. Pridelenie projektov na recenzovanie
   2. Komentovanie prideleného projektu
   3. Odovzdanie okomentovaného projektu

C. Úprava projektu
   1. Vrátenie okomentovaného projektu jeho autorovi
   2. Úprava, dokončenie, resp. vylepšenie projektu
   3. Odovzdanie finálnej verzie projektu na hodnotenie učiteľkou

Prvá fáza – vývoj projektu – trvala v prípade prvého projektu tri týždne a v prípade druhého projektu až päť týždňov. Tento predĺžený čas vyplýval nielen z vyššej náročnosti druhého projektu, ale aj z toho, že žiaci ho vyvíjali popri iných školských povinnostiach, zatiaľ čo prvý projekt vypracovávali v čase prázdnin.

Keďže sme nemali k dispozícii žiadny nástroj na distribuovanie programov a recenzovanie programového kódu, ktorý by bol vhodný pre použitie na strednej škole, žiaci nám odovzdávali svoje projekty prostredníctvom e-mailu. Jednotlivé projekty sme pridelili iným žiakom na recenzovanie tak, aby autor a recenzent nepatrili do tej istej skupiny. Týmto sme sa snažili zabezpečiť anonymitu pri komentovaní projektu – autor projektu nevedel, kto recenzuje jeho program a recenzent nevedel, čí program recenzuje.

Úlohou žiaka v roli recenzenta bolo skontrolovať pridelený spolužiakov projekt: zistiť, či dodržal všetky časti zadania, odhaliť chyby a upozorniť na ne, poradiť spolužiakovi, čo je nutné prerobiť alebo doplniť a napísať mu celkový svoj názor na jeho projekt. Na komentovanie projektu mali vyhradený jeden týždeň. Potom nám žiaci opäť e-mailom poslali späť okomentovaný program, ktorý sme vrátili naspäť k jeho autorovi.

V poslednej fáze, ktorá trvala opäť jeden týždeň, bolo úlohou žiaka zapracovať opodstatnené pripomienky recenzenta k jeho programu, prípadne si opraviť chyby, ktoré si medzičasom v projekte našiel sám. Takto žiaci získali možnosť opraviť si

nedostatky v projekte a vylepšiť ho, aby mohli dosiahnuť aj lepšiu známku.

Po poslednej fáze sme zaslali každému žiakovi individuálne hodnotenie, kde sme okomentovali žiakovu prácu v jednotlivých fázach výskumu. Sledovali sme, nakoľko žiak zvládol naprogramovať projekt v prvej fáze, ako komentoval spolužiakov projekt v druhej fáze a napokon sme zhodnotili žiakov výsledný projekt. Sledovali sme, čo a ako v ňom zapracoval na základe spolužiakových komentárov.

V tomto príspevku sa pozrieme na fázu B – 2.krok.

4 Recenzovanie spolužiakovho projektu

Pri programovaní softvéru sú na programátorov v praxi kladené veľké nároky. *„Programátorov kód by nemal obsahovať žiadne syntaktické, logické ani architektonické chyby“* [14]. Samotný kód musí byť *„bezpečný, univerzálny, znovupoužiteľný, rozšíriteľný, ľahko čitateľný alebo zrozumiteľný pre iných, rýchly a efektívny, pripravený na možné výpadky a problémy, musí sa snažiť odhaliť neočakávané situácie a musí mať mnoho ďalších aspektov, ktoré súvisia už s konkrétnym programovacím jazykom”* [14].

Obr. 1: Myšlienková mapa - Code review projektov.

```
dx3=0
c.create_text(100,100,text="Vyhralo"+vyhra+"auticko",tags="textik")
#text je spojený, možno by bolo treba vypísať každé slovo na statické súradnice osve
def vyhraj():
    c.after(500)
    global vyhra,kolo,kolo2,kolo3,dx,dx2,dx3
    if kolo==2 and dx==0:
        vyhra="prve"
    if kolo2==2 and dx2==0:
        vyhra="druhe"
    if kolo3==2 and dx3==0:
        vyhra="tretie"
    c.delete("textik")
    c.create_text(600,500,text="Vyhralo"+vyhra+"auticko",tags="textik",font="Arial80")
            #text/výsledok pretekov sa po skončení závodu nevypíše
vyhraj()

#Kliknutim na medzernik sa startuje cela hra
#Kliknutim na "c" sa auticka posunu naspat na zaciatok

#problém s vypísanim textu, by sa možno by dal vyriešiť tým, že by si zmenil/a
    #jednu z dx súradníc a tú následne zmenil/a
#aj v podminekach pri def vyhraj() a už dopredu presne určil/a ktoré auto vyhrá
#vypísanie textu by sa ptm dalo riešiť podmienkou, v ktorej by si určil/a, že ak
    #toto auto príde do istého bodu v ciely,
#tak na súradniciach pod 'Vyhralo autíčko' sa vypíše text s farbou/názvom toho
    #už vopred určeného autíčka
#tu by však bolo víťazné auto už dopredu určené

#celkovo sa mi však projekt veľmi páči a je vidieť že si si s tým dal/a námahu a čas
```

Obr. 2: Ukážka recenzovania projektu.

Pri recenzovaní projektu, boli na žiakov taktiež kladené nároky. Obr. 1 zobrazuje myšlienkovú mapu znázorňujúcu najdôležitejšie koncepty sledované pri recenzovaní projektov. Treba však povedať, že code review v školských podmienkach sa od profesionálneho code review v programátorskej praxi líši.

Žiaci mali pri recenzovaní projektu kontrolovať a dodržiavať dohodnuté postupy, ako pomenovávanie premenných, funkcií, tagy a formátovanie kódu. Taktiež mali v kóde nájsť chyby, či už logické alebo syntaktické, ktoré spozorovali počas testovania projektu.

Žiaci pri programovaní mali dbať na osvedčené postupy využívané pri programovaní. Kód mal byť naprogramovaný tak, aby bol pochopiteľný, čitateľný, zrozumiteľný a prehľadný, nie len pre samotného programátora projektu, ale aj pre iných ľudí, v našom prípade pre recenzenta kódu.

Recenzent mal dať pozor na to, či bol projekt naprogramovaný podľa zadania, zistiť, či žiak doprogramoval nejaké vylepšenia, prípadne mu zanechať komentár o tom, čo má vylepšiť alebo na čo zabudol.

Žiak mal dbať aj na zásady slušnosti a kritiku podávať konštruktívne, primerane. Pri komentovaní by nemal zabudnúť ani na pochvalu dobre urobených častí projektu.

Komentáre žiaka sa nemali týkať iba grafickej stránky projektu, ale najmä kódu a jeho (ne)fungovania. Mohol však okomentovať aj grafickú stránku projektu, ktorá bola pri mnohých projektoch veľmi zaujímavá.

Žiak sa mal objektívne pokúsiť zhodnotiť projekt zo všetkých jeho stránok. Komentáre písali žiaci priamo do kódu. Mohli ich zanechávať priamo pri konkrétnom riadku, časti kódu, prípadne zhodnotiť projekt vo väčšom odseku na konci projektu. Ukážku časti kódu zobrazuje Obr. 2, v ktorom žiak recenzoval spolužiakov projekt.

5 Analýza recenzovania

Po skončení projektu sme v hodnotení pre žiaka, analyzovali jednotlivé fázy projektu. Zhodnotili sme prácu žiaka v každej fáze, napísali sme mu, čo žiak splnil, nesplnil, čo mal zle a ako to mohol vyriešiť, čo bolo dobre a koľko percent dostáva žiak za danú časť projektu.

Pri analyzovaní sme sa sústreďovali aj na to, ako žiak okomentoval spolužiakov projekt a aj to, ako žiak (ne)zapracoval spolužiakove komentáre a ako mu to pomohli dokončiť projekt.

Myslíme si, že žiaci pri oboch projektoch dokázali pochopiť cudzí kód, dokázali v ňom nájsť chyby a okomentovať ho. Dokonca sa stalo aj to, že našli chybu, ktorú sme si nevšimli. V prípade prvého projektu bolo medzi žiakmi len veľmi málo takých, ktorí nedokázali odhaliť väčšinu chýb v spolužiakovom projekte. Viacerí dokázali nájsť všetky chyby. Pri druhom projekte, vďaka jeho väčšej náročnosti niektorí žiaci neboli schopní dobre poradiť ako projekt opraviť, avšak mnohí to dokázali, čo sme následne ocenili, keď sme žiakom poskytovali spätnú väzbu na ich aktivitu.

