

Domáca úloha č. 2

2-AIN-105, Zima 2014

Termín: 20.11.2013, 23:59, I-7

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [10 bodov] Pre každý z nasledujúcich problémov zistite a dokážte, či pre uvedený problém je daný greedy algoritmus správny (dokážte správnosť algoritmu alebo uveďte kontrapríklad). Ak daný algoritmus nie je správny, navrhните korektný, efektívny algoritmus na riešenie daného problému (nezabudnite ukázať jeho správnosť a na odhad zložitosti).

- a) **Burza akcií.** Na burze je možné obchodovať s akciami n firiem. Ceny akcií sa menia raz denne, pričom vždy môžeme predať (ak vlastnime) alebo nakúpiť (ak si môžeme dovoliť) ľubovoľný (aj neceločíselný) počet akcií ktorejkoľvek firmy za aktuálnu cenu (nákupná aj predajná cena je rovnaká). Vďaka novému modelovaciemu softvéru ALIBABA vieme predpovedať ceny akcií na m dní dopredu: $v_{i,j}$ je predpokladaná cena akcií i -tej firmy v j -ty deň. Zistite, koľko môžeme (za predpokladu, že sa softvér nemýlil) najviac zarobiť, ak by sme prvý deň mali k dispozícii k eur (pričom posledný deň už iba predáme všetky akcie, ktoré vlastnime)

Algoritmus. Každý j -ty deň predáme všetky akcie ktoré práve vlastnime a (okrem posledného dňa) nakúpime čo najviac akcií firmy i s najväčšou hodnotou $v_{i,j+1} - v_{i,j}$.

- b) **Plátanie hadíc.** Na nemenovanej fakulte požiarňa inšpekcia našla deravú požiarňa hadicu. Keďže peňazí je málo, údržba sa rozhodla hadicu zaplatať. Hadica má k malých dier vo vzdialenostiach $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ centimetrov od začiatku. Máme k dispozícii záplaty, ktoré pokrývajú 5 cm dĺžky. Cieľom je zalepiť všetky diery s použitím najmenšieho možného počtu záplat.

Algoritmus. Položíme ľavý koniec záplaty na najľavejšiu diery. Zmažeme zo zoznamu všetky diery pokryté záplatou a opakujeme, až kým neostanú žiadne diery.

- c) **Výber prednášok.** Zo sady n možných prednášok chceme vybrať neprekrývajúce sa prednášky s čo najväčším súčtom kreditov. Každá prednáška je daná časom jej začiatku a konca $s_i < f_i$ a počtom kreditov k_i . Dve prednášky a a b sa neprekrývajú, ak jedna skončí pred tým ako druhá začne ($f_a < s_b$ alebo $f_b < s_a$).

Algoritmus. Prednášky utriedime primárne podľa času konca, sekundárne podľa počtu kreditov. Následne vyberáme vždy vyberáme prvú prednášku v (utriedenom) poradí, ktorá sa neprekrýva s už vybranými prednáškami.

1. [10 bodov] Pre každú z nižšie uvedených rekurencií odvodte čo najtesnejší asymptotický horný odhad pre $T(n)$. Predpokladajte, že $T(1) = \Theta(1)$ and $T(0) = \Theta(1)$. V prípade, že sa rozhodnete aplikovať master theorem, môžete zanedbať dolné a horné celé časti. Zdôvodnite svoje odpovede.

- a) $T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$

- b) $T(n) = 8T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^3 \sqrt[3]{n}$

- c) $T(n) = 27T(\lfloor n/3 \rfloor) + n^2$

3. [20 bodov] **Programátorská úloha** (viď všeobecné pokyny). Tímovej súťaže sa zúčastní n študentov, ktorí vytvoria $n/3$ trojčlenných tímov (n je deliteľné tromi). Každý zo študentov má *silu*, čo je kladné celé číslo vyjadrujúce úroveň jeho schopností (väčšie je lepšie). *Sila tímu* je súčet síl najsilnejšieho a najslabšieho člena tímu, t.j. ak tím pozostáva z členov so silami a, b, c , tak sila tímu je $\max(a + b + c) + \min(a, b, c)$. Tím s ostro väčšou silou *pobije* tím s menšou silou.

Na vstupe sú dané sily n študentov. *Supertím* je zložený z prvých troch študentov v zozname. Ostatní študenti nemajú supertím radi, preto sa chcú rozdeliť do tímov tak, aby najväčší možný počet tímov pobilo supertím.

Formát vstupu. V prvom riadku vstupu je číslo n deliteľné tromi. Nasleduje n riadkov, kde v každom riadku je číslo s_i —sila i -teho študenta. Môžete predpokladať $0 < s_i \leq 1000000$.

Formát výstupu. Vypíšte jeden riadok, ktorý obsahuje maximálny počet tímov, ktoré môžu pobiť supertím.

Obmedzenia a bodovanie. Na zisk plného počtu bodov je nutné, aby váš program dal v časovom limite správnu odpoveď pre vstupy, kde $1 \leq n \leq 99$. Na zisk polovice bodov je nutné, aby váš program dal v časovom limite správnu odpoveď pre vstupy, kde $1 \leq n \leq 15$.

Príklad.

vstup:

6
5
10
6
2
11
3

výstup:

0

(Sila supertímu je 15, ostatní môžu zostaviť len jeden tím so silou 12.)

vstup:

9
30
20
10
103
102
101

13

12

11

výstup:

2

(Sila supertímu je 40, ostatní sa môžu rozdeliť do dvoch tímov, kde jeden tím môže napríklad mať členov so silami 103, 102, 13 (celková sila 116) a druhý tím bude mať členov 101, 12, 11 (celková sila 112)).

Hint. Ak nevíete s úlohou pohnúť, skúste si ju najprv vyriešiť pre tímy veľkosti 2, kde sila tímu je súčet síl jeho členov.

Všeobecné pokyny

Písomné úlohy. Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zřejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezapudnite na analýzu zložitosti algoritmu.

Písomné úlohy odovzdávajúte *na papieri* (či už vytlačené alebo písané rukou) do krabice pred kanceláriou I-7 v stanovenom termíne. Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať. Nezapudnite jasne napísať svoje plné meno a priezvisko na prvú stranu a svoje riešenia pevne zopnúť spinkovacím strojkom.

Programátorské úlohy. Pri programátorských úlohách je vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie `foja.dcs.fmph.uniba.sk/eval`, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Navyše si dajte pozor, či v systéme máte správne vyplnené meno a priezvisko (sekcia Mój účet). Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii Návod.