## S akými triedami problémov sme sa doteraz stretli?

**Trieda NPO:** Optimalizačné problémy, rozhodovacie verzie sú v NP.

Všeobecný TSP

Na cvičeniach ste dokázali:

> Ak by existoval polynomiálny algoritmus pre konštantnú aproximáciu TSP, potom by existoval polynomiálny algoritmus pre riešenie Hamiltonovskej kružnice.

## S akými triedami problémov sme sa doteraz stretli?

**Trieda NPO:** Optimalizačné problémy, rozhodovacie verzie sú v NP.

**Trieda APX:** Problémy aproximovateľné v det. poly. čase s konštantným APX faktorom.

Metrický TSP (2-APX)
Vrcholové pokrytie (2-APX)
Váhované vrcholové pokrytie (2-APX)
MAX-SAT (3/4 očakávaný APX)

## S akými triedami problémov sme sa doteraz stretli?

**Trieda NPO:** Optimalizačné problémy, rozhodovacie verzie sú v NP.

**Trieda APX:** Problémy aproximovateľné v det. poly. čase s konštantným APX faktorom.

**Trieda PTAS:** Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $(1 \pm e)$-aproximovateľné v det. poly. čase v závislosti od veľkosti vstupu.

Balenie do krabíc

## S akými triedami problémov sme sa doteraz stretli?

**Trieda NPO:** Optimalizačné problémy, rozhodovacie verzie sú v NP.

**Trieda APX:** Problémy aproximovateľné v det. poly. čase s konštantným APX faktorom.

**Trieda PTAS:** Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $(1 \pm e)$-aproximovateľné v det. poly. čase v závislosti od veľkosti vstupu.

**Trieda FPTAS:** Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $(1 \pm e)$-aproximovateľné v det. poly. čase v závislosti od veľkosti vstupu a od $(1/\varepsilon)$.

Problém batohu

## S akými triedami problémov sme sa doteraz stretli?

**Trieda NPO:** Optimalizačné problémy, rozhodovacie verzie sú v NP.

**Trieda APX:** Problémy aproximovateľné v det. poly. čase s konštantným APX faktorom.

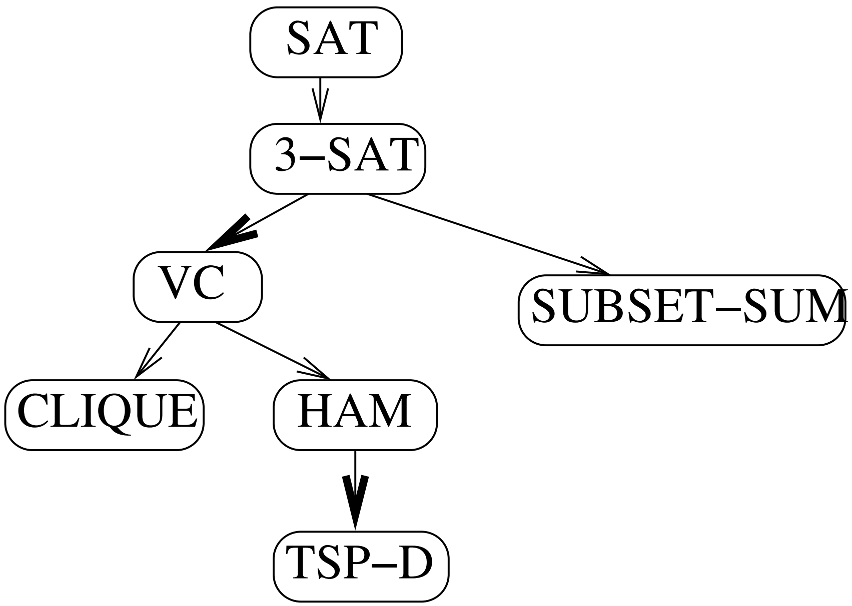
**Trieda PTAS:** Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $(1 \pm \varepsilon)$-aproximovateľné v det. poly. čase v závislosti od veľkosti vstupu.

**Trieda FPTAS:** Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $(1 \pm \varepsilon)$-aproximovateľné v det. poly. čase v závislosti od veľkosti vstupu a od $(1/\varepsilon)$.