Po dôkladnej analýze spätnej väzby, sme z hodnotenia oboch projektov vybrali vety, ktoré sa týkali recenzovania. Podrobnejšie sme sa pozreli na to, ako žiak okomentoval svojho spolužiaka. Vety vybraté z hodnotenia „učiteľa“ by sa dali rozdeliť do 4 kategórií:

1. Zlé komentovanie
2. Projekt bol dobrý, žiak nemal čo nájsť
3. Dobré/priemerné komentáre
4. Super/výborné komentáre

Do kategórie „zlé komentovanie“ sme zaradili napríklad takéto hodnotenia recenzovania:

- *„popisovala si skôr estetiku než funkčnosť programu. nabudúce hľadať skôr tú funkcionálnu stránku programu, a pozerať kód, než estetickú stránku - grafiku“*,
- *„viac jej tvoja rada nepomohla ako pomohla“*,
- *„komentovanie vôbec nebolo dobré. nakopíroval si mu tam kódy, niektoré ani neboli dobré; to čo nefungovalo ani u teba“*,
- *„niektoré komentáre boli dosť zbytočné a naopak väčšie nedostatky, ktoré tam boli, si si nevšimla“*,
- *„pri komentovaní je jasné, že si si neprečítala poriadne zadanie projektu“,*
- *„veľmi slabo testovaný projekt“*,
- *„veľmi minimalistický komentár“*.

Kategória „Projekt bol dobrý, žiak nemal čo nájsť“, obsahuje hodnotenia, ktoré poukazujú na to, že projekt bol veľmi dobrý a v podstate v ňom nebolo čo vytknúť, preto komentáre žiaka nemuseli byť veľmi podrobné. Zaradili sme sem napríklad tieto hodnotenia:

- *„súhlasím, že v zásade nebolo čo komentovať na spolužiačkinom projekte, možno by som okomentovala viac funkciu skok“*,
- *„dobré komentáre, ale skôr doplnkové, tento projekt, ktorý si komentovala bol naozaj super a prepracovaný“*,
- *„projekt, ktorý si komentoval bol dobrý, takže v podstate tam nebolo čo komentovať, tak si aspoň pochválil“*,
- *„rady pre spolužiaka boli v poriadku, dosť veľa ich tam mal on sám napísaných, že čo chce ešte dorobiť, takže mu nebolo až tak veľmi čo radiť“*.

Do kategórie „dobré/priemerné komentáre“ sme zaradili hodnotenie, v ktorom sme zhodnotili recenzovanie žiakov ako dobré:

- *„vystihla si všetko podstatné“*,

- *„komentáre boli viac menej dobré, neupozornil si ešte na niekoľko vecí“*,
- *„to na čo si upozornil spolužiačku bolo dobré, ale neupozornil si ju na rovnaké chyby, ako si mal aj ty“*,
- *„iba si ho pochválil. mal tam však aj nejaké menšie chyby“*,
- *„našla si skoro všetky chyby“*
- *„na niečo si upozornila na niečo nie“*,
- *„súhlasím s okomentovaním projektu, mohla si byť ešte viac kritická, pretože tento projekt neobsahoval nič“*.

Pri zaraďovaní hodnotenia do kategórií sme spozorovali, že niektoré hodnotenia sú lepšie ako dobré, preto vznikla kategória „super/výborné komentáre“, v ktorej sa nachádzali takéto hodnotenia recenzovania:

- *„spolužiačku si dobre okomentoval, aj si ju pochválil. dal si jej cenné rady“*,
- *„veľmi dobrá rada ohľadne kurzora myši“*,
- *„veľmi dobré komentáre si napísal, naozaj podnetné, vystihol si všetko podstatné, odhalil si všetky vážne chyby“*,
- *„našiel si veľa chýb, na ktoré si správne upozornil, poradil si aj ako to opraviť“*,
- *„veľmi dobre okomentovaný projekt, páči sa mi ako si rozdelila komentáre na dobré veci v projekte a nefungujúce veci, aj si ho pochválila a pri testovaní si vychytala všetky muchy jeho projektu“*,
- *„dobre okomentovaný projekt; takto by to malo byť, že si to aj dôkladne otestoval, všimol si aj to, čo som si ja nevšimla“*.

Tab. 1: Tabuľka kategórií hodnotenia recenzovania.

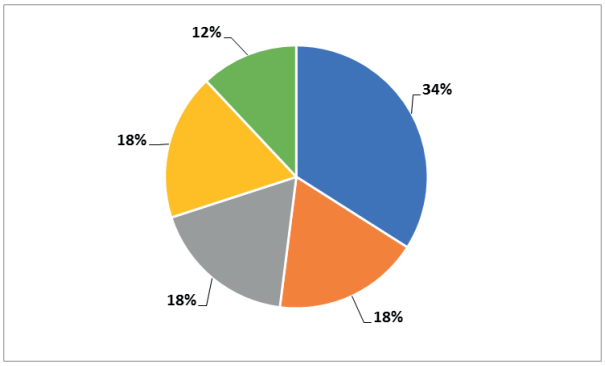
	Super/výborné komentáre		Dobré/priemerné komentáre		Projekt bol dobrý, žiak nemal čo nájsť		Zlé komentovanie	
	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 1	Projekt 2
3A1	1	5	7	4	2	3	4	0
3A2	1	3	2	3	3	0	5	4
3B1	2	1	4	4	2	2	2	2
3B2	0	1	1	3	3	5	5	3
SPOLU	4	10	14	14	10	10	16	9

Tieto hodnotenia zoradené do kategórií sme zosumarizovali (Tab. 1). Ich sumárny počet pri jednotlivých skupinách nie je zhodný s počtom účastníkov výskumu. Tento počet sa nezhoduje kvôli tomu, že sme nevedeli zhodnotiť všetky projekty vetami, ktoré by sme vedeli zaradiť do týchto kategórií z rôznych dôvodov: žiak neodovzdal fázu komentovania, žiak neodovzdal projekt, žiak bol označený ako plagiátor a získal 0 bodov z celého projektu, atď...

Z Tab. 1 môžeme vidieť, že počet zle okomentovaných projektov sa znížil zo 16 pri prvom projekte na 9 pri druhom. Teda, 7 žiakov pravdepodobne lepšie okomentovalo spolužiakov projekt.

Rapídne sa zmenil aj počet výborne okomentovaných projektov zo 4 projektov na 10 projektov. Tieto čísla nám naznačujú, že žiaci boli pri druhom projekte skúsenejší v programovaní a dokázali využiť svoje skúsenosti z predchádzajúceho code review.

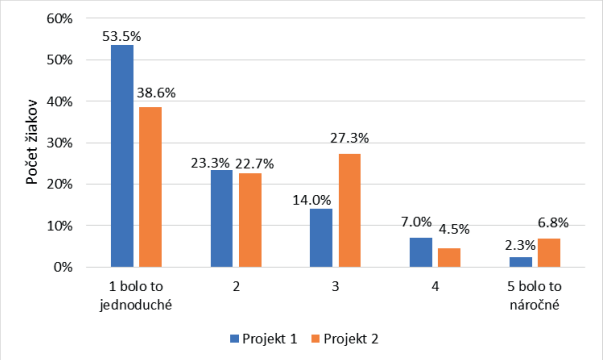
Po skončení projektov dostali žiaci záverečný dotazník, ktorý sa týkal predovšetkým projektov a komentovania. Po skončení druhého projektu sme žiakov poprosili, aby porovnali náročnosť komentovania prvého a druhého projektu (Obr. 3). Pre 52% žiakov to bolo jednoduchšie, či už vďaka tomu, že v prvom polroku už komentovali projekt (34%) alebo preto, že usúdili, že už vedia lepšie programovať a lepšie rozumejú kódu, než pri prvom projekte (18%). Podiel žiakov, pre ktorých to bolo ťažšie, bol 18% a dôvodom pre nich bolo, že aj projekt bol ťažší. Vlastnú odpoveď pridalo 12% žiakov – pričom asi pre polovicu z nich bolo komentovanie tohto projektu z rôznych dôvodov ľahšie a pre druhú polovicu ťažšie. V inej odpovedi žiaci uviedli, že pre niektorých to bolo ľahké pretože dostali projekt, v ktorom neboli žiadne chyby (bol dobre naprogramovaný) a pre ostatných to bolo ťažšie, pretože dostali projekt s nezrozumiteľným kódom alebo podľa nich nebol dostatočne dobre urobený. Celkovo tak komentovanie ťažšieho projektu bolo pre takmer 60% žiakov ľahšie a len pre menej ako štvrtinu žiakov bolo ťažšie.



