

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Midterm písomka, 1-AIN-105, 9.11.2022

Meno a priezvisko študenta:

- Táto písomka má 10 strán. Vyriešte úlohy a napíšte odpovede priamo do zadania. Píšte čitateľne, aby ste zbytočne nestrácali body. Ak vám niekde nestačí miesto, využite prázdne strany.
- Bonusová úloha bude hodnotená prísnejšie a za nekompletné riešenia nebudú priznávané čiastočné body. Preto bonusovú úlohu riešte až na záver, ak vám zostane čas.
- Ak sa vám zadanie zdá nejednoznačné, napíšte predpoklady, ktoré zadanie zjednoduší a pokračujte v odpovedi na príslušnú otázku.
- Opisovanie je vážne porušenie akademickej integrity a akýkoľvek prehrešok v tejto oblasti bude postihnutý podľa pravidiel predmetu a postúpený na disciplinárne konanie.

1 (15 bodov) **Asymptotická zložitosť**

Ktoré zo symbolov O , Θ a Ω možno v nasledujúcej tabuľke doplniť namiesto ???. Zaškrtnite odpovede priamo v tabuľke, nie je potrebné žiadne zdôvodnenie. Všetky logaritmy majú bázu 2. **Upozornenie ohľadom bodovania:** Za každú správnu odpoveď dostanete 1 bod, za nesprávnu odpoveď dostanete -1 bod. Nemusíte vyplniť všetky políčka, nevyplnené políčka alebo políčka, kde bude zaškrtnuté "neviem" budú za 0 bodov. **V takomto systéme hodnotenia sa neoplatí bez rozmyslu tipovať.**

| Otázka | $O()$ | $\Theta()$ | $\Omega()$ |
|---|--|--|--|
| Príklad: $n = ??(n - 1)$ | <input checked="" type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input checked="" type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input checked="" type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem |
| $\frac{n^3 + 2}{\sqrt{n}} = ??(n^{2.52})$ | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem |
| $n \log n = ??(n^{1.01})$ | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem |
| $n^n = ??(n!)$ | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem |
| $n^{\log 8} = ??(8^{\log n})$ | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem |
| $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = ??(2^n)$ | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem | <input type="checkbox"/> pravda <input type="checkbox"/> nepravda <input type="checkbox"/> neviem |

2 (25 bodov) **Krátke otázky**

Odpovedzte na nasledujúce otázky a krátko (jednou alebo dvoma vetami) **zdôvodnite svoju odpoveď**.

a) Ak o nejakom algoritme ukážeme, že funguje v čase $\Theta(n^2)$, môže sa stať, že pre niektoré vstupy pobeží v čase $O(n)$?

áno nie nemožno rozhodnúť

b) V algoritme quicksort sa každé dva prvky vstupného poľa porovnajú

najviac raz práve raz aspoň raz
 ani jedna z týchto možností

c) Na vstupe je n reťazcov nad abecedou $\{a, \dots, z\}$. Najdlhší reťazec má dĺžku ℓ_{max} , priemerná dĺžka vstupných reťazcov je ℓ_{avg} . Ako dlho potrvá zotriediť takéto reťazce radix sortom?

$\Theta(n \log n)$ $\Theta(\ell_{max})$ $\Theta(n\ell_{max})$ $\Theta(n\ell_{avg})$ $\Theta(\ell_{max}n \log n)$
 ani jedna z týchto možností

d) Koľko vrcholov bude mať skomprimovaný trie (PATRICIA strom) obsahujúci slová **abraka**, **dabra**, **abrakadabra** a **dabrakaabra**?

4 5 6 7 8 9 10

ani jedna z predchádzajúcich možností

e) Profesor Premúdrelý tvrdí, že pre ľubovoľné dve funkcie f a g s pozitívnym oborom hodnôt platí buď $f(n) \in O(g(n))$ alebo $g(n) \in O(f(n))$. Profesor Premúdrelý:

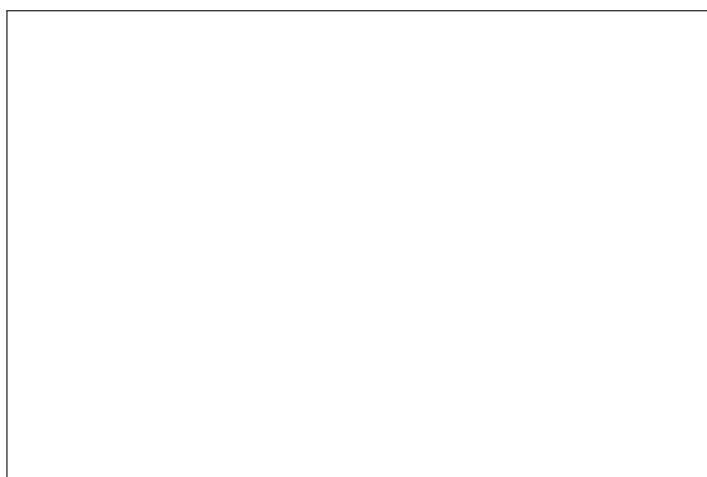
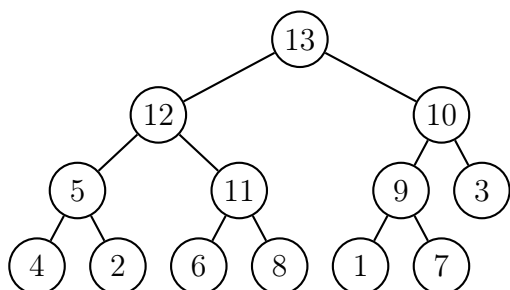
má pravdu nemá pravdu nemožno rozhodnúť

3 (20 bodov) **Mazanie z Max-haldy**

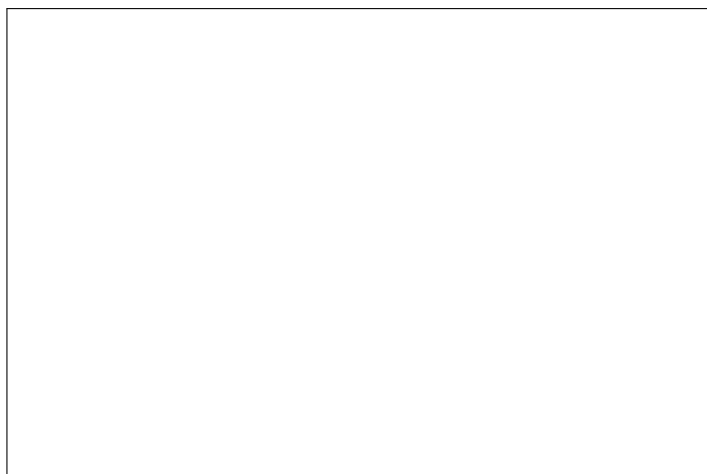
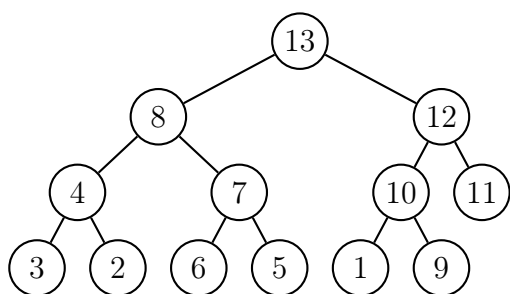
Pripomeňme si, že max-halda je dátová štruktúra, ktorá slúži na ukladanie celých čísel a podporuje operácie $Insert(x)$ a $ExtractMax()$. V tejto otázke bude vašou úlohou vytvoriť operáciu Delete, ktorá vymaže ľubovoľný prvok uložený v halde.

Pripomeňme si, že $ExtractMax$ najprv presunie prvok z posledného miesta v halde úplne na vrch a potom naň použije funkciu $Heapify$, aby obnovila v halde správne usporiadanie. Delete bude fungovať na podobnom princípe, na obnovenie správneho usporiadania bude o niečo komplikovanejšie.

- a) V halde na obrázku nižšie vymažte kľúč 12 tak, že najprv premiestnite kľúč 7 na jeho miesto a potom obnovíte správne usporiadanie v halde. Nakreslite výslednú haldu do obdĺžnika vedľa.



- b) V halde na obrázku nižšie vymažte kľúč 3 tak, že najprv premiestnite kľúč 9 na jeho miesto a potom obnovíte správne usporiadanie v halde. Nakreslite výslednú haldu do obdĺžnika vedľa.



- c) Napíšte pseudokód pre vymazanie ľubovoľného prvku z max-haldy. Môžete použiť metódy SiftUp a Heapify pre max-haldy z prednášky. Váš algoritmus by mal fungovať v čase $O(n \log n)$. Stručne zdôvodnite.

Max-halda je uložená v poli A a má n prvkov.

