

Cvičenia č. 3

2-AIN-105, Zima 2013

14. októbra 2013

1. Máme mince s hodnotami 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100. Z každej mince máme nekonečne veľa kusov. Chceme zaplatiť sumu x . Navrhните algoritmus, ktorý pre danú sumu nájde najmenší počet mincí potrebný na jej zaplatenie.

Riešenie: Sumu zaplatíme tak, že používame vždy najväčšiu mincu aká je k dispozícii. Také riešenie sa dá pomerne jednoducho naprogramovať s časovou zložitostou $O(x)$, pokiaľ považujeme počet mincí za konštantný.

V tomto príklade nás ale zaujíma hlavne dôkaz správnosti algoritmu.

Najprv si pre každú mincu spočítajme, že koľko najviac kusov z nej môžeme mať v optimálnom riešení:

minca	1	2	5	10	20	50	100
max. počet	1	2	1	1	2	1	inf

A teraz ukážeme, že akékoľvek optimálne riešenie je zhodné s riešením, ktoré generuje náš algoritmus.

Nech naše riešenie obsahuje mince: $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_p$. Nech nejaké optimálne riešenie obsahuje mince: $o_1 \geq o_2 \geq \dots \geq o_q$. Chceme ukázať, že $p = q$ a že $r_1 = o_1, \dots, r_p = o_q$.

Dôkaz urobíme indukciou. Postupne ukážeme, že pre každé $k \leq p, q$ sa dané postupnosti na prvých k miestach zhodujú.

Prípad $k = 0$ je triviálny. Teraz predpokladme, že sa dané postupnosti zhodujú na k prvých miestach a chceme ukázať, že sa musia zhodovať na $k + 1$ miestach. Sporom. Predpokladajme, že sa nezhodujú. Potom $o_{k+1} < r_{k+1}$ (naše riešenie vyberá najväčšiu možnú mincu). Poďme si postupne rozobrať jednotlivé prípady:

- $r_{k+1} = 2$. Potom iné optimálne riešenie musí použiť aspoň dve mince hodnoty 1, čo je spor s tabuľkou vyššie.
- $r_{k+1} = 5$. Iné optimálne riešenie môže použiť len mince s hodnotami 1 a 2. Z tých naskladá súčet najviac 5. Pokiaľ nám do zaplatenia sumy chýbalo práve 5, tak sme našli lepšie riešenie. Pokiaľ nám chýbalo viac, tak optimálne riešenie sa dostáva do sporu s tabuľkou vyššie. Každopádne máme spor.

Ostatné prípady sú presne rovnaké ako prípad pri čísle 5. Tým je dôkaz hotový.

Ešte si všimnime zaujímavú vlastnosť tejto sady mincí. Z tabuľky vyššie vyplýva, že každá minca má väčšiu alebo rovnakú hodnotu ako maximálny počet mincí s menšou hodnotou. Napríklad minca s hodnotou 5 má hodnotu vyššiu alebo rovnú ako dve dvojky a jedna jednotka. Pokiaľ sada mincí spĺňa túto vlastnosť (napríklad ju spĺňa aj sada 1, 5, 25, 100), tak vieme pomocou takého istého dôkazu ako vyššie ukázať, že greedy algoritmus pre ňu funguje.

2. Nájdite sadu mincí pre ktorú greedy algoritmus nefunguje.

Riešenie: Napríklad mince 1, 27, 50. Keď chceme zaplatiť sumu 54, tak náš algoritmus povie 50, 1, 1, 1, 1, ale lepšie riešenie je 27, 27.

3. Máme auto, ktoré odnesie B kilogramov nákladu. Máme n tekutín. O každej vieme jej maximálne množstvo m_i (v kilogramoch) a cenu za jeden liter c_i . Ako najviac cenný náklad vieme odnieť? (Pozn.: môžeme zobrať aj menšie množstvo nejakej tekutiny ako m_i).

Riešenie: Utriedíme tekutiny podľa ceny a berieme od najdrahšej. Časová zložitost' $O(n \lg n)$. Dôkaz správnosti prenechávame na usilovného čitateľa.

4. Máme n firiem. Majú zisky $r_1, r_2, \dots, r_n$ (predpokladajme, že zisky sú rozdielne). Chceme ich zlúčiť do jednej, tak by výsledný zisk bol čo najväčší. Môžeme to robiť postupne pomocou nasledovnej operácie. Vyberieme si $k \geq 2$ a zlúčime k firiem. Ich zlúčením dostaneme novú firmu, ktorej zisk je priemerom zisku zlúčených firiem.

Riešenie: Zlúčujeme vždy dve firmy s najmenším ziskom. Časová zložitost' bude $O(n \lg n)$ (potrebujeme to utriediť).

Ešte náznak dôkazu správnosti. Ukážeme nasledovné tvrdenie: V optimálnom riešení zlúčime najprv všetky ostatné firmy a ku výslednej firme pridáme najväčšiu. Dôkaz opäť sporom. Predpokladajme, že to tak nie je. Potom ak firmy zlučime tak ako zlučujeme, ale najväčšiu firmu zlúčime poslednú, tak dostaneme lepšie riešenie. Toto sa dá ukázať tak, že si vyjadríme výsledný zisk pomocou ziskov pôvodných firiem a ukážeme, že podiel najväčšej firmy na tomto zisku porastie a ostatným sa zmenší alebo nezmení. A keďže je výhodné aby najväčšia firma mala väčší podiel na výslednom zisku, tak dostávame lepšie riešenie. Príklad:

Majme 5 firiem so ziskami 1, 2, 3, 4, 5. Najprv zlúčime firmy zo ziskami 4 a 5 (dostaneme 4.5), potom 2 a 3 (dostaneme 2.5), potom 2.5 a 4.5 (dostaneme 3.5) a nakoniec 1 a 3.5 (dostaneme 2.25). Zisk výslednej firmy sa dá z pôvodných firiem vypočítať nasledovne:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8}$$

Ak by sme zlúčenie najväčšej firmy odsunuli nakoniec, tak zlúčime 2 a 3 (dostaneme 2.5), potom 2.5 a 4 (dostaneme 3.25), potom 3.25 a 1 (dostaneme 2.125) a nakoniec 2.125 a 5 (dostaneme 3.5625). Zisk výslednej firmy sa dá z pôvodných firiem vypočítať nasledovne:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{8} + \frac{5}{2}$$

Takže už vieme, že najväčšiu firmu máme zlúčiť nakoniec. Zvyšok je už obyčajná indukcia. Zoberieme zvyšných $n - 1$ firiem z nich najväčšiu zlúčime nakonci, ...