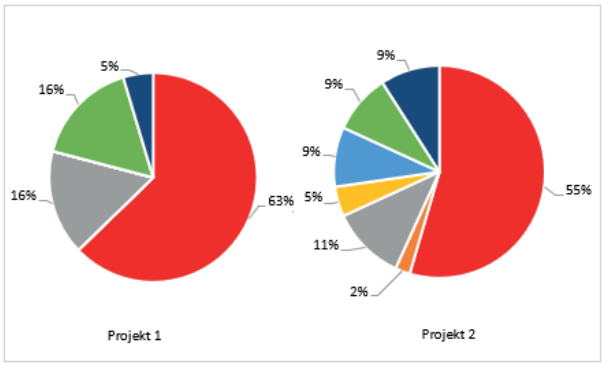
Obr. 3: Odpovede žiakov na otázku Aké ťažké bolo komentovať tento projekt oproti komentovaniu minulého projektu? Bolo to jednoduchšie práve vďaka tomu, že sme už minule komentovali projekt, Bolo to jednoduchšie, pretože viem lepšie programovať a lepšie rozumiem kódu, než pri prvom projekte, Bolo to rovnako ťažké ako minule, Bolo to ťažšie, lebo projekt bol ťažší, Iné.

Keďže pred prvým projektom žiaci nemali skúsenosti s recenzovaním programového kódu dlhšieho ako zopár riadkov (malé recenzie), zaujímal nás ich názor na náročnosť komentovania projektu. Otázku sme v dotazníku ponechali aj pri druhom projekte. Aj keď rozloženie odpovedí v druhom dotazníku nebolo také jednoznačne výpovedné ako v prvom (Obr. 4), percentuálne zastúpenie žiakov, ktorí komentovanie

spolužiakovho projektu nepovažovali za náročné (hodnoty 1-3), bolo v oboch prípadoch veľmi vysoké a zhruba rovnako veľké (90,8% a 88,6%).



Obr. 4: Odpovede žiakov na otázku „Bolo náročné okomentovať spolužiakov projekt?“ Škála od 1 (bolo to jednoduché) do 5 (bolo to náročné).



Obr. 5: Odpovede žiakov na otázku „Čo Ti robilo problémy pri komentovaní spolužiakovho projektu?“ Nemal/a som žiadne problémy pri komentovaní projektu, Vôbec som projektu nerozumel/a, Nevedel/a som sa dobre orientovať v jeho projekte, Nevedel/a som zistiť, prečo projekt nefunguje, Nevedel/a som dobre popísať chybu, ktorú som v projekte našiel/a, Nemal/a som čo komentovať, lebo som nenašiel/a žiadne chyby, Iné.

Zisťovali sme tiež, s akými problémami sa žiaci pri komentovaní projektu stretli (Obr. 5). Pri prvom projekte až 63% z nich uviedlo, že nemali žiadny problém s komentovaním projektu, 16% žiakov sa nevedelo dobre zorientovať v spolužiakovom kóde, 16% nemalo čo komentovať, pretože nenašli žiadne chyby. Pri druhom projekte boli odpovede žiakov distribuované do viacerých kategórií, objavili sa aj odpovede, ktoré sa v predchádzajúcom dotazníku nevyskytli (napr. „Vôbec som projektu nerozumel/a“, alebo „Nedokázal/a som dobre popísať chybu, ktorú som našiel/a“). Avšak aj napriek tomu, že žiaci označovali druhý projekt za veľmi náročný, 55% z nich nemalo žiadny problém s komentovaním spolužiakovho projektu.

6 Analýza zapracovania recenzií

Spätná väzba pre žiaka obsahovala aj zhodnotenie toho, ako žiak zapracoval opodstatnené komentáre do finálnej verzie projektu. Túto spätnú väzbu sme analyzovali a slovné hodnotenia sme roztriedili do 4 kategórií:

1. Žiak zapracoval komentáre
2. Žiak nezapracoval komentáre
3. Žiak pravdepodobne kvôli zlému komentáru nevedel zapracovať pripomienky
4. Žiak nemal čo zapracovávať, pretože mal dobrý projekt

Hodnotenia, ktoré sme zaradili do kategórie „žiak zapracoval komentáre“ sa nachádzalo:

- *„dostal si podnetné komentáre od spolužiačky a následne si si všetko opravil“,*
- *„projekt bol už v prvej fáze skoro úplne funkčný. spolužiačka ti projekt pochválila a dala dobrú radu, ktorú si zapracoval“,*
- *„projekt bol takmer úplne funkčný už v prvej verzii. podľa rady v komentároch si vyrobil aj funkciu na pozadie, aj na vysvetlivky“,*
- *„dostala si naozaj dobré komentáre, pekne si ich aj zapracovala, takže si si projekt o dosť vylepšila“,*
- *„dostal si komentáre od spolužiačky, snažil si sa ich zapracovať, väčšina sa aj podarila“,*
- *„opravil si chyby, ktoré ti radili v komentároch, projekt je pekný, plne funkčný“.*

Našli sa aj žiaci, ktorí „nezapracovali komentáre“, boli tam napríklad takéto hodnotenia:

- *„nezapracoval si pripomienky od spolužiaka, nechal si pôvodný projekt“,*
- *„spolužiak ti vychytal naozaj všetky chyby v komentároch a ty si nič z toho neopravil“,*
- *„dostala si veľmi dobré komentáre od spolužiačka, ktoré si nezapracovala“,*
- *„málo opravené oproti prvému odovzdaniu, fakt len minimálne a tých chýb tam ešte zostalo celkom dosť“,*
- *„projekt obsahuje chyby, ktoré si mohla opraviť, aspoň niektoré. mala si tam napísané aj čo máš opraviť a poradenie, že ako“.*

Do kategórie „žiak pravdepodobne kvôli zlému komentáru nevedel zapracovať pripomienky“, sme zaradili:

- *„keďže spolužiak nič neodporučil, nechala si pôvodný projekt“,*
- *„projekt bol z veľkej časti funkčný už pri prvom odovzdaní, avšak nie úplne správne. nepáči sa mi to, ako ťa okomentovala spolužiačka, tak som si to nepredstavovala a asi si bola z toho aj ty zmätená“,*
- *„projekt bol takmer plne funkčný už pri prvom odovzdaní. spolužiačka ťa však mohla*

upozorniť na viac chýb, ktoré si nezapracovala“.

Do poslednej kategórie sme zaradili hodnotenia, ktoré hovorili o tom, že „žiak nemal čo zapracovávať“, pretože mal dobrý projekt. To znamená, že žiak mohol pokojne ponechať viac menej prvú verziu projektu aj ako finálnu:

- *„perfektné, takže už nebolo čo upravovať, preto sa vrátil taký istý“*,
- *„projekt bol plne funkčný už pri prvom odovzdaní. dostala si iba pozitívne komentáre“*.

V programátorskej praxi by mal byť každý kód, ktorý bude podrobený code review, funkčný a spustiteľný. Nie každý žiacky projekt bol pri prvom odovzdávaní spustiteľný a plne funkčný.

Sumárny počet hodnotení rozdelených do kategórií sa nachádza v tabuľke (Tab. 2). Sčítavame len počet relevantných hodnotení súvisiacich s porovnávaním pôvodného projektu a projektu, ktorý žiak mal opraviť na základe spolužiakových komentárov, resp. aj zo samostatného testovania svojho projektu. Preto sú sumárne počty odlišné od počtu účastníkov.

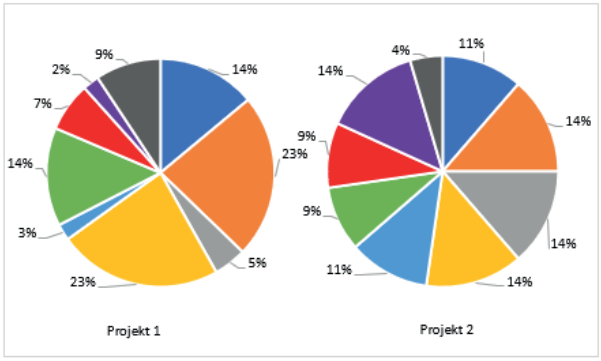
Tab. 2: Tabuľka hodnotenia zapracovaných komentárov do projektu.

	Žiak zapracoval komentáre		Žiak nezapracoval komentáre		Žiak pravdepodobne kvôli zlému komentáru nevedel zapracovať pripomienky		Žiak nemal čo zapracovávať, pretože mal dobrý projekt	
	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 1	Projekt 2
3A1	3	3	2	2	2	1	3	0
3A2	7	1	2	3	0	0	2	0
3B1	2	2	6	1	0	1	3	0
3B2	3	3	4	4	2	0	2	0
SPOLU	15	9	14	10	4	2	10	0

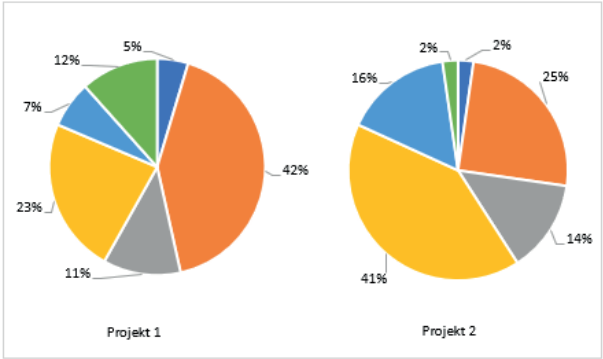
Zo spätnej väzby vyplýva niekoľko zaujímavých zistení (Tab. 2). To, že druhý projekt bol náročnejší naznačuje aj to, že veľa žiakov malo v komentároch niečo, čo mohli zapracovať vo finálnej verzii. Pri druhom projekte mierne klesol počet zle zapracovaných komentárov a taktiež aj nezapracovaných komentárov. Oproti prvému projektu menej ľudí zapracovalo čo najviac komentárov od spolužiaka. Táto hodnota klesla z pätnástich projektov na deväť.

