

Domáca úloha č. 3

2-AIN-205, Leto 2022

Termín: 3.5.2022, 12:00 (classroom)

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Náhodné permutácie.** Budeme generovať náhodné permutácie nasledujúcim spôsobom. Začneme s poľom S , ktoré nainicializujeme tak, že $S[i] = i$. Potom pre všetky i od 2 po n vymeníme prvok $S[i]$ s prvkom $S[\text{rand}(1, i)]$, pričom $\text{rand}(a, b)$ vráti náhodné celé číslo medzi a a b .

a) Ukážte, že tento algoritmus môže vygenerovať ľubovoľnú z $n!$ permutácií a že každú z týchto permutácií vygeneruje s rovnakou pravdepodobnosťou.

b) Ak predpokladáme, že náhodné číslo $\text{rand}(a, b)$ vieme vygenerovať v čase $O(1)$, potom tento algoritmus zjavne funguje v čase $O(n)$.

Ako by ste implementovali $\text{rand}(a, b)$, ak by ste mohli naraz vygenerovať len jeden náhodný bit? Analyzujte najhoršiu a očakávanú časovú zložitosť.

2. [20 bodov] **Náhodná prechádzka po strome.** Majme binárny strom s n vrcholmi, kde každý vrchol má práve dve deti. Začíname v jeho koreni a v každom kroku si zvolíme náhodne ľavé alebo pravé dieťa a posunieme sa do neho. Toto opakujeme, až kým sa neocitneme v liste stromu. Dokážte, že očakávaný počet krokov tohto algoritmu je zhora ohraničený hodnotou $\log_2(n + 1)$.

Hint: Pozor! Strom nemusí byť vyvážený. Skúste to indukciou vzhľadom na počet vrcholov stromu.

3. [20 bodov] **Programátorská úloha** (viď všeobecné pokyny). Dané je pole n celých čísel a_1, a_2, \dots, a_n a číslo k . Zistite, či existujú dva úseky dĺžky k , ktoré obsahujú rovnaké čísla, t.j. či existujú dve čísla $i < j$ také, že postupnosti $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}$ a $a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+k-1}$ sú rovnaké.

Formát vstupu: V prvom riadku vstupu sú čísla n a k . V ďalšom riadku je n čísel a_1, \dots, a_n , platí $0 \leq a_i \leq 100$.

Formát výstupu: Ak požadované dva úseky neexistujú vypíšte -1. Inak vypíšte jeden riadok s číslami i, j (oddelenými medzerou). Ak je riešenie viac vypíšte to s najmenším i a ak je ich stále viac, tak to s najmenším j .

Obmedzenia a bodovanie: Na získanie plného počtu bodov je potrebné, aby váš program dal korektný výsledok pre vstupy, kde $n, k \leq 1000000$.

Príklad vstupu:

5 2
1 1 1 1 1

Príklad vstupu:

5 2
1 2 3 1 2

Príklad vstupu:

5 2
1 2 3 4 5

Príklad výstupu:

1 2

Príklad výstupu:

1 4

Príklad výstupu:

-1

Všeobecné pokyny

Písomné úlohy. Písomné úlohy odovzdávajte *do Google Classroom* ako PDF súbory v stanovenom termíne. **Každý príklad odovzdajte v osobitnom PDF súbore.** Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať.

Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezabudnite na analýzu zložitosti algoritmu.

Programátorské úlohy. Pri programátorských úlohách je vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie <https://testovac.ksp.sk/tasks/>, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Na odovzdávanie riešení je nutné sa na stránke zaregistrovať (vľavo na stránke testovača). Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii "Čo odovzdávať?".