

## Ako riešiť ťažké problémy?

Chceme:

- Rýchle algoritmy
- Správne algoritmy
- Algoritmy riešiace ťažké problémy

## Exaktné metódy

- Inteligentné prehľadávanie (napr.  $A^*$  algoritmus)
- Pseudopolynomiálne algoritmy
- Celočíselné lineárne programovanie
- Parametrická zložitosť

## Aproximačné algoritmy

Algoritmus  $A$  je  $k$ -aproximačný, ak pre každý vstup  $x$  platí  $A(x) \leq kOPT(x)$  (maximalizačné problémy), resp.  $A(x) \geq kOPT(x)$  (minimalizačné problémy).

Algoritmus  $A(x, \varepsilon)$  je **polynomiálna aproximačná schéma (PTAS)**, ak jeho časová zložitosť je **polynomiálna vzhľadom k  $|x|$**  a pre každé  $\varepsilon > 0$

je  $(1 + \varepsilon)$ -aproximačný (maximalizačné problémy), resp.  $(1 - \varepsilon)$ -aproximačný (minimalizačné problémy).

Algoritmus  $A(x, \varepsilon)$  je

**plne polynomiálna aproximačná schéma (FPTAS)**, ak jeho časová zložitosť je navyše **polynomiálna vzhľadom na  $1/\varepsilon$** .

## Kladivá: Dôsledná analýza greedy algoritmov

(pre minimalizačné problémy)

- Problém: chceme porovnať výsledok greedy algoritmu s optimálnym riešením, ktorého hodnotu ale nevieme.
- **Dolný odhad  $D(x)$**  na hodnotu optimálneho riešenia na základe známych parametrov.
- **Horný odhad  $H(x)$**  na hodnotu greedy riešenia.
- Odhad aproximačného faktoru  $k$ :

$$k = \frac{\text{GREEDY}(x)}{\text{OPT}(x)} \leq \frac{H(x)}{D(x)}$$

(pre maximalizačné problémy obdobne)

## Kladivá: Rozdeľ problém na podstatné a nepodstatné časti

- **Podstatné časti:**

- Prispievajú **veľkou časťou** do hodnoty riešenia.
- Majú špeciálne vlastnosti (napr. majú relatívne veľkú hodnotu, je ich pomerne málo, a pod.)
- Na základe špeciálnych vlastností ich možno **efektívne riešiť optimálnym spôsobom**  $\Rightarrow$  riešenie (\*)

- **Nepodstatné časti:**

- Prispievajú len **malou časťou** do hodnoty riešenia.
- Vďaka tomu **nezáleží na tom**, ako presne ich doplníme ku riešeniu (\*), pretože hodnotu príliš nezmenia.

## Kladivá: Rozdeľ problém na ľahšie riešiteľné podproblémy

- **Ľahko riešiteľné podproblémy:**

- Majú špeciálne vlastnosti (napr. malý rozsah, špeciálne usporiadanie prvkov a pod.)
- Vďaka tomu ich možno **efektívne riešiť optimálnym spôsobom**
- Každý podproblém  $\Rightarrow$  samostatné čiastkové riešenie lokálne optimálne

- **Kombinácia čiastkových riešení:**

- napr. priamočiaro spojíme čiastkové riešenia dohromady
- Spojené riešenie nemusí byť optimálne (prekrývajúce sa prvky a pod.)
- Ukážeme, že sme tým neurobili **príliš veľkú chybu.**

## Kladivá: Zaokrúhli veľké čísla

- Predpoklad: pseudopolynomiálny algoritmus
- “Zmenšíme” čísla, ktoré vystupujú ako parametre v pseudopolynomiálnom algoritme, zaokrúhlime kde treba.
- Riešenie nie je exaktné (kôli zaokrúhľovaniu).
- Ukážeme, že zaokrúhľovaním sme neurobili veľkú chybu.