Dôvodov, prečo žiak nezapracoval komentáre mohlo byť viacero. Žiak buď nevedel ako má zapracovať komentáre; dostal komentáre, ktoré pokladal za nepodstatné; žiak nechápal, čo spolužiak myslel svojím komentárom; žiak bol spokojný s prvou verziou a nechcel na projekte už nič meniť, a pod.

V dotazníku sme sa pýtali žiakov na to, či žiakovi pomohli komentáre od spolužiaka pri dokončovaní projektu. Odpovede žiakov boli dosť odlišné aj v rámci toho istého dotazníka. Pri prvom projekte (Obr. 6 vľavo) viac ako polovica žiakov deklarovala pozitívnu skúsenosť s komentármi od spolužiaka a iba 9% žiakov odpovedalo, že im komentáre nepomohli. Pri druhom projekte (Obr. 6 vpravo) boli odpovede žiakov takmer úplne rovnomerne rozdistribuované do všetkých kategórií. Zrejme vzhľadom k náročnosti projektu stúplo percento žiakov, ktorí nedokázali spolužiakov projekt zrozumiteľne a zmysluplne okomentovať na 23%. Avšak komentárov ohodnotených ako „dobré“ bolo viac ako tých negatívnych – 39%.



Obr. 6: Odpovede žiakov na otázku „Pomohli Ti komentáre od spolužiaka pri dokončovaní projektu?“ ■ Áno, dostal/a som dobré komentáre, ktoré mi veľmi pomohli. ■ Áno, dostal/a som dobré komentáre, ktoré mi pomohli a dokonca ma potešilo, že mi projekt pochválil. ■ Dostal/a som dobré komentáre, ale nevedel/a som ich zapracovať do projektu. ■ Niektoré komentáre mi pomohli, niektoré nie. ■ Projekt mi fungoval, spolužiak nenašiel žiadne chyby, takže som nedostal/a žiadne komentáre, ktoré by som mohol/a zapracovať. ■ Spolužiak nenašiel žiadne chyby, ale potešilo ma, že mi projekt pochválil. ■ Nie, nepomohli mi, lebo som im nerozumel/a a nevedel/a som ich zapracovať do projektu. ■ Nie, dostal/a som nezmyselné komentáre, ktoré mi vôbec nepomohli. ■ Iné.



Obr. 7: Odpovede žiakov na otázku „Čím boli podľa teba prínosné komentáre, ktoré si dostal/a od spolužiaka?“ ■ Pomohli mi lepšie pochopiť zadanie projektu. ■ Pomohli mi opraviť nedostatky, ktoré som si nevšimol/a pred prvým odovzdaním. ■ Pomohli mi opraviť chyby, ktoré som nevedel/a vyriešiť pred prvým odovzdaním. ■ Nijako mi nepomohli. ■ Žiadne relevantné som nedostal/a. ■ Iné.

Pri oboch projektoch žiaci videli prínos komentárov (Obr. 7) od spolužiakov hlavne v tom, že im pomohli opraviť chyby, ktoré si nevšimli alebo nevedeli opraviť pri prvom odovzdaní, prípadne im pomohli inak (58% pri prvom a 41% pri druhom projekte). Náročnosť druhého projektu zrejme ovplyvnila odpovede aj pri tejto otázke – podiel žiakov, ktorí uviedli, že im komentáre nijako nepomohli, stúpol z 23% na 41%.

7 Záver

Pomocou code review na hodinách programovania, sa snažíme pomôcť žiakom preniknúť do tvorby programového kódu, naučiť sa rozpoznať chyby programu, pochopiť rôzne prístupy k riešeniu rovnakého problému.

Code review sme so žiakmi skúšali na dvoch projektoch s odstupom niekoľkých mesiacov. Prvý projekt bol pomerne jednoduchý a žiaci dosiahli veľmi uspokojivé výsledky. Druhý projekt bol oveľa náročnejší z dôvodu nových, komplexnejších koncepcií programovania, ktoré museli žiaci zmysluplne kombinovať a naprogramovať tak komplexné zadanie projektu. Výsledky druhého projektu však lepšie rozdelili žiakov do skupín podľa znalosti programovania. Celkovo sa však aj tento projekt ukázal ako dobre vypracovaný u mnohých žiakov.

Zo začiatku žiaci neboli z aktivity code review nadšení. Bolo to považované za prácu navyše. Pri komentovaní projektov museli spolužiaci pochopiť program, ktorý obsahoval iný kód a funkcie, než ich vlastný projekt. Považovali to za komplikované a časovo náročné. Niekedy uvádzali ako problém veľké množstvo chýb, ktoré našli a museli sa k nim vyjadriť tak, aby autorovi kódu neposlali priamo preprogramovaný projekt. Mali ho len nasmerovať ku tomu, aby to zvládol opraviť sám.

Veríme tomu, že podrobná analýza spätnej väzby, ktorú sme poskytli žiakom pri každej fáze projektu, ukazuje, že táto aktivita mala pozitívny vplyv na rozvoj algoritmického myslenia žiakov.

Viacerí študenti si boli vedomí užitočnosti takéhoto spôsobu učenia sa a povedali napríklad, že ich to prinútilo, aby sa zamysleli nad problémami programovania, s ktorými sa vo svojom projekte nestretli. Okrem toho mnohí žiaci ocenili aj spätnú väzbu, ktorá im pomohla presne pochopiť, čo urobili v projekte dobre a čo bolo zlé, a tým dostali šancu zlepšiť sa v budúcnosti.

Úlohou žiakov bolo naprogramovať (takmer) finálny projekt už pri prvom odovzdaní. Z nášho pohľadu však vo väčšine prípadov žiaci odovzdali omnoho lepší projekt po oprave chýb, ktoré našiel spolužiak, prípadne keď sa žiak sám pozrel na projekt s odstupom času. Podľa pozorovania z hodín môžeme konštatovať, že žiaci sa určite niečo naučili študovaním cudzieho a vlastného kódu. Predišlo sa tak mnohým chybám, či už syntaktickým alebo logickým. Pred použitím code review žiaci často žiadali o pomoc pri hľadaní chyby v programe. Tieto aktivity ich naučili určitú sebestačnosť pri čítaní kódu.

Na základe výsledkov nášho výskumu si dovolíme tvrdiť, že code review možno využiť pri výučbe už na strednej škole. Žiaci sa naučili čítať a chápať cudzie programové kódy, nie len ich vlastné. Algoritmické myslenie žiakov sa obohacuje aj tým, že žiak hľadá alternatívne riešenia alebo nájde alternatívne riešenie na problém v cudzom kóde.

I keď bola táto aktivita pomerne časovo náročná pre učiteľa, istým spôsobom aj pre žiakov, myslím si, že mala zmysel a určite stojí za to ju znovu vyskúšať, možno aj v nižších ročníkoch pri tvorbe programátorských projektov.

Poďakovanie

Chcela by som poďakovať mojej školiteľke, Zuzane Kubincovej, ktorá mi pomohla realizovať výskum a dohliadala na výskum realizovaný v rámci mojej diplomovej práce.

Literatúra

[1] KUBINCOVÁ, Z. and M. Homola, "Code review in computer science courses: Take one," in International Conference on Web-Based Learning, pp. 125–135, Springer, 2017.

[2] FAGAN, Michael. Design and code inspections to reduce errors in program development. In: Software pioneers. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. p. 575-607.

[3] Phabricator Project History, Phabricator, [online] [2-3-2019]. Dostupné na: <https://secure.phabricator.com/book/phabflavor/article/project_history/>

[4] How We Do Code Review, blog Microsoft, [online] [2-3-2019] . Dostupné na: <https://blogs.msdn.microsoft.com/vsappcenter/how-the-visual-studio-mobile-center-team-does-code-review/>

[5] BOEHM, B. W. et al., Software engineering economics. Prentice-hall Englewood Cliffs (NJ), 1981.

[6] WIEGERS, K. E., Peer reviews in software: A practical guide. Addison-Wesley Boston, 2002.

[7] Tseng, S.C. and Tsai, C.C. On-line peer assessment and the role of the peer feedback: A study of high school computer course. *Computers & Education*, 49(4), pp.1161-1174, 2007.

