

Cvičenia č. 1

2-AIN-105, Zima 2013

26. septembra 2013

Poznámka: Riešenia sú len kostra riešení. To znamená, že ich cieľom **nie** je ukázať ako má vyzeráť riešenie domácej úlohy.

1. Dané je pole čísel P dĺžky n a číslo k . Pre každý súvislý úsek dĺžky k v poli P zistíte jeho priemer. Napríklad pre pole 12345 a $k = 3$ máme úseky (123), (234), (345) a priemery 2, 3, 4.

Riešenie: Zjavné riešenie (zober každý úsek, zisti súčet a vydeľ dĺžkou) má časovú zložitosť $O(n^2)$. Vieme ale celý proces urýchliť tým, že keď máme vypočítaný súčet nejakého úseku, tak súčet nasledujúceho úseku vieme zistiť rýchlo tak, že odčítame prvý prvok z pôvodného úseku a pripočítame posledný prvok z nového úseku. Napríklad úseku (123) má súčet 6 a súčet nasledujúceho úseku (234) získame ako $6 - 1 + 4$. Keďže sa následne vieme posúvať v konštantnom čase, tak celková časová zložitosť je $O(n)$.

2. Dané je utriedené pole čísel P dĺžky n a číslo k nájdite také dve čísla z poľa P , ktorých súčet je väčší ako k a zároveň čo najmenší.

Riešenie: Triviálne riešenie (vyskúšam každú dvojicu čísel) má zložitosť $O(n^2)$. Urýchliť sa to dá nasledovne. Ku každému číslu $P[i]$ budeme hľadať také číslo $P[j]$, aby $P[j] > P[i]$, $P[j] + P[i] > k$ a $P[j] + P[i]$ bolo čo najmenšie. Inými slovami hľadáme najmenšie $P[j] > \max(P[i], k - P[i])$. Toto vieme v utriedenom poli robiť binárnym vyhľadávaním, a dostali by sme zložitosť $O(n \lg n)$. Ešte lepšie riešenie vieme dosiahnuť nasledovne. Prepokladajme, že pre $P[i]$ mám nájdené príslušné $P[j]$. Potom pre $P[i + 1]$ bude príslušné $P[j]$ rovnaké alebo menšie. Takže môžeme použiť triviálne riešenie s tým, že druhé z čísel hľadáme sprava, začíname tam, kde sme v poslednom kroku prestali a prerušíme hľadanie, keď je súčet malý. Toto má potom celkovú časovú zložitosť $O(n)$.

3. Daný je orientovaný graf s n vrcholmi, kde z každého vrchola vychádza práve jedna hrana. Zistíte či sa dá dostať z každého vrchola všade.

Riešenie: Existujú riešenia, ktoré priamo overujú podmienku zo zadania (idem postupne z vrchola ďalej a pamätám si kadiaľ som išiel, aby som sa nezacyklil). Lepšie riešenie je založené na pozorovaní, že jediný graf, ktoré vyhovuje podmienke zo zadania je kružnica. Takže stačí začať v jednom vrchole a overiť, či vieme prejsť celý graf a vrátiť sa späť. Alebo stačí začať vo vrchole 0 a overiť, že či po n krokoch prídeme do vrchola 0 (teda, že vrchol 0 uvidíme najskôr práve po n krokoch). Toto má časovú zložitosť $O(n)$.

4. Zadané je pole kladných čísel, nájdite súvislý úsek s najväčším priemerom.

Riešenie: Nájdeme maximum v poli. Zložitosť $O(n)$.

5. Máme v čakárni v rade $2n + 1$ stoličiek, sedí tam n mužov a n žien, 1 stolička je voľná. Prišla sestrička a povedala, že ženy majú prednosť. Úlohou je na čo najmenej presadnutí usporiadať ľudí tam, aby ženy boli pred mužmi a voľná stolička môže byť hocikde.

Riešenie: Najmenší možný počet výmen zistíme, tak že si spočítame počet ľudí, ktorý sedia zle (muž v prvej polovici, žena v druhej polovici, keď je človek úplne v strede nesedí zle). Teraz sa dá ukázať, že v každom kroku vieme nájsť človeka, ktorý sedí zle a vieme ho presunúť, aby sedel dobre. Navyše týchto ľudí vieme efektívne hľadať tak, že postupne hľadáme sprava ženy, zľava mužov a podľa pozície voľného miesta ich presúvame (toto má časovú zložitosť $O(n)$).

6. Máme pole $n - 1$ čísel, kde sú čísla od 1 do n a každé maximálne raz. Úlohou je zistiť, že ktoré chýba.

Riešenie: Zistíme si súčet čísel od 1 do n , súčet poľa a rozdiel je chýbajúce číslo. Časová zložitosť $O(n)$ a používame len konštantnú pamäť navyše.

7. Zadané je pole n čísel a číslo k , usporiadajte čísla v poli tak, aby najprv boli čísla menšie alebo rovné ako k a následne čísla väčšie ako k .

Riešenie: Ide v podstate o partition v quicksorte. Spôsoby ako toto dosiahnuť s konštantnou prídavnou pamäťou sú napríklad nasledovné (viď. <http://cs.stackexchange.com/questions/11458/quicksort-partitioning-hoare-vs-lomuto>).

- Máme dva indexy, jeden ide zo začiatku, druhý od konca. Ľavý index hľadá prvý prvok väčší ako k , pravý prvý prvok menší alebo rovný ako k . Ak sa prekryžia, tak sme skončili a nie, tak prvky vymeníme a pokračujeme.
- Pole máme rozdelené na tri časti, menšie ako rovné k , väčšie ako k a nespracované. Držíme si indexy ukazujúce na začiatok druhej a tretej časti. V každom kroku spracujeme jeden prvok (posunieme index tretej časti). Ak je prvok väčší ako k nerobíme nič, inak ho vymeníme s prvým prvok druhej časti a posunieme index druhej časti.