## Kladivá: Relaxácia ILP

- Zapišeme problém ako inštanciu celočíselného lineárneho programovania (ILP).
- **Relaxácia:** Nebudeme rešpektovať požiadavku na celočíselnosť riešenie, t.j. podmienky typu  $x \in \{0, 1\}$  nahradíme podmienkou  $0 \leq x \leq 1$ .
- Riešením výsledného lineárneho programu dostaneme pseudoriešenie, ktorého hodnota **nie je horšia** ako optimálne riešenie.
- **Zaokrúhlenie:** Premenné, ktoré nie sú celé čísla, zaokrúhlime.
- Ukážeme, že sme tým **príliš nezmenili hodnotu riešenia.**



## Pravdepodobnostné algoritmy

Algoritmy, ktoré využívajú **náhodné čísla**.

### Las Vegas algoritmy.

- Vždy dajú správnu odpoveď.
- Náhodné čísla ovplyvňujú čas  $\Rightarrow$  **očakávaná časová zložitosť**

### Monte Carlo algoritmy.

- Bežia vždy rýchlo.
- Občas dajú nesprávnu odpoveď  $\Rightarrow$  **pravdepodobnosť chyby  $p$** 
  - Jednostranné chyby  
(napr. “áno” je vždy dobre, “nie” môže byť chybné)
  - Obojstranné chyby

**Dôležité:** Rýchlosť/chybovosť algoritmu **nezávisí od vstupu**, ale len od výberu náhodných čísel! (t.j. neexistuje “zlý” vstup)

## Kladivá (LV): Znáhodnenie deterministického algoritmu

- Namiesto deterministického kroku, ktorý vyžaduje aby sme urobili vyvážený výber, použijeme náhodný výber.
- Trik pri analýze očakávaného času:
  - Všetky prípady rozdelíme na **dobré** a **zlé**.
  - **Dobré prípady** nastávajú s vysokou pravdepodobnosťou a vieme urobiť dobrý horný odhad  $h(x)$  na ich čas.
  - **Zlé prípady** nenastávajú často a aj keby sme použili najhorší možný horný odhad  $H(x)$  času, tak to nevadí, lebo pravdepodobnosť je malá.

$$\begin{aligned} E[T(x, r)] &= \sum_r \Pr(r).T(x, r) = \sum_{r \text{ je dobrý}} \Pr(r).T(x, r) + \sum_{r \text{ je zlý}} \Pr(r).T(x, r) \\ &\leq \Pr(r \text{ je dobrý}).h(x) + \Pr(r \text{ je zlý}).H(x) \end{aligned}$$

## Kladivá (LV): Kernelizácia problému

- Predpoklad: Niektoré inštancie problému (napr. malé inštancie, riedke grafy, malé váhy a pod.) vieme riešiť efektívnejšie.
- Za pomoci **náhodného výberu** transformujeme našu inštanciu na **menšiu/riedšiu/...** inštanciu, pričom nová inštancia **s vysokou pravdepodobnosťou** spĺňa podmienky, keď vieme inštancie riešiť efektívne.

## Kladivá (LV+MC): Náhodné pochôdzky

- Problém zredukujeme na náhodnú pochôdzku.
- Na odhady potrebných pravdepodobností využijeme matematickú teóriu náhodných pochôdzok:
  - Ako dlho v priemere bude náhodná pochôdzka trvať?
  - Aká je distribúcia dĺžok náhodnej pochôdky?
  - Ako ďaleko sa v priemere počas náhodnej pochôdky dostaneme?
  - ...

## Kladivá (LV+MC): Markovova nerovnosť (a ďalšie nerovnosti)

Nech  $X$  je náhodná premenná,  
pričom  $X \geq 0$  a  $E[X] = \mu$ .  
Potom  $\Pr(X \geq c\mu) \leq 1/c$

Príklad: Ak máme náhodnú pochôdzku, ktorá trvá v priemere  $k$  krokov, tak ak urobíme  $2k$  krokov, tak s pravdepodobnosťou viac ako  $1/2$  pochôdzku ukončíme!

