

Cvičenia č. 1

2-AIN-105, Zima 2013

5. októbra 2013

1. Porovnajte a zorad'te nasledujúce funkcie podľa asymptotickej zložitosti: $47n^3, 42n, 23n^2+4n+3, 0.0001n^2, 2^n, 3^n, n^{200}1.99^n, n^n, 2^{\lg n}, n!, \lg n, \lg(n^{100}), \lg(n!), \lg(n^n), n \lg n, n(\lg n)^2$

Riešenie: Začneme od jednoduchých porovnaní, kde ukážeme, že niektoré funkcie rastú asymptoticky rovnako a niektoré zjednodušíme (pri každom si rozmyslite ako by ste to dokázali poriadne pomocou definície):

- $23n^2 + 4n + 3 \in \Theta(n^2)$, $0.0001n^2 \in \Theta(n^2)$
- $2^{\lg n} = n$, teda $42n \in \Theta(n)$, $2^{\lg n} \in \Theta(n)$
- $\lg(n^{100}) = 100 \lg n$, teda $\lg(n^{100}) \in \Theta(\lg n)$
- $\lg(n^n) = n \lg n$, teda $\lg(n^n) \in \Theta(n \lg n)$
- $47n^3 \in \Theta(n^3)$

Trochu ťažšie sa uvažuje o $\lg(n!)$. Keďže $\lg(n!) < \lg(n^n) = n \lg n$, tak $\lg(n!) \in O(n \lg n)$. Ešte to chceme odhadnúť zdola. To sa dá urobiť napríklad nasledovne:

$$\lg(n!) = \lg(n) + \lg(n-1) + \dots + \lg 1 \geq \frac{n}{2} \lg\left(\frac{n}{2}\right)$$

Polovicu členov sme "zaokrúhlili" nadol a druhú polovicu zahodili. Tu už vidno, že $\frac{n}{2} \lg\left(\frac{n}{2}\right) \in \Omega(n \lg n)$ a teda aj $\lg(n!) \in \Omega(n \lg n)$. Z tohoto dolného odhadu a predchádzajúceho horného odhadu máme $\lg(n!) \in \Theta(n \lg n)$.

Ešte trochu nepríjemné je ukázať, že $n! \in o(n^n)$. Tu si opäť vieme pomôcť horným odhadom pre $n!$:

$$n! = n(n-1) \dots 1 \leq n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Tento odhad už vieme ľahko porovnať s n^n a teda: $n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \in o(n^n)$ a teda aj $n! \in o(n^n)$.

A teraz to už celé môžeme zoradiť (opäť si poriadne rozmyslite zvyšné porovnania). Všetky funkcie v jednom riadku rastú asymptoticky rovnako a pomalšie ako funkcie v nasledovných riadkoch:

- $\lg n, \lg(n^{100})$
- $42n, 2^{\lg n}$
- $n \lg n, \lg(n^n), \lg(n!)$
- $n(\lg n)^2$
- $23n^2 + 4n + 3, 0.0001n^2$
- $47n^3$
- $n^{200}1.99^n$
- 2^n
- 3^n
- $n!$
- n^n

2. Určite časovú zložitosť nasledovného kódu:

```

for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1; j <= n; j+=i) {
        A[j] += 1;
    }
}

```

Riešenie: Poďme spočítať koľkokrát sa vykoná riadok `A[j] += 1`. Je to: $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n}$ (zanedbáme dolné celé časti). Toto sa dá upraviť ako $n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$. Dá sa ukázať (napríklad odhadmi pomocou integrálov), že $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \in \Theta(\lg n)$. A teda celková zložitosť algoritmu je $\Theta(n \lg n)$.

2. Určite časovú zložitosť nasledovného kódu:

```

kmp[i] je pole kde kmp[0] = kmp[1] = 0 a kmp[i] < i
cur = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    while (cur != 0 && A[i] != B[cur]) {
        cur = kmp[cur];
    }
    if (A[i] == B[cur]) {
        cur++;
    }
}

```

Dôležité sú riadky `cur++` a `cur = kmp[cur]`. Riadok `cur++` sa vykoná $O(n)$ -krát a vždy zvýši premennú `cur` o 1. Riadok `cur = kmp[cur]` premennú `cur` znižuje (vždy aspoň o 1) a zároveň ju nikdy nezníži viac ako o 1. A teda si nikdy nemôže vykonať viac krát ako riadok `cur++` a teda sa vykoná najviac ako $O(n)$ krát. A teda aj celková zložitosť bude $O(n)$. Zároveň celý kód spotrebuje aspoň n operácií a teda môžeme povedať, že zložitosť kódu je $\Theta(n)$.