Celočíselné lineárne programovanie (ILP)

Optimalizačná úloha nasledujúceho tvaru:

minimalizuj/maximalizuj $f(x_1, \ldots, x_n)$

za podmienok:

$$L_1(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$
$$L_2(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$
$$\ldots$$
$$\forall i : x_i \in \{0, 1\}$$

(f, L_1, L_2, ...sú lineárne funkcie)

ILP je NP-ťažký problém. ALE: existujú solvery, ktoré množstvo inštancií dokážu riešiť rýchlo (SCIP, CPLEX a pod.)

Váhované vrcholové pokrytie

Úloha: Daný je graf $G = (V, E)$, váhy vrcholov $w : R \to R^+$
Nájdite vrcholové pokrytie C s minimálnou váhou $\sum_{v \in C} w(v)$

Riešenie pomocou ILP:

Premenné $x_v = \begin{cases} 1, & \text{vrchol patrí do vrcholového pokrytia} \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$

Minimalizuj $\sum w(v) x_v$ za podmienok
pre každú hranu $e = \{u, v\}$: $x_u + x_v \geq 1$
pre všetky vrcholy u: $x_u \in \{0, 1\}$ (*)

Čo sa stane, ak podmienku (*) nahradíme podmienkou $0 \leq x_u \leq 1$? (nazývame aj **relaxácia ILP**)

Lineárne programovanie (LP) vs.
Celočíselné lineárne programovanie (ILP)

minimalizuj/maximalizuj $f(x_1, \ldots, x_n)$
za podmienok:
$$L_1(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$
$$L_2(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$
$$\ldots$$
$$\forall i : 0 \leq x_i \leq 1$$

(f, L_1, L_2, $\ldots$ sú lineárne funkcie)

LP možno riešiť numerickým algoritmom v polynomiálnom čase

Pozorovania:

- Ľubovoľné dosadenie premenných pre ILP funguje aj pre LP
- $\Rightarrow$ OPT(ILP) $\geq$ OPT(LP) (minimalizačný prob.)
  OPT(ILP) $\leq$ OPT(LP) (maximalizačný prob.)

Váhované vrcholové prokrytie pomocou relaxácie ILP

1. Vyrieš LP, ktorý vznikol relaxáciou ILP:

   Minimalizuj $\sum w(v)x_v$ za podmienok

   pre každú hranu $e = \{u, v\}$: $x_u + x_v \geq 1$

   pre všetky vrcholy u: $0 \leq x_u \leq 1$

2. Výsledné riešenie **zaokrúhlime**: $v \in C$, akk $x_v \geq 1/2$

3. Takéto riešenie **je vrcholovým pokrytím**:

   pre každú hranu $e = \{u, v\}$ musí platiť $x_u + x_v \geq 1$

   aspoň jedno z x_u, x_v musí mať hodnotu $\geq 1/2$

Dostali sme nejaké vrcholové pokrytie, o koľko horšie je od optimálneho váhovaného vrcholového pokrytia?

Dostali sme nejaké vrcholové pokrytie, o koľko horšie je od optimálneho váhovaného vrcholového pokrytia?

$$\begin{aligned}\text{OPT(ILP)} &\geq \text{OPT(LP)} \\ &= \sum_v w(v)x_v \geq \sum_{v:x_v \geq 1/2} w(v)x_v \\ &\geq \sum_{v:x_v \geq 1/2} \tfrac{1}{2}w(v) = \tfrac{1}{2}w(C)\end{aligned}$$

$$\text{OPT(ILP)} \geq \tfrac{1}{2}w(C)$$

$$\boxed{w(C) \leq 2\text{OPT(ILP)}}$$

Problém MAX SAT

Úloha: Daná je logická formula s m klauzulami a n premennými. Nájdite priradenie pravdivostných hodnôt tak, aby bol splnený **maximálny počet klauzúl**.

Príklad:

$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$

ILP pre MAX SAT

Premenné: z_i : pravdivostná hodnota priradená x_i

y_j : je splnená klauzula c_j?

Maximalizujeme $\sum y_i$ za podmienok:

pre každú klauzulu c_j "vynútime" správnu hodnotu y_j

napríklad ak $c_j = (x_3 \vee \neg x_4 \vee x_6)$:

$y_j \leq z_3 + (1 - z_4) + z_6$

$z_i, y_i \in \{0, 1\}$ (*)

MAX SAT pomocou relaxácie ILP

1. Vyrieš LP, ktorý vznikol relaxáciou ILP:

   Maximalizujeme $\sum y_i$ za podmienok:
   pre každú klauzulu c_j "vynútime" správnu hodnotu y_j
   $0 \leq z_i, y_i \leq 1$

2. Výsledné pravdivostné hodnoty $z_1, \ldots, z_n$ **náhodne zaokrúhlime:**
   $\Pr(x_i = 1) = z_i$

3. Takéto pravdivostné priradenie hodnôt vyhlásime za riešenie nášho problému.

Koľko klauzúl bude splnených a v akom vzťahu je toto riešenie k optimálnemu riešeniu?

Pravdepodobnosť, že konkrétna klauzula je splnená

Napríklad $c_j = (x_3 \vee x_5)$

$$\Pr(c_j \text{ je splnená}) = 1 - \Pr(c_j \text{ je nesplnená})$$
$$= 1 - (1 - z_3)(1 - z_5)$$
$$\geq 1 - \left(\frac{(1-z_3)+(1-z_5)}{2}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{z_3+z_5}{2}\right)^2$$
$$\geq 1 - (1 - y_j/2)^2 = 1 - (1 + y_j^2/4 - y_j) = y_j - y_j^2/4 \geq \frac{3}{4}y_j$$

$$\boxed{\Pr(c_j \text{ je splnená}) \geq \frac{3}{4}y_j}$$

(dôkaz jednoducho generalizuje na klauzuly s ľubovoľným počtom premenných)

$\Pr(c_j \text{ je splnená}) \geq \frac{3}{4} y_j$

Aký je počet splnených klauzúl?

$E[\# \text{ splnených klauzúl}] = \sum_j E[c_j \text{ je splnená}]$
$= \sum_j 0 \cdot \Pr(c_j \text{ je nesplnená}) + 1 \cdot \Pr(c_j \text{ je splnená})$
$\geq \sum_j \frac{3}{4} y_j = \frac{3}{4} \sum_j y_j \geq \frac{3}{4} OPT(ILP)$

Dokázali sme, že algoritmus je **$\frac{3}{4}$-aproximačný** (v očakávanej hodnote).

Zhrnutie

- Celočíselné lineárne programovanie sa dá použiť nielen priamo na **riešenie** ťažkých optimalizačných úloh, ale aj na **vytvorenie aproximačného algoritmu.**
- Relaxácia ILP, riešenie LP, zaokrúhlenie
- 2-apx algoritmus na váhované vrcholové pokrytie
- 3/4-apx algoritmus na MAX SAT (v očakávanej hodnote)