

# Domáca úloha č. 4

1-AIN-105, Zima 2022

Termín: 9.12.2022, 22:00

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Stavba diaľnice.** Projekt stavby diaľnice je rozdelený na  $n$  úsekov, pričom  $i$ -ty úsek bude trvať postaviť  $t_i$  času. Máte  $k$  dispozícií  $k$  partií stavbárov. Ak partia začne stavať úsek  $j$ , postaví ho za čas  $t_j$ , potom sa presunie na stavbu úseku  $j + 1$ , ktorý postaví za čas  $t_{j+1}$ , atď., až kým nenarazí na postavený úsek alebo koniec diaľnice; v takom prípade partia odíde domov a už sa na stavbu nevráti. Diaľnica je dostavaná, keď posledná partia odíde domov.

Navrhňte algoritmus, ktorý určí, na ktorom úseku má ktorá partia začať, aby sme celú diaľnicu postavili v najkratšom možnom čase (najlepšie už do Vianoc).

**Hint:** Ako by ste rozmiestnili partie, keby ste vedeli koľko bude stavba diaľnice trvať?

2. [20 bodov] Pre každú z nižšie uvedených rekurencií odvodte čo najtesnejší asymptotický horný odhad pre  $T(n)$ . Predpokladajte, že  $T(1) = \Theta(1)$  and  $T(0) = \Theta(1)$ . V prípade, že sa rozhodnete aplikovať master theorem, môžete zanedbať dolné a horné celé časti. Zdôvodnite svoje odpovede.

a)  $T(n) = 7T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2$

b)  $T(n) = 16T(\lfloor n/4 \rfloor) + n^2$

c)  $T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2\sqrt{n}$

d)  $T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$

3. [20 bodov] **Prechádzka lesom** (programátorská úloha).

**Odovzdávanie úlohy:** <https://testovac.ksp.sk/tasks/eads2022-du4a/>

Andrej rád chodí na prechádzky lesom. Les za dedinou je obdĺžnikového tvaru, ktorý si vieme rozdeliť na  $r \times c$  štvorcových dielikov; každý je buď voľný, alebo na ňom rastie strom.

Andrej sa chce prejsť z ľavého horného rohu lesa do pravého dolného rohu. Ak stojí na políčku so súradnicami  $(x, y)$  (ľavý horný roh má súradnice  $(0, 0)$ ), Andrej sa vie pohnúť na políčka  $(x + 1, y)$ ,  $(x, y + 1)$  a  $(x + 1, y + 1)$ . Nikdy pri tom nevykročí mimo lesa, ani sa nepohne na políčko so stromom.

Pomôžte Andrejovi zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať z ľavého horného rohu lesa do pravého dolného. Keďže počet spôsobov môže byť veľmi veľký, vypíšte ho modulo  $(10^9 + 7)$ . To znamená, že ak je počet spôsobov  $x$ , tak vypíšete číslo  $(x \bmod (10^9 + 7))$ .

**Formát vstupu** V prvom riadku sú dve čísla  $1 \leq r, c \leq 500$ : počet riadkov a stĺpcov obdĺžnikového lesa. Nasledujúcich  $r$  riadkov obsahuje  $c$  znakov – popis lesa. '.' predstavuje voľné políčko, '#' zasa strom. Je zaručené, že strom nerastie v ľavom hornom ani pravom dolnom rohu.

**Formát výstupu** Vypíšte jedno číslo: počet spôsobov ktorými sa vie Andrej dostať z ľavého horného do pravého dolného rohu, modulo  $10^9 + 7$ .

**Príklad.**

**vstup:**

2 2

..

..

**výstup:**

3

Andrej buď prejde jedným krokom šikmo do cieľa, alebo sa vyberie po jednom z okrajov.

**vstup:**

3 3

...

#..

...

**výstup:**

8

4. [20 bodov] **Knihovník** (programátorská úloha)

**Odvzdávanie úlohy:** <https://testovac.ksp.sk/tasks/eads2022-du4b/>

Šikovný predavač kníh si všimol, že keď kupujúcemu ponúkne knihu a správne odhadne cenu, tak ju kupujúci kúpi. V stánku na vianočných trhoch má na kope knihy a podľa oblečenia kupujúceho vie odhadnúť, aký je kupujúci prachatý. Ak je kupujúceho prachatosť  $p$  a hodnota knihy je  $h$ , treba ju kupujúcemu ponúknuť za cenu  $p \cdot h$  bubákov a kupujúci ju kúpi.