## Kladivá (analýza): Pravdepodobnostná metóda

Ak máme niekoľko prvkov, ktorých (váhovaný) priemer je  $K$ , potom

- musí existovať prvok s hodnotou  $\leq K$
- musí existovať prvok s hodnotou  $\geq K$

Pozn. Stredná hodnota náhodnej premennej je tiež váhovaný priemer!

## Kladivá (LV+MC): Metóda svedkov

- Ak by sme dostali ku problému nejakú ďalšiu informáciu (napr. čiastočnú informáciu o poradí prvkov, Fermatov svedok pre zložené číslo), vedeli by sme problém riešiť veľmi efektívne.
- Takúto informáciu nazývame **svedok**.
- Použijeme **náhodne vygenerovaného na svedka!**
- Ukážeme, že **zlého svedka**, t.j. takého, ktorý vedie k dlhému času (LV) alebo k chybnému riešeniu (MC) vygenerujeme **s malou pravdepodobnosťou**.

## Kladivá (MC): Zlepšovanie úspešnosti opakovaním

- Predpokladajme, že máme MC algoritmus, ktorý urobí **chybu s pravdepodobnosťou  $p$** .
- Ak takýto algoritmus spustíme  $k$ , krát, pravdepodobnosť že urobí chybu vo všetkých behoch je  $p^k$
- Jednostranný MC algoritmus s pravdepodobnosťou chyby  $1/2$ , pravdepodobnosť správnej odpovede pri 4 opakovaníach je  $\approx 94\%$ .
- Jednostranný MC algoritmus s pravdepodobnosťou chyby  $90\%$  20 opakovaní: pravdepodobnosť **správnej odpovede**  $\approx 88\%$



## Kladivá (MC): Metóda odtlačkov (fingerprinting)

- Namiesto porovnávania (veľkých) objektov bit po bite porovnáваме len ich **odtlačky**.
- Odtlačky sú obvykle krátke a jednoducho porovnateľné.
- Výpočet odtlačku závisí od vygenerovaných náhodných čísel.
- Analýza: aká časť odtlačkov môže viesť ku chybnéj zhode?

