Cvičenia do midtermu

2-AIN-205, Leto 2013

31. marca 2014

Poznámka: Riešenia sú len kostra riešení. To znamená, že ich cieľom **nie** je ukázať ako má vyzerať riešenie domácej úlohy / príkladu na midterme.

1. Vyriešte 3-SAT, kde máme n rôznych premenných a m klauzúl v čase lepšom ako $\Theta(m2^n)$.

Riešenie: Riešenie v čase $\Theta(m2^n)$ je iba vyskúšanie všetkých priradení premenným. Toto riešenie sa dá zlepšiť nasledovne:

Predstav si skúšanie všetkých môžností ako strom (v každom vrchole sa rozhodnome o pravdivosti jednej premennej). Pokiaľ sme už v danej vetve vyrobili nepravdivú klauzulu môžeme celý podstrom poď ňou urezať. Navyše premenné budeme skúšať v takom poradí v akom je ich prvý výskyt na vstupe.

Teraz si predstavme prvé tri kroky skúšania. Priradili sme hodnoty trom premenným, vzniklo nám osem možných ohodností, z toho jedno ohodnotenie už vyrobilo nepravdivú klauzulu a teda môžeme ho urezať. Toto vo všeobecnosti platí aj ďalej, t.j, vždy keď sa v strome skúšania posunieme o tri úrovne nižšie, tak usekneme aspoň jednu vetvu z osmych. To nám dá rekurenciu:

$$T(n) \leq 7T(n-3) + O(m)$$

$$T(n) = O(m7^{n/3}) = O(m1.91^n)$$

2. Príklad 1 odtiaľto: `http://oi.sk/archiv/2007/sl-2007-3-zad-2.pdf`

Riešenie: `http://oi.sk/archiv/2007/sl-2007-3-vzo-2.pdf`

3. Dokážte, že ak existuje k-aproximačný algoritmus pre TSP, ktorý pracuje v polynomiálnom čase, potom $P = NP$.

Riešenie: Ukážeme, že pomocou takého algoritmu by sme vedeli rozhodovať problém existencie Hamiltonovskej kružnice v grafe. Majte graf G s n vrcholmi, prerobíme ho graf H ako vstup pre TSP nasledovne: Ak medzi vrcholmi (u, v) je v G hrana, potom v H budú spojené hranou s cenou 1. Ak medzi vrcholmi (u, v) nie je v G hrana, potom v H budú spojené hranou s cenou $47nk$.

Pokiaľ má G Hamiltovnoskú kružnicu, tak cena najlepšej TSP kružnice v H je n. Pokiaľ nemá G Hamiltovnoskú kružnicu, tak cena najlepšej TSP kružnice v H je aspoň $n + 47nk$.

To znamená, že pokiaľ nám náš aproximáčný algoritmus vráti TSP kružnicu s cenou menšou alebo rovnou ako nk, tak G má nutne Hamiltonovskú kružnicu.

4. Nájdite 2-APX algoritmus pre hľadanie Steinerovského stromu v grafe, kde platí trojuholníkova nerovnosť.

Riešenie: Viď Vazirani 3.1.1. Nájdeme jeho najlacnejšiu podgrafu, ktoré obsahuje iba vrcholy, ktoré musia byť v Steinerovskom strome. Toto je 2-aproximácia lebo:

- Uvažujme optimálne riešenie, ktoré má cenu OPT a tvorí ho Steinerovský strom H.
- Prejdime ho Eulerovskou prechádzkou, tá bude mať cenu $2OPT$
- Túto prechádzku zmeníme tak, že preskočíme všetky Steinerovské vrcholy (tie, ktoré nemusia byť nutne v strome) a zároveň aj iné vrcholy, ktoré sme navštivili viac krát. Keďže platí trojuholníkova nerovnosť, toto bude mať cenu maximálne $2OPT$.
- Dostávame tak kostru grafu, ktorá má cenu maximálne $2OPT$.
- Minimálna kostra má tiež cenu maximálne $2OPT$.

5. Máme v rovine zadaných niekoľko štvorcov, ktoré majú hrany rovnobežné s osami a stranu dĺžky 1. Nájdite čo najviac štvorcov, ktoré sa neprekrývajú. Urobte 4-aproximačný algoritmus.

Riešenie: Riešenie budujeme triviálnym spôsobom - pridávame štvorce, kým sa nejaký dá pridať. Uvažujme teraz naše riešenie R a nejaké optimálne riešenie O. Platí:

- Každý štvorec z O sa prekrýva s aspoň jedným štvorcom z R (ináč by sme O mohli zväčšiť).
- Každý štvorec z R sa prekrýva s najviac 4 štvorcami z O (viac sa ich nezmestí).

Z toho máme že veľkosť O je najviac 4-násobok veľkosti R.

6. Bral sa úvod do pravdepodobnosti: `http://vyuka.compbio.fmph.uniba.sk/mbiwiki/index.php/Sekvenovanie_gen%C3%B3mov,_cvi%C4%8Denia_pre_informatikov`

Ďalej 2-aproximáčný algoritmus pre MAX-CUT a MAX-SAT: `https://www.student.cs.uwaterloo.ca/~cs466/Lecture14.pdf` `https://www.student.cs.uwaterloo.ca/~cs466/Lecture15.pdf`

Na poslednom cvičení sa brali ukážky ILP z `http://www.aimms.com/aimms/download/manuals/aimms3om_integerprogrammi` `pdf`