**Trieda PO:** Problémy riešiteľné v deterministickom polynomiálnom čase

$$\boxed{\text{PO} \subseteq \text{FPTAS} \subseteq \text{PTAS} \subseteq \text{APX} \subseteq \text{NPO}}$$

## Dôkazy NP-ťažkosti (polynomiálne redukcie):




## Neaproximovateľnosť:

- veľmi ťažké problémy: nie sú aproximovateľné so žiadnym konštantným APX faktorom (napr. všeobecný TSP) v det. polynomiálnom čase
- "ľahšie" problémy, "ťažšie" dôkazy: (možno) existuje konštantná aproximácia, no neexistuje PTAS

## MAX-3-SAT ako základný neaproximovateľný problém

**Úloha:** Daná formula v CNF, $n$ premenných, $m$ klauzúl

Každá klauzula presne 3 atómy, napr.:

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$

Nájsť priradenie pravdivostných hodnôt, ktoré spĺňa **najväčší možný počet klauzúl.**

**Základný výsledok:**

Existuje konštanta $\varepsilon > 0$ a deterministický polynomiálny algoritmus $A$, ktorý pre formulu $f$ vytvorí novú formulu $A(f)$ takú, že:

- $f$ je splniteľná $\Rightarrow$ MAX-3-SAT$(A(f)) = m$
- $f$ nie je splniteľná $\Rightarrow$ MAX-3-SAT$(A(f)) < (1 - \varepsilon)m$

($m$ je počet klauzúl v $A(f)$)

## MAX-3-SAT ako základný neaproximovateľný problém

### Základný výsledok:

Existuje konštanta $\varepsilon > 0$ a deterministický polynomiálny algoritmus $A$, ktorý pre formulu $f$ vytvorí novú formulu $A(f)$ takú, že:

- $f$ je splniteľná $\Rightarrow$ MAX-3-SAT$(A(f)) = m$
- $f$ nie je splniteľná $\Rightarrow$ MAX-3-SAT$(A(f)) < (1 - \varepsilon)m$

($m$ je počet klauzúl v $A(f)$)

### Dôsledok:

Polynomiálny $(1 - \varepsilon)$-aproximačný algoritmus pre MAX-3-SAT
$\Rightarrow$ výsledok $\geq (1 - \varepsilon)m$ znamená MAX-3-SAT $= m$
$\Rightarrow$ formula $f$ je splniteľná

**MAX-3-SAT nemožno aproximovať s faktorom $(1 - \varepsilon)$**

## Neaproximovateľnosť nezávislej množiny (IS)

**Problém (IS):** Daný grav $G = (V, E)$
Nájdite najväčšiu množinu vrcholov, z ktorých žiadne dva nie sú spojené hranou.

**IS je NP-ťažký problém:**

Redukcia 3-SAT $\leq_P$ IS:

Vezmime logickú formulu $f$, každá klauzula 3 premenné, $m$ klauzúl
napr. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_2 \vee x_5)$

- v IS max. jeden vrchol z každého trojuholníka
- v IS nemôže byť naraz vrchol aj jeho negácia

$\Rightarrow$ existuje IS veľkosti $m$ akk formula $f$ je splniteľná

## Neaproximovateľnosť nezávislej množiny (IS)

**IS je NP-ťažký problém:** ak by sme vedeli riešiť problém IS v polynomiálnom čase, potom by sme vedeli riešiť aj 3-SAT v polynomiálnom čase!

**Naša redukcia funguje aj pre aproximovateľnosť!**
Dôležité:
**počet vrcholov IS = počet splnených klauzúl v MAX-3-SAT**

Predpokladajme, že existuje poly $k$-apx algoritmus $A_{\mathsf{IS}}$ pre IS.

$$A_{\mathsf{IS}}(G) \qquad \geq \qquad k\mathsf{OPT}_{\mathsf{IS}}(G)$$

$$A_{\mathsf{MAX\text{-}3\text{-}SAT}}(f) \qquad k\mathsf{OPT}_{\mathsf{MAX\text{-}3\text{-}SAT}}(f)$$

**Potom by musel existovať aj $k$-apx algoritmus pre MAX-3-SAT!**

## Kedy takýto postup funguje / nefunguje?

- Musíme vedieť nájsť vzťah medzi hodnotou riešenia v pôvodnom probléme a v probléme na ktorý redukujeme.
- Problém ak napr. pôvodná redukcia je z maximalizačného na minimalizačný problém

## Zhrnutie

- Triedy zložitosti pre aproximačné algoritmy:

  $\mathbf{PO} \subseteq \mathbf{FPTAS} \subseteq \mathbf{PTAS} \subseteq \mathbf{APX} \subseteq \mathbf{NPO}$

- Základné neaproximovateľné problémy:
  **Všeobecné TSP**: naproximovateľné s konšt. faktorom
  **MAX-3-SAT**: nemá PTAS

- Redukcie podobné na polynomiálne redukcie z dôkazov NP-ťažkosti, ale:
  - nestačí nájsť vzťah medzi najlepšími riešeniam ale aj medzi suboptimálnymi riešeniami
  - musí sa zachovať rozostup medzi suboptimálnymi riešeniami