

Domáca úloha č. 3

1-AIN-105, Zima 2022

Termín: 14.11.2022, 22:00

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Sú algoritmy správne?** Zistite, či pre uvedený problém je daný greedy algoritmus správny. Dokážte správnosť algoritmu alebo uveďte kontrapríklad.

a) **Podivná hra.** Na stole je v rade vyložených $2n$ kartičiek s číslami. Hru hrajú dvaja hráči, pričom každý z nich si môže v každom ťahu zobrať jednu z dvoch krajných kartičiek. Vyhráva ten, kto má na konci väčší súčet čísel na svojich kartičkách. Cieľom prvého hráča je vyhrať, nech druhý hráč hrá akokoľvek.

Algoritmus pre prvého hráča. Vždy keď je na ťahu, zoberie z dvoch krajných kartičiek tú s väčším číslom.

b) **Plátanie hadíc.** Na nemenovanej fakulte požiarne inšpekcia našla deravú požiarne hadicu. Keďže peňazí je málo, údržba sa rozhodla hadicu zaplátať. Hadica má k malých dier vo vzdialenostiach $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ centimetrov od začiatku. Máme k dispozícií záplaty, ktoré pokrývajú 5 cm dĺžky. Cieľom je zalepiť všetky diery s použitím najmenšieho možného počtu záplat.

Algoritmus. Položíme ľavý koniec záplaty na najľavejšiu diery. Zmažeme zo zoznamu všetky diery pokryté záplatou a opakujeme, až kým neostanú žiadne diery.

2. [20 bodov] **Nádherne ticho hôr.** V obchodáku stojí rad, dlhý, pomalý. Konkrétne, v rade na pokladňu stojí n zákazníkov s rôzne zaplnenými košíkmi. Nablokovanie košíka zákazníka číslo i trvá čas t_i . Zákazník bude naštvaný, ak v rade bude čakať dlhšie ako trvá nablokovanie jeho košíka (do čakania samotné blokovanie nerátame, rátame iba blokovanie všetkých zákazníkov vybavených pred ním). Manažér sa preto rozhodol, že niektorých zákazníkov uprednostní a preusporiada rad pri pokladni. Pomôžte manažérovi usporiadať čakajúcich zákazníkov tak, aby bol naštvaný najmenší možný počet zákazníkov.

Napríklad, uvažujme $n = 5$ zákazníkov s časmi $t_1 = 15$, $t_2 = 2$, $t_3 = 1$, $t_4 = 5$ a $t_5 = 3$. Ak ich usporiadame v poradí $(1, 2, 3, 4, 5)$, tak všetci zákazníci okrem zákazníka číslo 1 budú naštvaní. Ak ich však usporiadame v poradí $(3, 2, 5, 1, 4)$, bude naštvaný len jeden zákazník. (To je aj jedno z možných optimálnych riešení.)

3. [20 bodov] **Zlatokopecká** (programátorská úloha).

Odovzdávanie úlohy: <https://testovac.ksp.sk/tasks/eads2022-du3a/>

Pri prerábaní prednáškových miestností A a B sa pod nimi našlo zlato. Presnejšie, našlo sa tam n nugetov zlata. Ako chudobný študent na začiatku nemáš žiadne nugety. Potom, ako odišli všetci z fakulty si sa rozhodol ísť zlato vykopať. Avšak doma čaká mamka s večerou, takže na kopanie máš iba t minút.

Zlato môžeš kopať sám, pričom vykopeš jeden nuget za minútu. Na začiatku každej minúty si môžeš najat' ľubovoľne veľa spolužiakov, ktorí budú s kopaním pomáhať. Každý spolužiak vyžaduje vopred jednorazovú platbu p nugetov. Pomocník bude nugety ťažiť odkedy ho najmeš, až kým neuplynie čas (teda najviac t minút). Spolužiaci kopú rovnako rýchlo ako ty, teda jeden nuget za minútu.

Vypočítaj najväčšie množstvo nugetov, ktoré môžeš mať po t minútach.

Formát vstupu. Na vstupe je jediný riadok, na ktorom sú medzerou oddelené čísla n, t, p ($1 \leq n \leq 10^{18}$, $1 \leq t \leq 10^6$, $1 \leq p \leq 10^{18}$).

Formát výstupu. Vypíšte jeden riadok a v ňom jedno celé číslo: najväčší počet nugetov, ktorý viete mať po t minútach.

Príklad.

vstup: **výstup:**

470000 1000000 50 470000

Ak máš dost času vyťažiť všetko zlato sám, neoplatí sa najímať pomocníkov.

vstup: **výstup:**

470000 100000 1234567890123456 100000

Času je menej ako zlata, ale keďže nemáš na to, aby si si najal pomocníka, neostáva ti nič iné ako celých stotisíc minút kopať sám.

vstup: **výstup:**

470000 100000 57000 100000

Od minúty 57000 už máš dost nugetov na to aby si si najal jedného pomocníka, v žiadnom okamihu sa tak ale neoplatí spraviť. Na konci budeš stále mať najviac zlata ak ho budeš ťažiť sám.

vstup: **výstup:**

470000 100000 42000 116000

Tentokrát sú pomocníci ešte lacnejší. Oplatí sa jedného si najat', vieme tak skončiť s viac ako stotisíc nugetmi.

vstup: **výstup:**

567890 4 1 8

Jedna z optimálnych stratégií vyzerá nasledovne:

- ešte nemáš žiadne nugety a nevieš si najat' pomocníka
- prvú minútu kopeš sám, získaš 1 nuget
- zaplatíš si tým nugetom pomocníka
- druhú minútu kopeš s jedným pomocníkom, získaš 2 nugety
- zaplatíš si dvoch nových pomocníkov
- tretiu minútu kopeš s tromi pomocníkmi, získaš 4 nugety
- zaplatíš si jedného ďalšieho pomocníka, ostanú ti tri nugety
- štvrtú minútu kopeš so štyrmi pomocníkmi, získaš 5 nugetov, máš teda na konci $3 + 5 = 8$ nugetov

vstup: **výstup:**

234567 47 10 215

Oplatí sa najat' celkom dost pomocníkov, občas aj dvoch naraz.

vstup: **výstup:**

300 47 10 190

Pod prednáškovými je menej zlata ako v predchádzajúcom príklade. Toto má vplyv na naše rozhodnutia, kedy koľko študentov najat'.

vstup: **výstup:**

987654321098765432 100 3 2731288513472

Ak sú pomocníci ozaj lacní, za 100 minút sa už dá vyťažiť fakt veľké množstvo zlata.