[8] Topping, K.J. Peer assessment between students in colleges and universities, *Review of Educational Research*, 68, pp. 249-276, 1998.
[9] TRYTTEN, Deborah A. A design for team peer code review. In: ACM SIGCSE Bulletin. ACM, 2005. p. 455-459.
[10] TANG, Mason. Caesar: a social code review tool for programming education. 2011. PhD Thesis. Massachusetts Institute of Technology.
[11] Kubincová, Z. and Csicsolová, I. Code Review in High School Programming. In 17th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET), pp. 1-4, IEEE, 2018.
[12] Csicsolová, I., Kubincová, Z. Code review v programovaní na strednej škole. In Sborník konference DidInfo 2018, pp. 71-76, Technická univerzita v Liberci, 2018.
[13] Csicsolová, I., Kubincová, Z. Nájdeš chybu v mojom programe?. Prijaté na DidInfo 2019.
[14] POZOR NA CHYBY V KÓDE - CODE REVIEW, blog UI42, [online] [2-3-2019]. Dostupné na: <https://www.ui42.sk/blog/pozor-na-chyby-v-kode-code-review>

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, pp. 206–209
ISBN 978-8081470936, © 2019 Samuel Spišák

Starčekova záhradka - prostredie na precvičovanie FOR cyklu v Pythone

Samuel Spišák
Školiteľ: Monika Tomcsányiová

FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt

V našom príspevku predstavíme prostredie Starčekova záhradka, ktoré obsahuje sériu gradovaných úloh na precvičovanie FOR cyklu v Pythone. Úlohy sú rozdelené do niekoľkých úrovní náročnosti a zakladajú sa na riadení postavy starčeka po záhradke pomocou pripravených príkazov na pohyb. Úlohou žiakov je čo najefektívnejšie pooberať jablká zo stromov, pričom majú využiť práve príkaz FOR cyklu. Prostredie žiakom poskytuje spätnú väzbu tým, že im oznamuje, či je ich riešenie najefektívnejšie. V príspevku ďalej poukážeme na problematiku vyučovania cyklov, z ktorej vychádza aj motivácia k použitiu precvičovacieho prostredia, akým je Starčekova záhradka.

Kľúčové slová: Vyučovanie programovania, Python, FOR cyklus

1 Úvod

Vyučovanie programovania prechádza v súčasnej dobe postupnými zmenami. Už na prvom stupni základnej školy vzniká snaha rozvíjať algoritmické myslenie žiakov pomocou hier a malých edukačných prostredí a vyvíjajú sa aj rôzne aktivity určené deťom v škôlke. Informatika na slovenských školách dostáva väčší priestor. Súčasne s týmto posunom vzniká aj dopyt po nových prístupoch k vyučovaniu a učitelia sa snažia rôznymi spôsobmi priblížiť žiakom princípy programovania. V našej práci sa venujeme jednému z týchto princípov – cyklu, konkrétne FOR cyklu v jazyku Python. S cyklami sa žiaci mohli stretnúť v programovacích hrách, resp. edukačných prostrediach na rozvoj programovacích schopností, ako napríklad [1], no aj v jazykoch Logo a Scratch. V programovacom jazyku Python však prichádzajú do kontaktu s pokročilou syntaxou a tak pre nich konštrukcia zápisu a fungovania FOR cyklu nemusí byť zrejmá a ľahko pochopiteľná. Preto sme sa rozhodli navrhnúť prostredie Starčekova záhradka a venovať pozornosť precvičovaniu FOR cyklu.

2 Návrh prostredia

Pri návrhu prostredia tak, aby bolo pre žiakov zrozumiteľné, sme najprv preskúmali, čo žiaci z programovania potrebujú, resp. budú potrebovať vedieť a aké aktivity pre nich navrhneme, aby ich viedli k osvojeniu si FOR cyklu.

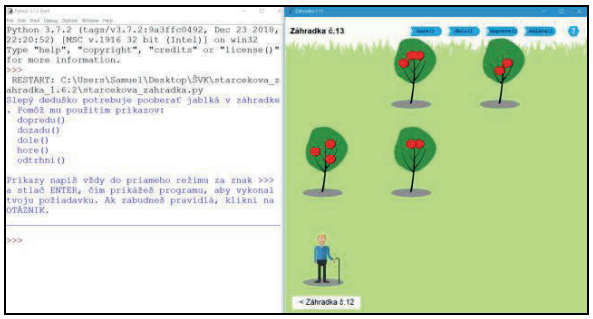
Koncept automatizácie, ku ktorému cykly patria, je silne prepojený s abstrakciou, čo je zároveň jedna z dôležitých schopností, ktoré si žiaci na informatike osvojujú a je oproti iným predmetom pomerne jedinečná. Krok od konkrétneho riešenia jednoduchého problému k všeobecnému riešeniu podobných problémov je súčasťou programovania ako takého, pozri [2]. Príkladom môže byť kreslenie štvorca, čo je väčšinou jedna z prvých aktivít, s ktorou sa žiaci stretávajú pri programovaní v Scratch alebo v Imagine Logo. Na túto triviálnu úlohu neskôr nadväzujú ďalšie zadania, v ktorých majú žiaci vytvoriť procedúru, ktorá nakreslí pravidelný n-uholník, pričom parametrom procedúry bude počet strán. K úspešnému riešeniu takto zadanej úlohy žiaci potrebujú zovšeobecniť procedúru použitím FOR cyklu s využitím meniaceho sa parametra indexu (ďalej len index). Táto úloha však vyžaduje veľkú mieru abstrakcie a je vhodné ju precvičovať až neskôr.

V našich aktivitách v prostredí Starčekova záhradka nebudeme postavou kresliť, ale budeme ňou pohybovať po ploche. Ide o podobný prístup, s akým sa žiaci stretli pri korytnačej grafike, ktorú poznajú z predchádzajúcich ročníkov.

V nasledujúcej časti sa zaoberáme tým, čo sme sa rozhodli do prostredia zahrnúť, aby sme žiakovi poskytli jednoduché a intuitívne precvičovacie prostredie a aj tým, prečo sme sa rozhodli navrhnúť práve prostredie Starčekova záhradka.

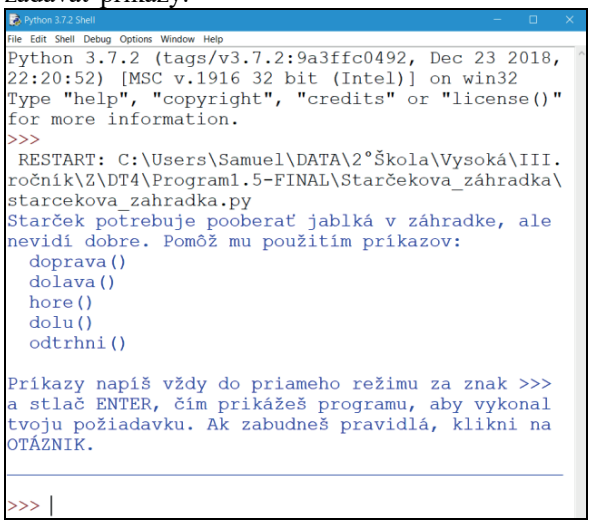
2.1 Viditeľná a skrytá časť prostredia

Naše aktivity v programe Starčekova záhradka spúšťa žiak priamo z programovacieho režimu v prostredí IDLE. Po spustení programu sa zobrazia dve okná: okno Shell, priameho programovacieho režimu a okno kresliacej plochy, kde už žiaka čaká prvá úloha. Obe okná sme sa snažili umiestniť na celú obrazovku, aby sa neprekrývali, avšak operačný systém môže spôsobiť aj ich iné umiestnenie. Učiteľ teda musí prvýkrát okná umiestniť manuálne, ideálne tak, aby každé zakrývalo polovicu obrazovky. Tieto a aj ďalšie pokyny uvádzame aj v príručke pre učiteľa, ktorá je prílohou k prostrediu.



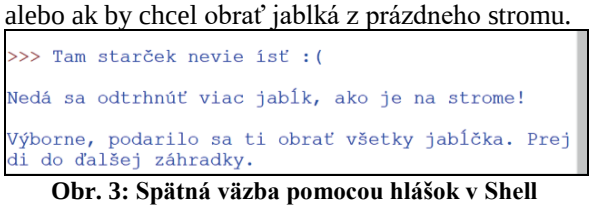
Obr. 1: Celá obrazovka

V ľavej časti obrazovky je priamy programovací režim Shell, do neho program vypíše pravidlá a zoznam príkazov, ktoré sú v prostredí predpripravené na riadenie starčeka a ktoré sú nevyhnutné pre danú úlohu. Do tejto časti žiak bude zadávať príkazy.



