1 Celočíselné lineárne programovanie (ILP[1])

Celočíselné lineárne programovanie je známy NP-ťažký problém. Slovo ,,programovanie" je v jeho názve použité v trochu inom význame, než na ktorý sme zvyknutí. Pre nás je ILP zaujímavé kvôli dvom dôležitým vlastnostiam:

- Príjemne sa naň redukujú iné problémy.
- Existujú softvéry riešiace ILP (ILP solvery), ktoré sú celkom dobre ,,vytunené" a hoci nedávajú garanciu o svojej rýchlosti (z princípu veci, keďže sme ešte nedokázali $P = NP$), v praxi sú často celkom rýchle.

Konkrétne triky a heuristiky používané v ILP solveroch nás momentálne nebudú zaujímať, stačí nám vedieť, že jestvujú. Viac nás bude zaujímať, ako formulovať iné problémy pomocou ILP (resp. redukovať iné problémy na ILP).

1.1 Definícia problému

1.1.1 Lineárne programovanie

Vstup pre lineárne programovanie (nazývaný aj *lineárny program*) má tieto časti:

- Konečná množina premenných V (väčšinou je zadaná implicitne)
- Lineárna funkcia nad premennými z V, nazývaná *cieľová funkcia* (objective function)
- Sústava neostrých lineárnych nerovností nad premennými z V, nazývaných *obmedzujúce podmienky* (constraints).
- Informáia, či chceme cieľovú funkciu minimalizovať, alebo maximalizovať.

Výstupom je priradenie **reálnych** čísel všetkým premenným z V, pre ktoré:

- Všetky obmedzujúce podmienky platia a

[1] Integer Linear Programming

- Cieľová funkcia má najlepšiu (naväčšiu alebo najmenšiu, podľa toho, či maximalizujeme alebo minimalizujeme) možnú hodnotu,

prípadne informácia, že takéto priradenie neexistuje (buď neexistuje priradenie, ktoré by splĺňalo všetky obmedzujúce podmienky, alebo môže cieľová funkcia nadobudnúť ľubovoľne dobrú hodnotu).

Lineárny program teda môže vyzerať napríklad takto:

Minimalizuj $2x_1 + 4x_2 - x_4$
Pričom:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geqslant 2 \\ x_4 + x_3 &\leqslant 2 \\ x_1 - x_3 &\leqslant -1 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \\ x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Správny výstup pre tento vstup je priradenie:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{2}{3} \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Poznámka 1. *Lineárnosť* cieľovej funkcie znamená, že ide súčet, ktorého každý člen je buď buď konštanta (reálne číslo), alebo jedna premenná z V prenásobená konštantou. Príkladom korektnej cieľovej funckie pre $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ je teda napríklad $4+13x_1-2x_3$. Naopak, funkcie x_1^2+8, ani $x_1+2x_2x_3$ nemôžu byť použité ako cieľové, lebo obsahujú násobenie dvoch premenných, resp. premennej so sebou samou.

Lineárnosť obmedzujúcich podmienok znamená, že obe strany nerovnosti musia byť lineárne.

Poznámka 2. Keďže ľubovoľná rovnosť $L = R$ sa dá vyjadriť ako dve nerovnosti $L \leqslant R$ a $L \geqslant R$, štandardne sa povoľuje, aby medzi obmedujúcimi podmienkami boli aj rovnosti (stále však musia byť lineárne).

Poznámka 3. V lineárnych programoch, s ktorými sa stretneme, sa často budú vyskytovať obmedzenia na rozsah jednotlivých premenných, napr. $x_1 \geqslant 0$. Hoci sa tieto obmedzenia dajú chápať ako obyčajné obmedzujúce podmienky, v niektorých formátoch lineárnych programov sa zvyknú vyčleňovať.

Príklady formulácie lineárnych programov pre ,,realistické" problémy nájdete v tomto texte (kapitola 1.1) `https://math.mit.edu/~goemans/18310S15/lpnotes310.pdf`.

Lineárne programovanie samo o sebe ešte nie je NP-ťažké (za predpokladu, že náš počítač vie pracovať s reálnymi číslami, sa dá riešiť v polynomiálnom čase).

1.1.2 Celočíselné lineárne programovanie

Celočíselné lineárne programovanie (ILP) sa od obyčajného lineárneho programovania (LP) líši tým, že vo výstupe musí byť každej premennej priradená **celočíselná** hodnota.

Vstup pre ILP teda vyzerá rovnako ako vstup pre LP. Pre rovnaký lineárny program však LP a ILP môžu dať rôzne výsledky. Výsledok nájdený pomocou ILP pritom nikdy nemá lepšiu hodnotu cieľovej funkcie, ako výsledok od LP.

Podmienka na celočíselnosť je často potrebná pri kombinatorických problémoch, kde neceločíselné riešenia nemajú zmysluplnú interpretáciu.

1.2 Príklad využitia

Na ukážku vyriešime pomocou ILP nasledujúci hlavolam:

Umiestnite na šachovnicu čo najviac dám tak, aby sa vzájomne neohrozovali.

Náš lineárny program bude 64 premenných – pre každé políčko šachovnice jednu. Premenné nazvime $x_{A1}, x_{A2}, \ldots, x_{H8}$. Význam týchto premenných je nasledujúci: každá premenná určuje, koľko má byť na príslušnom políčku dám.

Keďže je naším cieľom umiestniť na šachovnicu čo najviac dám, budeme maximalizovať funkciu

$$x_{A1} + x_{A2} + \cdots + x_{H8}.$$

Ostáva ešte napísať vhodné obmedzujúce podmienky. Keďže na každom políčku musí byť aspoň 0 a najviac jedna dáma, budeme mať pre každé $i \in \{A, B, \ldots, H\}, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ podmienky

$$x_{ij} \geqslant 0,$$
$$x_{ij} \leqslant 1.$$

Aby sa dámy neohrozovali vertikálne, pridáme podmienky, že v každom stĺpci môže byť maximálne jedna dáma. To znamená, že pre každé $i \in \{A, B, \ldots, H\}$ budeme mať podmienku:

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{i8} \leqslant 1.$$

Podobné podmienky napíšeme aj pre riadky. Pre každé $j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$:

$$x_{Aj} + x_{Bj} + \cdots + x_{Hj} \leqslant 1.$$

Nakoniec, podobné podmienky napíšeme aj pre diagonály:

$$\begin{aligned} x_{A1} &\leqslant 1 \\ x_{A2} + x_{B1} &\leqslant 1 \\ x_{A3} + x_{B2} + x_{C1} &\leqslant 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Riešenie tohto lineárneho programu (výstup ILP solvera) budeme interpretovať takto: ak má premenná x_{ij} hodnotu 1, postavíme na políčko ij dámu, v opačnom prípade ho necháme voľné.

Poznámka 4. Premenné, ktorým dovolíme nadobúdať iba hodnoty 0 a 1 (napríklad pomocou obmedzujúcich podmienok $x \geqslant 0$, $x \leqslant 1$) sa zvyknú nazývať *binárne premenné.*