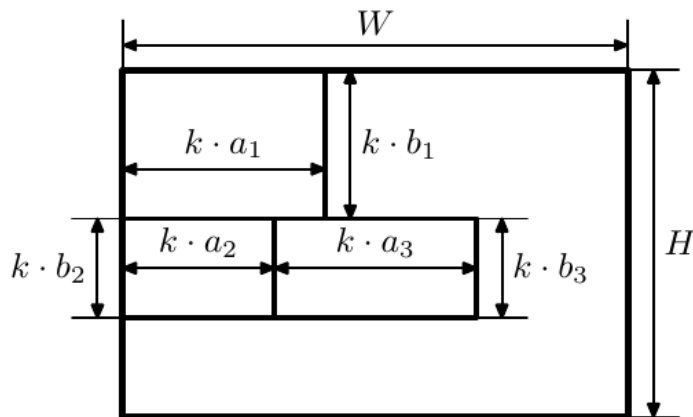
4. [20 bodov] **Reklama** (programátorská úloha)

Odozdávanie úlohy: <https://testovac.ksp.sk/tasks/eads2022-du3b/>

Ignác bol zamlada nanič programátor, tak skončil ako brigádnik v reklamnej agentúre, kde dostal za úlohu vysádzať text na billboard. Billboard má šírku W a výšku H . Text, ktorý má Ignác na billboard umiestniť má n slov. Slovo, ktoré je i -te v poradí má šírku a_i a výšku b_i . Slová musí Ignác umiestniť do niekoľkých riadkov *presne v danom poradí*. Do jedného riadku však možno umiestniť viac slov len vtedy, ak majú všetky presne rovnakú výšku, aby mohli byť vertikálne zarovnané (t.j. mať rovnako vysoko vrch aj spodok obdĺžnika). Medzi jednotlivými obdĺžnikmi netreba vynechávať voľné miesto, to už je zarátané v rozmeroch slov.

Billboard je tým lepší, čím je text na ňom väčší. Ignác si teda môže zvoliť nejaké kladné reálne číslo k a všetky slová k -krát zväčšiť (alebo zmenšiť ak $k < 1$). Samozrejme, musí sa mu všetkých n slov podľa vyššie popísaných pravidiel zmestiť na billboard.

Pre tri slová, z ktorých sú druhé a tretie rovnako vysoké, by teda billboard pre konkrétnu hodnotu k mohol vyzeráť napríklad nasledovne:



Toto však zjavne nie je optimálny billboard. Mohli by sme zvoliť väčšie k a ešte stále by sa nám naň všetky tri slová zmestili.

Vašou úlohou je nájsť najväčšiu hodnotu škálovacieho faktora k , pre ktorú sa ešte zmestia všetky slová na billboard.

Formát vstupu: V prvom riadku sú tri celé čísla: n , W a H ($1 \leq n \leq 100000$, $1 \leq W, H \leq 10^9$). Nasleduje n riadkov popisujúcich jednotlivé slová. V i -tom z týchto riadkov sú dve celé čísla a_i a b_i ($1 \leq a_i, b_i \leq 10^9$).

Formát výstupu: Vypíšte jeden riadok a v ňom jedno reálne číslo: najväčší možný škálovací faktor k . Riešenia s absolútnou alebo relatívnou chybou nanejvýš 10^{-7} budú považované za správne. Odporúčame teda vypisovať odpoveď - škálovací faktor k na *aspoň* 8 desatinných miest.

Príklady:

vstup:

3 10 7
4 3
3 2
4 2

výstup:

1.4

Tento vstup zodpovedá obrázku zo zadania, no obrázok znázorňuje situáciu pre $k = 1$. Možno však použiť väčší škálovací faktor $k = 1.4$.

vstup:

2 10 1
2 1
3 2

výstup:

0.33333333333333333333

Všeobecné pokyny

Písomné úlohy. Písomné úlohy odovzdávajte *do Google Classroom* ako PDF súbory v stanovenom termíne. **Každý príklad odovzdajte v osobitnom PDF súbore.** Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať. Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnuť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezapodniete na analýzu zložitosti algoritmu.

Ak nie je povedané inak, logaritmy majú základ 2.

Programátorské úlohy. Pri programátorských úlohách je Vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie <https://testovac.ksp.sk/tasks/>, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa, koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Na odovzdávanie riešení (keďže na testovač nefungujú univerzitné prihlasovacie údaje) je nutné sa na stránke zaregistrovať (vľavo na stránke testovača). Pri vytváraní účtu nastavte správne meno a priezvisko, a ako používateľské meno nastavte Váš univerzitný login. Nezapodniete tiež napísať Vaše používateľské meno do PDF súboru k ostatným úlohám, ktoré odovzdávate. Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii "Čo odovzdávať?". Informácie o testovači nájdete v sekcii "Odpovede testovača".

Na zoznámenie sa s rozhraním testovača si môžete vyskúšať naprogramovať niektoré z úloh z časti "Úvod do programovania".