Obr. 2: Okno Shell

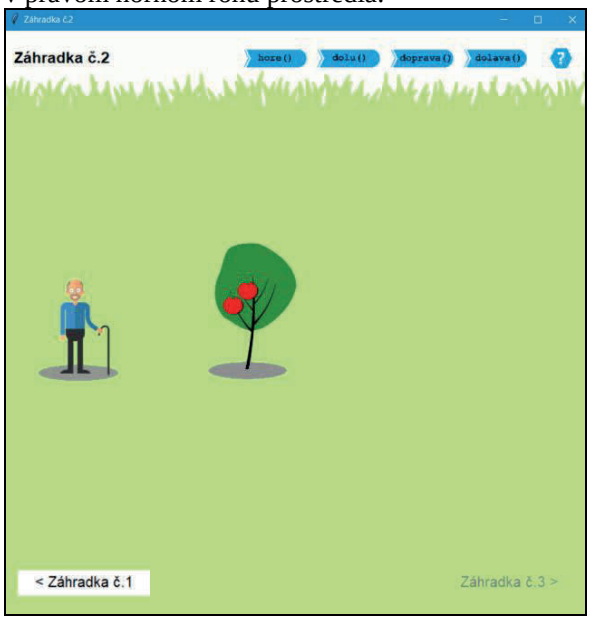
Výhodou zadávania príkazov do priameho režimu je najmä autenticita a podobnosť s bežným programovaním v Pythone. Na druhej strane, súčasťou nášho prostredia je upozorňovanie na chyby pri riešení úlohy. Ak sa žiak bude snažiť riadiť postavu starčeka mimo plochu, upozorní ho na to nami pripravená chybová správa, ktorá mu pomôže presnejšie určiť, v čom urobil chybu. Podobne je to aj vtedy, ak žiak vytvorí príkazy, ktorými by chcel obrať zo stromu príliš veľa jabĺk, alebo ak by chcel obrať jablká z prázdneho stromu.



Obr. 3: Spätná väzba pomocou hlášok v Shell

Naše prostredie však nereaguje ak žiak zadal nesprávny príkaz, čiže ak žiak spraví syntaktickú chybu. Tento druh chyby vyhodnotí samotné prostredie IDLE a žiakovi vypíše bežnú chybovú správu. Tá síce môže byť žiakovi menej zrozumiteľná, ale je dôležité, aby sa žiak naučil takéto správy prostredia jazyka Python čítať, analyzovať a reagovať na ne. Zároveň je to možnosť, kedy sa žiak musí viac zamyslieť a preskúmať svoj príkaz, aby našiel chybu, čo je pri bežnom programovaní veľmi častá situácia. Prostredie poskytuje žiakovi ďalšiu spätnú väzbu vo forme pochvaly za správne vyriešenie danej úlohy. Tá sa žiakovi zobrazí, keď pozbiera všetky jablká. Spolu s ňou sa žiakovi ukáže informácia, či je jeho riešenie najlepšie, alebo by ho mohol ešte skrátiť. Program následne žiaka povzbudí, aby prešiel k ďalšej aktivite.

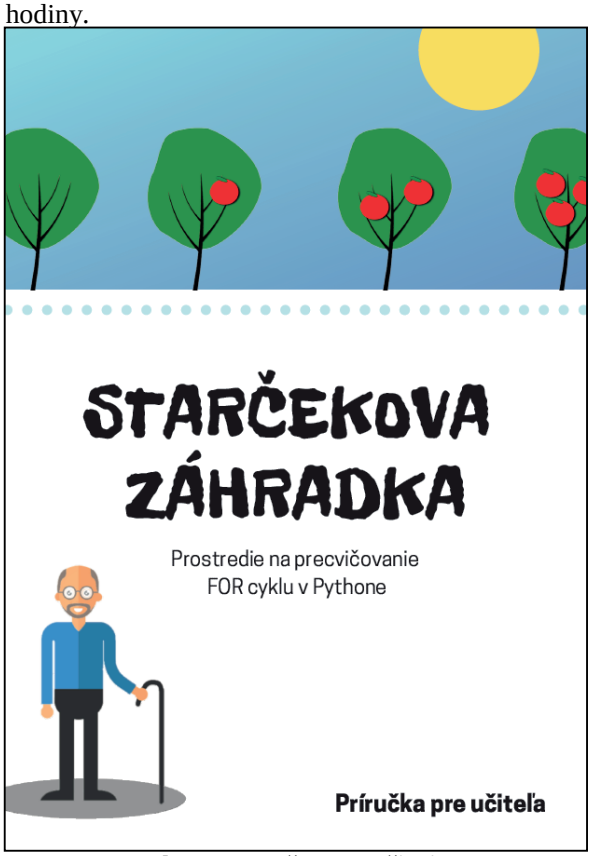
Druhú časť prostredia tvorí grafická plocha. V nej sa zobrazuje záhradka so stromami a starček. Okrem toho je zobrazený názov záhradky, resp. jej číslo, ďalej tlačidlá na návrat do predošlej záhradky, na reštart súčasnej a na prechod do ďalšej, pričom do ďalšej záhradky vie žiak prejsť až po splnení úlohy, dovtedy tlačidlo nie je aktívne. Príkazy, ktoré má žiak k dispozícii sa stále zobrazujú v hornej časti alebo si ich môže dať znovu zobraziť aj do Shell tým, že stlačí tlačidlo s obrázkom otáznika v pravom hornom rohu prostredia.



Obr. 4: Ukážka záhradky

Do prostredí určených na edukačné účely je zvykom implementovať skryté možnosti, ktoré, z rôznych dôvodov, nie sú viditeľné pre žiakov, no sú prístupné učiteľovi. Ak učiteľ klikne pravým tlačidlom myši na otáznik v rohu obrazovky, môže prejsť do ďalšej záhradky bez vyriešenia úlohy. To mu dáva možnosť dopredu si prezrieť všetky záhradky, resp. nájsť záhradku, ktorú pre žiakov práve navrhol a vyskúšať si jej riešenie. Do nášho programu sme implementovali aj režim ovládania starčeka šípkami, ktorý sa zapne po stlačení klávesu F12.

Zadania jednotlivých úloh sa nachádzajú v samostatných textových súboroch. V príručke pre učiteľa uvádzame pokyny, ako si učiteľ môže vytvoriť vlastné zadania a zároveň stručnú charakteristiku prostredia a návrhy pre vedenie hodiny.



Obr. 5: Príručka pre učiteľa

2.2 Príprava a tvorba úloh

Podstatnou časťou aktivít sú samotné úlohy. Pri ich návrhu sme sa snažili o gradujúcu postupnosť a v úlohách sa venujeme tomu, prečo je efektívne využívať FOR cyklus. Druhá časť zadaní je pripravená tak, aby žiaci využívali index FOR cyklu. Túto hodnotu môžeme pri riešení úloh využiť, ak povolíme zjednodušené zadávanie príkazov. Žiakom teda ukážeme možnosť zadávania príkazov s parametrom, napríklad `odtrhni(3)` a vysvetlíme, že táto funkcia s číslom používa FOR cyklus sama vo vnútri programu. Za týchto okolností môžeme využiť index, napríklad v príkaze `odtrhni(i)`. Úlohy tohto typu vyžadujú vedomosti o premenných, keďže index je premenná a po každom opakovaní sa jej hodnota zvyšuje (resp. znižuje). Vychádzajúc zo školských učebníc jazyka Python [4], [5] a Štátneho vzdelávacieho programu [6] môžeme povedať, že tento predpoklad žiaci spĺňajú, keďže učivo premenných predchádza učivu opakovaní a cyklov. Z týchto zdrojov tiež vyplýva, že prostredie Starčekova záhradka bude vyhovujúce pre deviaty ročník základnej školy, alebo prvý ročník strednej školy.

Hromkovič [3] sa vo svojom článku spolu s kolegami zaoberá otázkou, kedy je vhodné uviesť žiaka do využívania premennej cyklu. Uvádzajú, že najmä na prvom stupni je vhodné využívať prostredia, v ktorých je možné vyhnúť sa premennej cyklu, ako je tomu napríklad v jazyku Imagine Logo, kde sa používa príkaz `opakuj`. Títo autori odporúčajú na strednej škole najprv používať Python rozšírený o procedúru cyklu, ktorá nahrádza FOR cyklus s premennou, podobnú tej logovskej. Pokračujú že je vhodné s možnosťami cyklov oboznámiť žiakov postupne, špirálovitým spôsobom vyučovania. Náročný na FOR cykle, podľa autorov článku, nie je samotný princíp, ale to, ako využiť FOR cyklus napríklad na vypočítanie súčtu dvoch čísel. (V tomto konkrétnom príklade by napríklad funkcia `sucet(a,b)` mala `a`-krát pripočítať číslo `b` a vrátiť výsledok. Žiak by si mal počas toho uvedomiť, že potrebuje pomocnú premennú, do ktorej bude číslo `b` pripočítavať.) Z tohto dôvodu sme v neskorších úlohách zvolili usporiadanie jabĺčok, pri ktorom sa žiak potrebuje zamyslieť nad matematickou súvislosťou ich počtov na stromoch. V príručke pre učiteľa odporúčame, aby žiaci v týchto úlohách používali aj zošit a zapisovali si počty jabĺk na stromoch. Naopak v prvých úlohách cykly pracujú s rovnakým počtom iterácií (opakovaní príkazu), čo vedie u žiakov k automatizácii a rýchlemu osvojeniu FOR cyklu.

