NP úplnosť: osnova

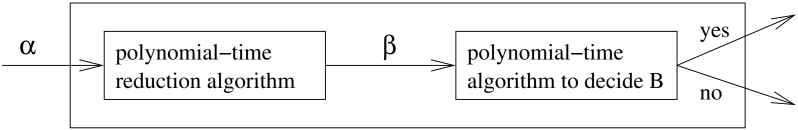
- Rozhodovacie vs. optimalizačné problémy.
- Trieda problémov P.
- Nedeterministické výpočty a trieda problémov NP.
- Polynomiálne transformácie a NP-úplnosť.
- Cookova veta: Existuje NP-úplný problém.
- Ako ukázať, že problém je NP-úplný?
- Základné "portfólio" NP-úplných problémov.

Redukcie

Definícia

Rozhodovací problém A je polynomiálne redukovateľný na problém B ($A \leq_p B$) ak existuje funkcia f vypočítateľná v polynomiálnom čase taká, že:

- zobrazuje každý vstup A na nejaký vstup B
- A odpovedá na x **áno** práve vtedy keď B odpovedá na $f(x)$ **áno**



polynomial–time algorithm to decide A

NP-ťažké a NP-úplné problémy

Problém Q je NP-ťažký akk každý problém $R \in Q$ platí $R \leq_p Q$.

Ak NP-ťažký problém Q patrí do triedy NP, hovoríme, že je NP-úplný.

SAT

Def: $\boxed{\text{SAT}}$ (splniteľnosť) Uvažujme booleovské premenné $(u_1, \ldots, u_m)$ a logickú formulu f.
Problém: Existuje priradenie hodnôt premenných také, aby f bola splnená?

Veta (Cook)

SAT je NP-úplný

Náčrt dôkazu:

Potrebujeme dokázať:

1. SAT$\in$NP –alebo–
   Existuje nedeterministický polynomiálny algoritmus, ktorý rieši SAT.
2. SAT je NP-ťažký –alebo–
   pre ľubovoľný problém $Q \in NP$: $Q \leq_p \mathrm{SAT}$

1 SAT∈NP

```
for i:=1 to m do
  choose u[i] between 0 and 1; // 0 means false,
                               // 1 means true

evaluate formula f with assignment
(u[1],u[2],...,u[m])

if f is satisfied then ACCEPT
                  else REJECT
```

$\boxed{2}$ SAT je NP-ťažký

Uvažujme $Q \in \mathrm{NP}$
$\Longrightarrow$existuje polynomiálny nedeterministický algoritmus, ktorý rieši Q

Ako taký algoritmus zapíšeme?

- Každý register má v sebe uložené číslo konštantnej veľkosti (registre označíme $R_1, R_2, \ldots$)
- Program je nemeniaca sa postupnosť príkazov s konštantným počtom očíslovaných riadkov
- Na začiatku je vstup uložený v prvých n registroch (n je veľkosť vstupu)
- Program beží nanajvýš $p(n)$ krokov
  a pristupuje najviac ku $q(n)$ prvým registrom
  ($p(n)$ a $q(n)$ sú polynómy závisiace od n)

- Sada inštrukcií:
    - ACCEPT
    - REJECT
    - GOTO m
    - IF $R_\ell = 0$ THEN GOTO m
    - CHOOSE R_l BETWEEN 0 AND 1
    - základné aritmetické operácie (napr. $R_\ell := R_u + R_v$, $R_\ell := R_u * R_v$)
    - nejaký mechanizmus na adresáciu prvých $q(n)$ registrov (detaily sú mierne komplikované, ale dá sa)

$\boxed{2}$ SAT je NP-ťažký: $Q \leq_p \mathrm{SAT}$

Chceme:

- Daný je program A, ktorý rieši problém Q v polynomiálnom čase
  a inštancia $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Vyrobíme veľkú logickú formulu f, ktorá "simuluje" program A na vstupe x;
- A dosiahne ACCEPT $\iff$ f je splniteľná

Premenné formuly f:

- $Q[i, k]$ – v čase i program vykonáva riadok k
- $S[i, j, k]$ – v čase i má register R_j hodnotu k

Formula f bude konjunkcia ("AND") niekoľkých menších formúl t.j. všetky tieto menšie formuly musia byť splnené, aby formula f bola splnená

$\boxed{1}$ "V každom čase i program vykonáva práve jeden riadok."

$\boxed{\neg(Q[i,k] \wedge Q[i,\ell])}$ pre všetky i a $k \neq \ell$

$\boxed{2}$ "V každom čase i každý register obsahuje práve jednu hodnotu."