Odpoveď:

```
function Delete(i):  
    // funkcia vymaže prvok uložený na pozícii A[i]  
    A[i] = A[n]  
    n = n - 1  
    // nasleduje váš pseudokód, ktorý obnoví vlastnosti haldy
```

4 (20 bodov) **Rabin-Karpov algoritmus**

Predpokladajme, že Rabin-Karpov algoritmus použije nasledujúcu hašovaciú funkciu pre reťazec S nad abecedou $\Sigma = \{a, c, t, g\}$:

$$h(S) = \#(S, a) + 2\#(S, c) + 3\#(S, t) + 4\#(S, g)$$

(funkcia $\#(S, x)$ je počet výskytov znaku x v reťazci S).

Napríklad $h(tccga) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 12$.

Nech t_i je hodnota tejto hašovacej funkcie pre podreťazec textu T , ktorý začína na pozícii i , ktorú používame v Rabin-Karpovom algoritmu pri vyhľadávaní vzorky P ($|T| = n$, $|P| = m$).

a) Pre reťazec nižšie vypočítajte všetky hodnoty t_i pre $m = 5$.

| | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T:$ | c | a | g | t | c | t | c | c | g | a |
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | X | X | X | X |
| t_i | | | | | | | X | X | X | X |

b) Popíšte, ako je možné vypočítať hodnotu t_i z hodnoty t_{i-1} v konštantnom čase pre $i > 0$. Váš algoritmus musí fungovať pre ľubovoľnú hodnotu m , nie len pre $m = 5$ z vyššie uvedeného príkladu.

c) Koľko falošných hitov sa vyskytne v texte T z časti a) pri hľadaní vzorky $P = tccga$?
(falošný hit je miesto, kde hodnota hašovacej funkcie sedí, ale nejedná sa o výskyt vzorky)

d) Pre ľubovoľne veľké n ukážte príklad reťazca T dĺžky n a vzorky P dĺžky $m \leq n/2$, pre ktorú budeme mať na každej pozícii falošný hit. Zdôvodnite svoju odpoveď.
Hint: $m = 2$ stačí

5 (20 bodov) **Mystery kód**

Vo firme ste v zdrojových kódach objavili nasledovnú funkciu (tu je zapísaná ako pseudokód):

```
function Mystery(k,Q[]):
    // Q[1], Q[2], ..., Q[k] sú polia kladných celých čísel,
    // indexované od 0, na konci každého poľa je uložená 0

    for i=1 to k:
        pos[i] = 0

    hh=infinity

    while hh>0:
        hh=0
        for i=1 to k:
            if Q[i][pos[i]]>hh:
                hh=Q[i][pos[i]]
                kk=i

        pos[kk] = pos[kk]+1
        print hh
```

- a) Developer kódu zabudol dopísať do komentára jednu podmienku, ktorú musia spĺňať polia $Q[1], \dots, Q[k]$, aby tento kód plnil nejakú rozumnú funkciu. Popíšte v stručnosti túto podmienku a funkciu kódu.

Hint: Aký pseudokód z prednášky vám tento kód pripomína pre $k = 2$?

- b) Aká je časová zložitosť pseudokódu, ak označíme počty prvkov polí $Q[1], \dots, Q[k]$ postupne n_1, \dots, n_k a $n = \sum_i n_i$?

- c) Popíšte, ako by ste vylepšili časovú zložitosť kódu na $O(n \log k)$. Zapište riešenie aj vo forme pseudokódu.

6 (20 bodov) **Bonusová úloha: Geniálne stromy prof. Premúdrelého**

Prof. Premúdrelý si na tabuľu nakreslil geniálny binárny vyhľadávací strom a na separátny papier si z neho napísal všetky kľúče v pre-order poradí (všetky kľúče mali rôzne hodnoty). Keď na druhý deň ráno prišiel do práce, s hrôzou zistil, že upratovačka mu umyla tabuľu a že o svoj geniálny binárny vyhľadávací strom prišiel.

Úloha: Je možné z informácie na papieri jednoznačným spôsobom zostaviť pôvodný geniálny binárny vyhľadávací strom?

Ak si myslíte, že áno, napíšte algoritmus (vrátane pseudokódu), zdôvodnite jeho správnosť a odhadnite jeho časovú zložitosť. Ak si myslíte, že nie, ukážte kontrapríklad.

Táto strana je naschvál prázdna. Môžete ju použiť, ak sa vám výpočty alebo odpoveď nevôjde na vyhradené miesto. Ak sem píšete odpoveď, jasne to vyznačte u príslušného príkladu.