# Rozdeľuj a panuj

**Rozdeľuj.** Rozdeľ problém na niekoľko menších podproblémov.

**Panuj.** Každý podproblém vyrieš samostatne rekurzívnym volaním.
Ak sú podproblémy dostatočne malé, vyrieš ich priamočiaro.

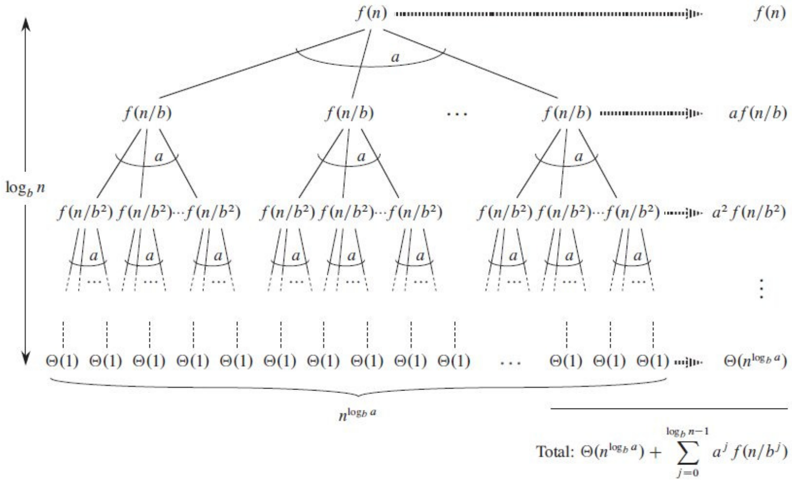
**Kombinuj.** Skombinuj riešenia menších podproblémov do riešenia pôvodného veľkého problému.

## Theorem

*Hlavná veta (master theorem): Nech* $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, $T(1) = \Theta(1)$. *Nech* $k = \log_b a$. *Potom:*

1. *Ak* $\boxed{f(n) \in O(n^{k-\varepsilon})}$ *pre niektoré* $\varepsilon > 0$, *potom* $\boxed{T(n) \in \Theta(n^k)}$.
2. *Ak* $\boxed{f(n) \in \Theta(n^k)}$, *potom* $\boxed{T(n) \in \Theta(f(n) \log n)}$.
3. *Ak* $\boxed{f(n) \in \Omega(n^{k+\varepsilon})}$ *pre niektoré* $\varepsilon > 0$ *a platí podmienka regularity, potom* $\boxed{T(n) \in \Theta(f(n))}$.

*Podmienka regularity: Existuje* $c < 1$ *také, že pre všetky dostatočne veľké* $n$ *platí* $af(n/b) \leq cf(n)$.
Poznámka: Veta platí aj v prípade rozumných usporiadaní dolných a horných celých častí - viď napr. CLRS2 4.4.2.



$f(n)$
$a$
$f(n/b)$ $f(n/b)$ ... $f(n/b)$
$af(n/b)$
$a$ $a$ $a$
$\log_b n$
$f(n/b^2)$ $f(n/b^2)$ ... $f(n/b^2)$
$a^2 f(n/b^2)$
$\Theta(1)$ $\Theta(1)$ $\Theta(1)$ ... $\Theta(1)$
$\Theta(n^{\log_b a})$
$n^{\log_b a}$
Total: $\Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$

```
function closest_pair(l,r)
  // Find the closest pair in P[l..r]
  // assume P[l..r] is sorted by x-coordinate
  if size(P)<2 then return infinity;
  // Divide: midx will be a dividing line
  mid:=(l+r)/2; midx:=P[mid].x;
  dl:=closest_pair(l,mid); dr:=closest_pair(mid+1,r);
  // as a side effect, P[l..mid] and P[mid+1..r]
  // are now sorted by y-coordinate
  delta:=min(dl,dr);
  QL:=select_candidates(l,mid,delta,midx);
  QR:=select_candidates(mid+1,r,delta,midx);
  dm:=delta_m(QL,QR,delta);
  // use merge make P[l..r] sorted by y-coordinate
  merge(l,mid,r);
  return min(dm,dl,dr);
```

```
function select_candidates(l,r,delta,midx)
  // From P[l..r] select all points which are
  // in the distance at most delta from midx line
  create empty array Q;
  for i:=l to r do
    if (abs(P[i].x-midx)<=delta)
      add P[i] to Q;
  return Q;
```

```
function delta_m(QL,QR,delta)
  // Are there two points p in QL, q in QR such that
  // d(p,q)<=delta? Return closest such pair.
  // Assume QL and QR are sorted by y coordinate
  j:=1; dm:=delta;
  for i:=1 to size(QL) do
    p:=QL[i];
    // find the bottom-most candidate from QR
    while (j<=n and QR[j].y<p.y-delta) do
      j:=j+1;
    // check all candidates from QR starting with j
    k:=j;
    while (k<=n and QR[k].y<=p.y+delta) do
      dm:=min(dm,d(p,QR[k]));
      k:=k+1;
  return dm;
```

```
//-------- main ---------
// P contains all the points
sort P by x-coordinate;
return closest_pair(1,n);
```

*Časová zložitosť: Nech $T(n)$ je čas potrebný na vyriešenie problému pre $n$ bodov.*

- *Rozdeľuj:* $\Theta(1)$
- *Panuj:* $2T(n/2)$
- *Skombinuj:* $\Theta(n)$

*Teda* $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$ *(master theorem).*

# Opakovanie: Greedy algoritmy

- v každom kroku vezmeme lokálne optimálny krok
- ľahké na implementáciu
- obvykle veľmi efektívne (časová zložitosť)
- metóda sa často nedá použiť
- hlavný problém: *dokázať správnosť*

Príklady použitia:

- Výber aktivít $\Theta(n \log n)$
- Najlepšie Huffmanovo kódovanie $\Theta(n \log n)$
- Rozmieňanie peňazí (niektoré systémy) $\Theta(m)$

# Opakovanie: Dynamické programovanie

- rozkladáme problém na podproblémy
- počítame optimálne riešenia pomocou rekurencií vo veľkej matici podproblémov
- ľahké na implementáciu
- hlavný problém: *vymyslieť správny podproblém*

Príklady použitia:

- Rozmieňanie peňazí (všeobecné) $\Theta(mS)$
- Najdlhšia spoločná podpostupnosť $\Theta(mn)$
- Najkratšia triangulácia $\Theta(n^3)$

# Opakovanie: Rozdeľuj a panuj

- rozdeľ problém na menšie podproblémy, vyrieš rekurzívne a skombinuj čiastkové riešenia
- efektívne
- niekedy ťažké na implementáciu, veľký overhead na rekurziu
- hlavný problém: *analýza časovej zložitosti*

Príklady použitia:

- Triedenie (merge sort, quick sort) $\Theta(n \log n)$
- Násobenie veľkých čísel $\Theta(n^{1.58\ldots})$
- Násobenie matíc (Strassenov algoritmus) $\Theta(n^{2.81\ldots})$
- Najbližší pár bodov $\Theta(n \log n)$
- Výber $k$-teho prvku $\Theta(n)$