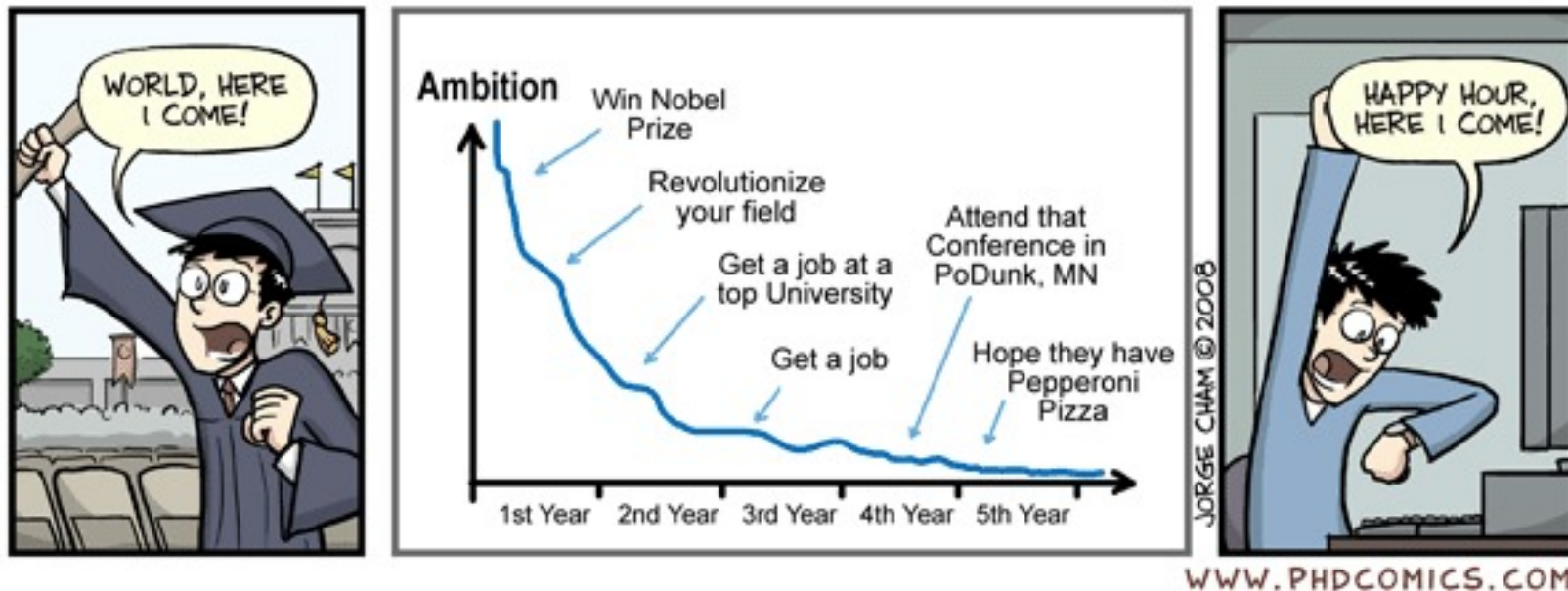


# Doktorandské štúdium na FMFI UK

## Náplň doktorandského štúdia

- 5% všeobecné štúdium
- 20% učenie (cvičenia a pod.)
- 75% samostatná vedecká práca

### YOUR LIFE AMBITION - What Happened??



## **Absolvent magisterského štúdia:**

- Dokáže sa učiť veci, ktoré nepozná, ale ktoré ľudia už poznajú a obvykle sú prehľadne spracované v knihách.
- Dokázal dokončiť jeden projekt (diplomovku), ktorého ciele mu určil vedúci diplomovej práce.

... doktorandské štúdium ...

## **Úspešný profesor / výskumný pracovník:**

- Vie o najnovších poznatkoch vo svojom odbore / neustále študuje články opisujúce najnovšie vedecké výsledky.
- Vymýšľa nové veci, ktoré ešte ľudia nepoznajú.
- Sám si stanovuje ciele výskumných projektov, ktoré sú zaujímavé pre užšie alebo širšie skupiny odborníkov.

## Čo ak nechceme skončiť v akademickej sfére?

- Získate schopnosť samostatnej práce na nových problémoch.
- Veľa našich absolventov: popredné slovenské startupy, nadnárodné firmy ako Google, Facebook a pod.
- Možnosť a čas pár rokov spojiť dohromady prácu a koníček ... a rozmyslieť si, čo vlastne chcem v budúcnosti robiť.

## **Kde začať? Budúci školiteľ.**

**Počítačová grafika a modelovanie materiálov:** prof. Ďurikovič, prof. Šrámek (ext.), doc. Chalmovianský, doc. Ferko, doc. Bajla (SAV)

**Umelá inteligencia, robotika, kognitívna veda:** prof. Farkaš, doc. Markošová, doc. Šefránek

**Teoretická informatika:** prof. Královič, prof. Rován, prof. Ďuriš, doc. Pardubská, prof. Škoviera (grafy), doc. Toman (diskrétne matematika)

**Distribúované výpočty a algoritmy:** doc. Gruska, Dr. Dobrev (SAV), Dr. Vrťo (SAV)

**Kryptológia, informačná bezpečnosť:** doc. Stanek, doc. Olejár

**Bioinformatika:** Dr. Vinař, doc. Brejová

**Vyučovanie informatiky:** prof. Kalaš, doc. Kubincová, doc. Tomcsányiová