$\boxed{\neg(S[i,j,k] \wedge S[i,j,l])}$ pre všetky i, j a $k \neq \ell$

$\boxed{3}$ V čase 0:

- Program vykonáva riadok 1: $\boxed{Q[0,1]}$
- Prvých n registrov má hodnoty $x_1, \ldots, x_n$:
  $\boxed{S[0,1,x_1] \wedge S[0,2,x_2] \wedge \cdots \wedge S[0,n,x_n]}$
- Ostatné registre majú hodnotu 0:
  $\boxed{S[0,n+1,0] \wedge S[0,n+2,0] \wedge \cdots \wedge S[0,q(n),0]}$

$\boxed{4}$ "Po $p(n)$ krokoch program dosiahne riadok s inštrukciou ACCEPT"

$\boxed{Q[p(n),k]}$ k je riadok s inštrukciou "ACCEPT"

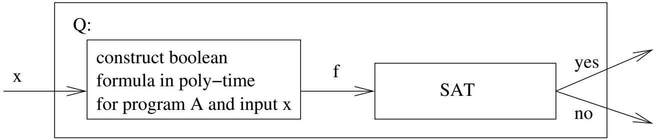
$\boxed{5}$ "Stav počítača sa mení v čase v súlade s programom."

k-**ty riadok**	**Formula**
ACCEPT alebo REJECT	$Q[i,k] \Rightarrow Q[i+1,k]$
GOTO ℓ	$Q[i,k] \Rightarrow Q[i+1,\ell]$
IF $R_\ell = 0$ THEN GOTO m	$Q[i,k] \wedge S[i,\ell,0] \Rightarrow Q[i+1,m]$ $Q[i,k] \wedge \neg S[i,\ell,0] \Rightarrow Q[i+1,k+1]$
CHOOSE R_ℓ	$Q[i,k] \Rightarrow Q[i+1,k+1] \wedge$ $(S[i+1,\ell,0] \vee S[i+1,\ell,1])$
atď. pre ďalšie inštrukcie	

SAT je NP-ťaždký: zhrnutie

Vyššieuvedeným postup skonštruujeme pre daný algoritmus A a vstup x formulu f:

- Postup možno zrealizovať v polynomiálnom čase v závislosti od n.
- Výsledná formula má polynomiálnu veľkosť v závislosti od n.
- f je splniteľná $\iff$ A akceptuje x



$\Longrightarrow$**Ukázali sme:** $Q \leq_p \mathrm{SAT}$ **pre ľubovoľné** $Q \in NP$

Ako dokázať, že problém Q je NP-ťažký?

1. Vyberme si problém N o ktorom už vieme, že je NP-úplný
2. Ukážeme $N \leq_P Q$:
   - Navrhneme polynomiálny algoritmus, ktorý prerobí vstup x pre problém N na vstup $f(x)$ pre problém Q.
   - Dokážeme: Ak je x pozitívny vstup pre N, potom

     $f(x)$ je pozitívny vstup pre Q
   - Dokážeme: Ak je x negatívny vstup pre N, potom

     $f(x)$ je negatívny vstup pre Q

     —ALEBO—

     Ak $f(x)$ je pozitívny vstup pre Q, potom

     x je pozitívny vstup pre N
3. Keďže N je NP-úplný, Q musí byť NP-ťažký.

Dokončenie dôkazu NP-úplnosti: $Q \in NP$

4a Vytvoríme polynomiálny nedeterministický algoritmus riešiaci Q.

—ALEBO—

4b Pre každý vstup zadefinujeme certifikát polynomiálnej veľkosti.

5b Vytvoríme polynomiálny algoritmus, ktorý pre daný vstup x a certifikát y overí tento certifikát v polynomiálnom čase.

Sedem základných NP-úplných problémov

SAT	Vstup:	Booleovská formula f
	Problém:	Je f splniteľná?
3-SAT	Vstup:	Booleovská formula f vo forme: $(a_{1,1} \vee a_{1,2} \vee a_{1,3}) \wedge \cdots \wedge (a_{n,1} \vee a_{n,2} \vee a_{n,3})$
	Problém:	Je f splniteľná?
VC	Vstup:	Graf $G = (V, E)$; číslo K
	Problém:	Existuje množina vrcholov V' veľkosti $\leq K$ taká, že pre ľubovoľnú hranu $e = (u, v) \in E$, $u \in V'$ alebo $v \in V'$?
HAM	Vstup:	Graf $G = (V, E)$
	Problém:	Existuje v grafe Hamiltonovská kružnica?

Sedem základných NP-úplných problémov (pokrač.)

TSP-D	Vstup:	Ohodnotený graf $G = (V, E)$; číslo K
	Problém:	Existuje obchôdzka dĺžky $\leq K$?
CLIQUE	Vstup:	Graf $G = (V, E)$; číslo K
	Problém:	Obsahuje G úplný podraf o veľkosti $\geq K$ vrcholov?
SUBSET-SUM	Vstup:	n čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$; cieľ t
	Problém:	Existuje podmnožina čísel $s_1, \ldots, s_n$ so súčtom presne t?