Napriek tomu, že Hromkovič a ďalší venujú zjednodušenému FOR cyklu (bez viditeľnej premennej) celú podkapitolu [3], rozhodli sme sa, v našom prostredí využívať bežné volanie FOR cyklu s premennou. Je to jednak z dôvodu, že žiaci už prešli učivom premenných, ale najmä preto, že cieľom tohto prostredia je dať žiakom možnosť precvičiť si klasický príkaz FOR cyklu.

2.3 Overovanie aktivít v praxi

Ďalšou fázou vývoja aktivít bude ich overovanie na hodinách informatiky. Podľa počtu úloh budeme venovať tomuto prostrediu dve alebo tri vyučovacie hodiny. Počas vyučovania budeme pozorovať prácu žiakov. Overovanie zhodnotíme a ak to bude potrebné, vykonáme zmeny na úlohách a prostredí.

Na hodinách budeme pozorovať:

- funkčnosť prostredia
- reakcie žiakov na vzhľad prostredia
- postup žiakov v jednotlivých úlohách
- najčastejšie otázky žiakov
- náročnosť a zrozumiteľnosť úloh
- čas strávený prípravou počítačov
- celkový chod vyučovacej hodiny

3 Záver

Prostredie Starčekova záhradka môže byť dobrým nástrojom pre učiteľa na hodinách informatiky. Žiaci si pomocou neho môžu precvičiť princíp FOR cyklu, zároveň môže slúžiť ako prechodné prostredie medzi logovským programovaním a jazykom Python. Jeho výhoda je aj v možnosti jednoduchej tvorby vlastných zadaní učiteľa a v prehľadnom vizuále prostredia.

Nasledujúcimi krokmi v našej práci bude overovanie aktivít v praxi a implementácia zmien, ktoré môžu viesť k väčšej zrozumiteľnosti zadaní úloh, alebo tvorbe ďalších úloh odpovedajúcich požiadavkám.

Programovací jazyk Python nám poskytuje aj ďalšie možnosti, ako sú napríklad využitie vetvenia, či vloženie možnosti kreslenia do plochy. V budúcnosti sa budeme zaoberať týmito možnosťami, ktoré by mohli starčeka využiť aj v rámci precvičovania iných programátorských konštrukcií.

Literatúra

[1] https://code.org

[2] J. Hromkovič, T. Kohn, D. Komm, and G. Serafini. Examples of Algorithmic Thinking in Programming Education, *Olympiads in Informatics*, Vol. 10, 111–124. 2016.

[3] J. Hromkovič, T. Kohn, D. Komm, and G. Serafini. 2016. Combining the Power of Python with the Simplicity of Logo for a Sustainable Computer Science Education, pages 155–166. Springer International Publishing, Cham, 2016.

[4] A. Blaho, Ľ. Salanci, V. Šimandl, 2018 Základy programování v jazyce Python pro střední školy. (pdf)

[5] P. Kučera, 2016 Programujeme v Pythone, učebnica informatiky pre stredné školy, ISBN 978-80-972320.

[6] Inovovaný Štátny vzdelávací program pre predmet informatika - gymnázium s osemročným vzdelávacím programom. 2015. (pdf)

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 210
ISBN 978-8081470936, © 2019 Karolína Šromeková

Hĺbka a šírka optimálnych fyzikálnych vedomostí gymnaziálneho učiteľa fyziky (rozšírený abstrakt)

Karolína Šromeková[1*]

Školiteľ: Peter Demkanin[1†]

[1]Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

V súčasnosti sa nielen na Slovensku kladie veľký dôraz na to, čo žiaci a študenti základných a stredných škôl vedia – na ich vedomosti a zručnosti. Príkladmi sú samotné testovania Národného ústavu certifikovaných meraní ako Testovanie 5, Testovanie 9 či maturita alebo medzinárodné testovania ako PISA, TIMMS a ďalšie.[NÚCEM, 2019] Taktiež sú štátom jasne dané požiadavky na žiakov základných a stredných škôl vo forme napríklad vzdelávacích štandardov alebo cieľových požiadaviek na maturitné skúšky.

Požiadavky na učiteľov na Slovenku stanovuje školský zákon len vo forme všeobecných kvalifikačných predpokladov pedagogických zamestnancov a možností ich kontinuálneho vzdelávania.[Národná rada SR, 2009] Samotné vzdelávanie učiteľov je už čisto na univerzitách a ich akreditovaných vzdelávacích programoch.

V našej práci sme hľadali odpoveď na otázku aká by mala byť optimálna hĺbka a šírka fyzikálnych vedomostí gymnaziálneho učiteľa fyziky a to tromi cestami.

V prvom rade sme sa pozreli na to, čo sa budúci učitelia z fyziky na vysokej škole učia. Konkrétne sme brali do úvahy študijný program učiteľstva fyziky na FMFI UK. Tieto požiadavky na učiteľa sme porovnali s minimálnymi vedomosťami, ktoré bude musieť učiteľ využiť v praxi, a to so vzdelávacími štandardmi a maturitnými požiadavkami. Výsledkom sú presne stanovené nepokryté časti tém z obsahového vzdelávacieho štandardu a maturitných požiadaviek. Taktiež sme určili rozsah pokrytia ako sú budúci učitelia pripravení na napĺňanie výkonového štandardu.

Ďalej sme zisťovali, akým spôsobom premýšľajú súčasní a budúci učitelia fyziky pri riešení fyzikálnych úloh. Použili sme test pozostávajúci zo šiestich otvorených úloh, pomocou ktorého sme sa snažili identifikovať, kde pri riešení nastávajú chyby a problémy, ako pri riešení úloh učitelia uvažujú a aká je ich fyzikálna intuícia. Kvôli malej vzorke nie je možné výsledky tejto časti zovšeobecňovať na všetkých učiteľov fyziky.

Poslednou zvolenou cestou bolo zisťovanie názorov na to, čo by mal učiteľ fyziky z fyziky vedieť. Opýtali sme sa zámerne vybranej vzorky, a to študentov 1. ročníka bakalárskeho študijného programu fyzika na FMFI UK a vedúcich občianskeho združenia Trojsten, ktorí organizujú aj fyzikálne súťaže. Na zbieranie dát bol použitý dotazník, v ktorom sa nachádzali dichotomické otázky, v ktorých sa vždy vyžadovala jedna z odpovedí–súhlasím/nesúhlasím– a boli zamerané na konkrétne vedomosti učiteľa. Ďalej boli v dotazníku položené doplňujúce otvorené otázky. Z odpovedí na otvorené otázky bolo cítiť najmä odkaz, že učiteľ má fyzike rozumieť, malo by ho zaujímať poznávanie sveta, mal by mať a vedieť používať fyzikálnu intuíciu. Tiež by mal vedieť pracovať s literatúrou, porozumieť jej a následne zistený obsah vhodne predať žiakom. Prekvapivým výsledkom boli od mnohých respondentov pomerne silné nároky na vedomosti učiteľov z oblasti kvantovej fyziky.

Výsledky našej práce vyústia v pomenovaní konkrétnych silných a slabých stránok a návrhoch na úpravu predmetov študijného odboru učiteľstva fyziky na FMFI UK. Výsledky budú spracované vo forme diplomovej práce.

Literatúra

[NÚCEM, 2019] NÚCEM (2010-2019). Informácie o meraniach.

[Národná rada SR, 2009] Národná rada SR (2009). Zákon č. 317/2009 z.z. o pedagogických zamestnancoch a odborných zamestnancoch a o zmene a doplnení niektorých zákonov.

