

# Domáca úloha č. 5

1-AIN-105, Zima 2021

Termín: 4.1.2022, 23:59

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Polynomiálne redukcie.** V tejto úlohe sa budeme zaoberať niekoľkými párami problémov  $A, B$ , pre ktoré ste na prednáškach alebo cvičeniach videli redukciu  $A \leq_p B$  (všetky tieto redukcie sú spísané v poznámkach na stránke predmetu). Pre každý pár je zadaný vstup  $x$  pre problém  $A$  a vašou úlohou je:

- Zostrojiť vstup  $f(x)$  pre problém  $B$  podľa konštrukcie prezentovanej v poznámkach.
- Zistiť, či  $f(x)$  je pozitívna alebo negatívna inštancia problému  $B$ .
- Ak je odpoveď “áno”, nájdite príslušný kombinatorický objekt, ktorý demonštruje riešenie problému  $B$  pre vstup  $f(x)$  a ukážte, ako sa toto riešenie vzťahuje k riešeniu problému  $A$  pre vstup  $x$ .  
Napríklad pre  $A = \text{HAM}$ ,  $B = \text{TSP-D}$ , ukážte obchôdzku obchodného cestujúceho pre graf  $f(x)$  s požadovanou dĺžkou a ukážte, ako sa táto obchôdzka zmení na Hamiltonovskú kružnicu v pôvodnom grafe.
- Ak je odpoveď “nie”, zdôvodnite ju.

- a)  $A = \text{HAM}$ ,  $B = \text{TSP-D}$ ,  $x$  je neorientovaný graf  $G = (V, E)$ ,  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$
- b)  $A = 3\text{-SAT}$ ,  $B = \text{VC}$ ,  $x = (u_1 \vee u_2 \vee \neg u_3) \wedge (u_1 \vee \neg u_2 \vee u_4) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee \neg u_4) \wedge (u_3 \vee u_1 \vee \neg u_2)$
- c)  $A = 3\text{-SAT}$ ,  $B = \text{SUBSET-SUM}$ ,  $x = (u_1 \vee u_2 \vee \neg u_3) \wedge (u_1 \vee \neg u_2 \vee u_4) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee \neg u_4) \wedge (u_3 \vee u_1 \vee \neg u_2)$
- d)  $A = \text{SUBSET-SUM}$ ,  $B = \text{COIN}$ ,  $x$ : set  $S = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ , cieľová suma  $T = 9$

2. [20 bodov] **Najdlhšia jednoduchá cesta.** Uvažujme nasledujúci problém: Daný je neorientovaný ohodnotený graf  $G = (V, E)$  a dva vrcholy  $u$  a  $v$ . Váhy hrán môžu byť kladné aj záporné. Úlohou je nájsť najdlhšiu jednoduchú cestu z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ . (Jednoduchá cesta je taká cesta, v ktorej sa žiaden vrchol neopakuje.)

- a) Sformulujte tento problém ako rozhodovací problém.
- b) Ukážte, že váš rozhodovací problém je v NP.
- c) Ukážte, že váš rozhodovací problém je NP-ťažký.

3. [20 bodov] **Programátorská úloha.** Uvažujme nasledujúce dva rozhodovacie problémy:

**CLIQUE:** Vstupom je graf a číslo  $k$ . Obsahuje graf kliku veľkosti  $k$ ? (Klika je taká množina vrcholov, kde je každý vrchol susedný s každým.)

**VERTEX-COVER:** Vstupom je graf a číslo  $k'$ . Dá sa vybrať podmnožina vrcholov  $X$  s veľkosťou najviac  $k'$  tak, aby každá hrana mala aspoň jeden z koncov v  $X$ ?

Dostanete vstup pre problém **CLIQUE**. Vašou úlohou je prerobiť ho na vstup pre **VERTEX-COVER** tak, aby odpoveď pre oba vstupy bola rovnaká.

**Formát vstupu:** Na prvom riadku sú čísla  $n, m, k$ , kde  $n$  je počet vrcholov grafu,  $m$  je počet hrán a  $k$  je požadovaná veľkosť kliky. Nasleduje  $m$  riadkov. Každý z nich obsahuje dve čísla—čísla koncových vrcholov jednej hrany. Vrcholy grafu majú čísla  $1, 2, \dots, n$ . Môžete predpokladať, že graf neobsahuje násobné hrany a sľučky.

**Formát výstupu:** Na prvý riadok vypíšte čísla  $n', m', k'$ , kde  $n'$  je počet vrcholov nového grafu,  $m'$  je počet jeho hrán a  $k'$  je maximálny počet vrcholov pre množinu pokrývajúcu hrany. Následne vypíšte  $m'$  riadkov. Každý z nich má obsahovať dve čísla—čísla koncových vrcholov jednej hrany. Vrcholy grafu majú čísla  $1, 2, \dots, n'$ . Váš graf môže mať najviac 60 vrcholov a nesmie obsahovať hrany a sľučky. Taktiež  $k'$  musí byť nezáporné celé číslo.

**Obmedzenia a bodovanie:** Na získanie plného počtu bodov je nutné, aby váš program dal správnu odpoveď pre všetky vstupy, kde  $n$  je najviac 40.

**Príklad vstupu:**

```
4 4 3
1 2
1 3
2 3
4 3
```

**Príklad výstupu:**

```
4 3 2
1 2
2 3
3 4
```

Vo vstupnom grafe existuje klika veľkosti 3 (vrcholy 1, 2, 3), taktiež tam existujú kliky veľkosti 0, 1, 2. Hrany výstupného grafu sa dajú pokryť pomocou vrcholov 1 a 2. Takže odpoveď na oba vstupy je áno.

## Všeobecné pokyny

**Písomné úlohy.** Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezabudnite na analýzu zložitosti algoritmu.

Písomné úlohy odovzdávajte do Google Classroom pokiaľ možno *ako jeden PDF dokument*. Na neskoru odovzdané riešenia sa nebude prihliadať.

**Programátorské úlohy.** Pri programátorských úlohách je vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez web stránku predmetu na <http://compbio.fmph.uniba.sk/vyuka/eaz/assignments.php>, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Navyše si dajte pozor, či v systéme máte správne vyplnené meno a priezvisko. Zoznam programovacích jazykov a inštrukcie k tomu, ako presne má program vyzerieť, nájdete na stránke <https://testovac.ksp.sk/wiki/odovzdavanie-info/>.