Balenie do krabíc (Bin Packing)

Úloha: Daných je n predmetov veľkostí $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ $(0 \leq s_i \leq 1)$
Naskladajte predmety do najmenšieho možného počtu krabíc, pričom každá krabica má kapacitu 1.

(Aplikácie: nakladanie tovaru, umiestňovanie TV reklám)

Príklad: $1/2, 1/2, 1/3$

On-line verzia

- čísla prichádzajú postupne
- pre každé treba **ihneď** rozhodnúť, kam s ním

Príklad: 0.3, 0.8, 0.1, 0.2, 0.5, 0.1

Heuristika “first-fit”

Optimálne riešenie

First-fit je 2-aproximačný algoritmus

Nech výsledok je m krabíc

Tvrdenie: $m - 1$ krabíc je obsadených aspoň na $1/2$

$1/2(m-1) < \sum s_i \leq \mathsf{OPT}$
$m < 2\mathsf{OPT} + 1$
$m \leq 2\mathsf{OPT}$

(dá sa ukázať, že je 1.7-aproximačný)

Offline verzia

Idea: Využijeme výsledky z first-fit heursitiky
ALE urobíme ešte čosi navyše (čo by sme nemohli robiť v on-line algoritme)

Algoritmus:

1. Zotrieď všetky predmety od najväčšieho po najmenší
2. Aplikuj first-fit heuristiku

$\Rightarrow 11/9 = 1.22$-aproximačný algoritmus

Polynomiálne aproximačné schémy

Aproximačný algoritmus $A(x, \varepsilon)$, pre ktorý platí:

$$A(x, \varepsilon) \leq (1 + \varepsilon)OPT(x) \text{ (minimalizačný problém)}$$

resp. $A(x, \varepsilon) \geq (1 - \varepsilon)OPT(x)$ (maximalizačný problém)
a ktorý mý **polynomiálnu časovú zložitosť** vzhľadom ku parametru $|x|$ pre ľubovoľné ε nazývame
polynomiálna aproximačná schéma (PTAS).

Ak je navyše polynomiálny aj v parametri $1/\varepsilon$, tak je to
plne polynomiálna aproximačná schéma (FPTAS).

PTAS pre balenie do krabíc

Videli sme, že: **veľké** predmety sa umiestňujú ťažko, **malé** predmety sa umiestňujú ľahko

$S_1 = \{s_i \mid s_i \geq \delta\}$ (veľké predmety)
$S_2 = \{s_i \mid s_i < \delta\}$ (malé predmety)

Algoritmus:

1. Veľké predmety (množinu S_1) umiestni pomocou **makáčskeho algoritmu**: $V(\delta)$-aproximácia

2. Malé predmety (množinu S_2) použi na doplnenie miesta pomocou first-fit heuristiky

Aký je výsledný aproximačný faktor?

Aproximačný faktor nášho algoritmu

Nech výsledné riešenie má m krabíc.

- Ak malé predmety nepotrebujú otvoriť novú krabicu:
  $m \leq V(\delta)\mathsf{OPT}(S_1) \leq V(\delta)\mathsf{OPT}(S)$
- Ak malé predmety použijú novú krabicu:
  Tvrdenie: $m-1$ krabíc je plných na viac ako $(1-\delta)$

  —

  $(m-1)(1-\delta) < \sum s_i$
  $m < \frac{1}{1-\delta}\sum s_i + 1$
  $m \leq \frac{1}{1-\delta}\sum s_i \leq \frac{1}{1-\delta}\mathsf{OPT(S)} = \left(1+\frac{\delta}{1-\delta}\right)\mathsf{OPT(S)}$

Výsledok: $\max\{V(\delta), 1+\frac{\delta}{1-\delta}\}$-aproximačný algoritmus

Nový problém: Balenie veľkých predmetov

Úloha: Daných je n predmetov veľkostí $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ $(\delta \leq s_i \leq 1)$
Naskladajte predmety do najmenšieho možného počtu krabíc, pričom každá krabica má kapacitu 1.

Predpokladajme $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n$.