Najprachatejším kupujúcim chceme tým pádom ponúkať tie najhodnotnejšie knihy. Na trhoch však nie je čas prehrávať sa všetkými knihami na kope a hľadať tú správnej hodnoty, preto predavač ohodnotí pohľadom kupujúceho a vyberie pre neho **jednu z troch najvrchnejších kníh** na kope.

V stánku máme  $n$  kníh o hodnotách  $h_1, h_2, \dots, h_n$  (hodnoty kníh sú usporiadané od vrchu kopy až po spodok) a v rade stojí  $n$  kupujúcich, pričom ich prachatosť je  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (v tomto poradí). Koľko najviac peňazí môže predavač utržiť za svoju kopy kníh?

**Formát vstupu:** V prvom riadku je číslo  $n$ . V druhom riadku sú medzerou oddelené hodnoty kníh  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . V treťom riadku sú medzerou oddelené prachatosti zákazníkov  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Platí, že  $n \leq 500$ ,  $1 \leq h_i \leq 1000$  a  $1 \leq p_i \leq 1000$ .

**Formát výstupu:** Na výstupe vypíšte jediné číslo — najväčší možný obnos peňazí, ktorý môžete za knihy utržiť.

**Príklady:**

**vstup:**

4

16 6 2 10

3 8 12 9

**výstup:**

336

Prvému kupujúcemu (s prachatosťou 3) ponúkame tretiu knihu z vrchu o hodnote 2, za ktorú zaplatí  $3 \cdot 2 = 6$  bubákov. Zostávajú nám knihy s hodnotami 16 6 10 (v tomto poradí). Druhému kupujúcemu (s prachatosťou 8) ponúkame druhú knihu z vrchu, za ktorú zaplatí  $8 \cdot 6 = 48$  bubákov a zostanú nám knihy s hodnotami 16 a 10. Tretí kupujúci zaplatí za vrchnú knihu 192 bubákov a posledný kupujúci zaplatí za vrchnú knihu 90 bubákov.

**Hint 1:** Porozmýšľajte nad dynamických programovaním, kde by podproblém reprezentoval stav kopy kníh.

**Hint 2:** Python je síce fajn jazyk, (a vzorové riešenie v ňom prechádza) ale niekedy je lepšie použiť niečo rýchlejšie. (A Java to nie je)

**Hint 3:** Váš program na testovači dostane pamäťový limit 256MB, takže ak sa pokúsite naalokovať si väčšie pole/slovník/..., tak vám testovač vráti hlášku **Chyba počas behu programu**. Ak sa tak stane, skúste popremýšľať, že či nemáte naalokovanú časť pamäte, ktorú reálne nepoužívate, resp. vedeli nepoužívať.

## Všeobecné pokyny

**Písomné úlohy.** Písomné úlohy odovzdávajú do *Google Classroom* ako PDF súbory v stanovenom termíne. **Každý príklad odovzdajte v osobitnom PDF súbore.** Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať. Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezapodnajte na analýzu zložitosti algoritmu.

Ak nie je povedané inak, logaritmy majú základ 2.

**Programátorské úlohy.** Pri programátorských úlohách je Vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie <https://testovac.ksp.sk/tasks/>, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa, koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Na odovzdávanie riešení (keďže na testovač nefungujú univerzitné prihlasovacie údaje) je nutné sa na stránke zaregistrovať (vľavo na stránke testovača). Pri vytváraní účtu nastavte správne meno a priezvisko, a ako používateľské meno nastavte Váš univerzitný login. Nezapodnajte tiež napísať Vaše používateľské meno do PDF súboru k ostatným úlohám, ktoré odovzdávate. Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii "Čo odovzdávať?". Informácie o testovači nájdete v sekcii "Odpovede testovača".

Na zoznámenie sa s rozhraním testovača si môžete vyskúšať naprogramovať niektoré z úloh z časti "Úvod do programovania".