*sromekova1@uniba.sk

†peter.demkanin@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 211
ISBN 978-8081470936, © 2019 Mária Stankovičová

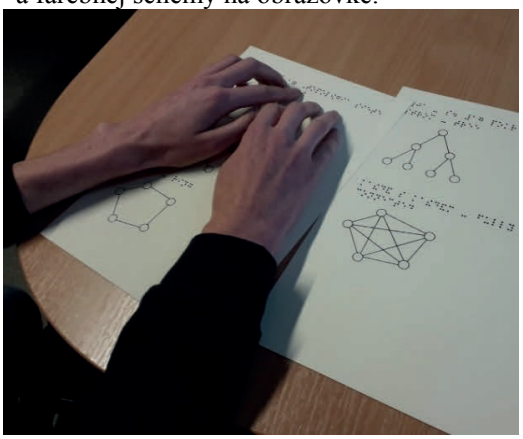
Informatika bez bariér (rozšírený abstrakt)

Mária Stankovičová[1]*
Školiteľ: Ľudmila Jašková[2‡]

[1] Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami UK, Šafárikovo nám. 6, 814 99 Bratislava
[2]Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

V príspevku predstavujeme výskum zameraný na špecifické potreby študentov so zrakovým postihnutím pri štúdiu informatiky [Stankovičová, M., 2019] . Zrakové postihnutie výrazne ovplyvňuje spôsob získavania informácií a vytváranie predstáv o okolitom svete. Zaužívané formy a spôsoby podávania informácií na vyučovaní môžu predstavovať určitú bariéru pre študenta so zrakovým postihnutím. V kľúčových predmetoch odboru informatika reprezentujú okrem textov veľkú časť informácií aj obrázky a grafické schémy. Na mnohých kurzoch študenti používajú rôzny softvér, a teda je dôležité zaoberať sa prístupnosťou vybraného softvéru pre asistenčné technológie (AT). Bežne používané AT pre študentov so zrakovým postihnutím:

- **čítač obrazovky** – program, ktorý cez hlasový výstup poskytuje textové informácie z obrazovky,
- **braillovská tlačiareň** – umožňuje tlač textov v Braillovom písme a reliéfnej grafiky (Obr. 1),
- **zväčšovač obrazovky** – program, ktorý umožňuje prispôsobenie veľkosti písma a farebnej schémy na obrazovke.



Obr. 1: Nevidiaci študent číta reliéfnu grafiku.

Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami poskytuje rôzne služby a poradenstvo pre študentov a pedagógov za účelom identifikovať potenciálne bariéry a zlepšiť študijné podmienky. V našom dizertačnom výskume použijeme kvalitatívnu stratégiu prípadovej štúdie, aby sme hlbšie porozumeli špecifickým potrebám študentov informatiky so zrakovým postihnutím. Výskumnú vzorku tvoria študenti informatiky s rôznymi typmi zrakového postihnutia (nevidiaci, slabozrakí). Rôznorodosť ich zrakového postihnutia má odlišný vplyv na spôsob štúdia, požiadavky na spracovanie literatúry a používaný softvér. Okrem toho používajú rôzne asistenčné technológie.

V rámci úvodnej etapy výskumu sme sa zamerali na sumarizáciu informácií o vybratých študentoch a ich sledovanie počas vyučovania. Vytypovali sme problémové situácie, ktoré budeme hlbšie skúmať v ďalších etapách výskumu.

Súčasne sme sa zaoberali literatúrou zameranou na oblasť vzdelávania študentov so zrakovým postihnutím na úrovni vysokoškolského štúdia v odbore informatika. Veľká pozornosť je venovaná prieskumom prístupnosti jednotlivých nástrojov v rôznych programovacích prostrediach. Štúdie z oblasti didaktiky informatiky pre vysokoškolský stupeň sú venované procesu učenia sa programovať.

Pre zhromažďovanie relevantných údajov použijeme rozhovory a priame pozorovania účastníkov. Rozhovory chceme zamerať na prístupnosť učebných materiálov a softvéru, možnosti a limity používaných asistenčných technológií a vplyv zrakového postihnutia na vznik prípadných miskoncepcií pri osvojovaní učiva. Za dôležité považujeme aj rozhovory s učiteľmi, ktorí vedú povinné kurzy. Otázky zameriame na metodológiu, využívanie ponúkanej podpory zo strany CPŠ, nevyhnutné zmeny v metodike vyučovania, ktoré si vyžiadala prítomnosť študentov so zrakovým postihnutím.

Priame pozorovania budú prebiehať v čase cvičení alebo kurzov. Po pozorovaniach účastníci vyplnia štruktúrované dotazníky pre zvýšenie spoľahlivosti záznamov získaných z pozorovania.

Literatúra

[Stankovičová, M., 2019] Stankovičová, M., Informatika bez bariér, in DIDINFO 2019. Banská Bystrica, UMB, ISSN 2454-051X.

* maria.stankovicova@rec.uniba.sk
‡ ludmila.jaskova@fmph.uniba.sk

Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2019, p. 212
ISBN 978-8081470936, © 2019 Lucia Budinská

Ako študenti FMFI riešili súťaž iBobor (rozšírený abstrakt)

Lucia Budinská[1*]

Školiteľ: Monika Tomcsányiová[1†]

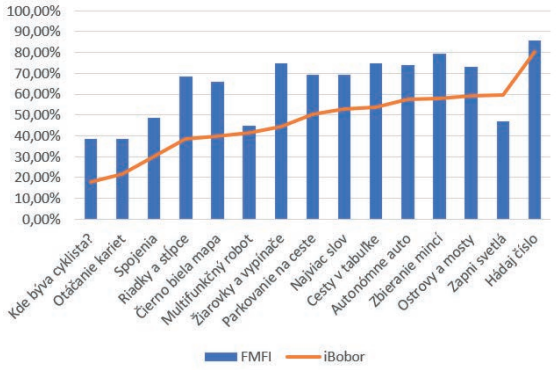
[1]Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Súťaž iBobor [1] je medzinárodnou informatickou súťažou určenou pre žiakov základných a stredných škôl. Žiaci v posledných dvoch ročníkoch stredných škôl spadajú do kategórie Senior. Keďže predpokladáme, že do tejto kategórie sa prihlasujú predovšetkým žiaci, ktorí sa chystajú z informatiky maturovať, alebo ktorí majú zvýšený záujem o informatiku, náročnosť úloh je vyššia. Úlohy často obsahujú zaobalené informatické koncepty, ktoré sú známe skôr vysokoškolským študentom, a nás preto zaujímalo, ako tieto úlohy budú riešiť študenti FMFI, ktorí sa s uvedenými konceptami sa už počas štúdia mohli zoznámiť.

Úlohy z kategórie Seniori z aktuálneho ročníka 2018/19 sme preto zadali nám dostupným skupinám. Skupina mAIN boli študenti magisterského štúdia na predmete *Softvér pre vzdelávanie*. Skupiny AIN a INF riešili úlohy v druhom semestri bakalárskeho štúdia na predmete *Webové technológie (1)*. Poslednou skupinou sú študenti druhého ročníka učiteľského štúdia buď v kombinácii s informatikou (upIN) alebo bez nej (up*), ktorí úlohy riešili na predmete *Digitálne technológie (3)*.

V priemere boli študenti FMFI pri riešení úloh úspešnejší ako žiaci stredných škôl, tak ako sme predpokladali, pozri Obr. 1. Keď porovnáme výsledky jednotlivých úloh súťažiacich a testovaných študentov FMFI, tak iba v jednej úlohe mali súťažiaci lepšie výsledky a v jednej úlohe boli výsledky oboch skupín porovnateľné. Obe tieto úlohy obsahovali interaktívne pomôcky, ktoré na začiatku testovania časti najväčších skupín (AIN a INF) neboli kvôli technickým problémom plne funkčné, z tohto dôvodu študenti tieto úlohy riešili bez ich použitia, alebo až medzi poslednými a mohli tak byť v časovom strese.

Keď sa pozrieme na počet úspešných riešiteľov, priemer a medián bodov (pozri Tabuľku 1), vidíme, že najúspešnejší v riešení úloh boli študenti INF a upIN. Keďže skupiny boli pomerne malé, nevieme z výsledkov robiť zovšeobecnenia, môžeme však vidieť určitý trend. Zaujímavé výsledky sa objavujú pri porovnávaní jednotlivých skupín FMFI študentov navzájom, môžeme spomenúť napríklad výsledok v úlohe *Najviac slov*, ktorú správne vyriešilo v priemere o 15 percentuálnych bodov viac študentov učiteľstva (upIN, up*) ako študentov informatiky (INF, AIN).



Obr. 1: Porovnanie výsledkov testovaných študentov so súťažiacimi

Tabuľka 1: Výsledky jednotlivých skupín pri riešení úloh; R - riešitelia, ÚR - úspešní riešitelia

	# R	# ÚR	% ÚR	AP (b)	med (b)
AIN	63	31	49%	50,86	49,35
INF	20	18	90%	62,59	60,69
upIN	8	7	88%	59,68	54,52
up*	9	3	33%	41,13	33,37
mAIN	10	4	40%	48,88	47,52
súťaž	*4086*	*1057*	*26%*	*38,14*	*37,76*

Výsledky získané od študentov FMFI nám pomôžu lepšie porozumieť náročnosti zadaných súťažných úloh a vhodnosti opisu v nich použitých informatických konceptov.

Literatúra

[1] iBobor – stránka informatickej súťaže. https://ibobor.sk. Citované: 01.04.2019.

*Lucia.Budinska@fmph.uniba.sk
†tomcsanyiova@fmph.uniba.sk