Makáčsky algoritmus na balenie veľkých predmetov:

Nová sada predmetov s veľkosťami "zaokrúhlenými" nahor:

$$S^+ = \{\underbrace{s_{n/k}, \ldots, s_{n/k}}_{n/k}, \underbrace{s_{2n/k}, \ldots, s_{2n/k}}_{n/k}, \ldots, \underbrace{s_n, \ldots, s_n}_{n/k}\}$$

Máme n **veľkých** predmetov, **len** k **rôznych hodnôt**.

Môžeme nájsť **globálne najlepšie riešenie** exhaustívnym prehľadávaním v čase $O(n^{k^{1/\delta}}) \Rightarrow \mathrm{OPT}(S^+)$

Zjavne $\mathrm{OPT}(S^+) \geq \mathrm{OPT}(S)$, ale o koľko?

O koľko sa pomýlime ak "zaokrúhlime" predmety nahor?

Porovnajme so zaokrúhlením nadol:

$$S^- = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{n/k}, \underbrace{s_{n/k},\ldots,s_{n/k}}_{n/k},\ldots,\underbrace{s_{(k-1)n/k},\ldots,s_{(k-1)n/k}}_{n/k}\}$$

$\mathsf{OPT}(S^-) \le \mathsf{OPT}(S)$

$\mathsf{OPT}(S^+) \le \mathsf{OPT}(S^-) + n/k \le \mathsf{OPT}(S) + n/k$

Všetky predmety sú veľké aspoň $\delta \Rightarrow n \le \frac{\mathsf{OPT}(S)}{\delta}$

$\mathsf{OPT}(S^+) \le \mathsf{OPT}(S) + \frac{\mathsf{OPT}(S)}{k\delta} = \left(1 + \frac{1}{k\delta}\right) \mathsf{OPT}(S)$

Makáčsky algoritmus v čase $O(n^{k^{1/\delta}})$ nájde $V(\delta) = 1 + \frac{1}{k\delta}$ aproximáciu!

Zhrnutie celého algoritmu

- Na veľké predmety použijem **makáčsky algoritmus**, ktorý mi vráti $V(\delta) = 1 + \frac{1}{k\delta}$ aproximáciu optima pre veľké predmety
- Malé predmety "dosypem" ku veľkým pomocou first-fit heuristiky
- Podľa toho, či malé predmety potrebovali otvoriť novú krabicu, dostaneme buď $1 + \frac{1}{k\delta}$ aproximáciu alebo $1 + \frac{\delta}{1-\delta}$ aproximáciu

Majme $\varepsilon > 0$, zvoľme:
$\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $k = 1/\delta^2$.

$1 + \frac{1}{k\delta} = 1 + \frac{1}{\delta/\delta^2} = 1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$
$1 + \frac{\delta}{1-\delta} = 1 + \frac{\varepsilon/(1+\varepsilon)}{1/(1+\varepsilon)} = 1 + \varepsilon$

$\Rightarrow$ naše riešenie $\leq (1+\varepsilon)\mathsf{OPT}(S)$

Polynomiálne aproximačné schémy

Aproximačný algoritmus $A(x, \varepsilon)$, pre ktorý platí:

$A(x, \varepsilon) \leq (1 + \varepsilon)OPT(x)$ (minimalizačný problém)

resp. $A(x, \varepsilon) \geq (1 - \varepsilon)OPT(x)$ (maximalizačný problém)

a ktorý mý **polynomiálnu časovú zložitosť** vzhľadom ku parametru $|x|$ pre ľubovoľné ε nazývame
polynomiálna aproximačná schéma (PTAS).

Ak je navyše polynomiálny aj v parametri $1/\varepsilon$, tak je to
plne polynomiálna aproximačná schéma (FPTAS).

Ako optimálne zbaliť veľké predmety?

Pripomeňme si: n predmetov, každý aspoň veľkosti δ, len k rôznych hodnôt

Koľko rôznych "typov" krabíc vieme z týchto predmetov poskladať?

- V každej krabici najviac $1/\delta$ predmetov
- Každý predmet môže byť len jeden z k rôznych typov
- Dohromady najviac $R = k^{1/\delta}$ spôsobov ako vyskladať krabicu

Maximálne n krabíc, každý jedného z R typov $\Rightarrow n^R$ možností