# Univerzálny RAM

**Univerzálny RAM** (alebo SIM) je RAM program, ktorý dostane na vstupe program $P$ a číslo $x$ and:

- ak sa $P$ zacyklí na $x$, $\text{SIM}(P, x)$ sa zacyklí
- ak $P$ zastaví na $x$ and vráti $y$, $\text{SIM}(P, x)$ zastaví a vráti $y$

**Univerzálny RAM je rekurzívny.**

- RAM program je v zásade jednoduchý asemblér
- Napíšeme simulátor v nejakom "rozumnom" jazyku
- Z Churchovej tézy—existuje RAM implementujúci to isté

**Možné modifikácie univerzálneho RAM.**

- simuluj iba prvých $t$ krokov ($\text{SIM}(P, x, t)$)
- môže odpovedať rôzne otázky o stave simulovaného RAMu po $t$ krokoch

# Univerzálne RAMy sú jednoduché

Očakávali by sme, že takéto simulátory sú zložité programy.
**Nie je to pravda**: ľudia dokonca súťažia, kto napíše "jednoduchší" simulátor (menší počet riadkov kódu, menší počet registrov, ...)
**Ako implementovať SIM s malým počtom registrov?**

- Všetky registre simulovaného stroja uložíme v jedinom registri:

$$2^{R_1} \cdot 3^{R_2} \cdot \dots \cdot p_i^{R_i} \cdot \dots$$

- Zvyšok simulácie bude potrebovať iba malý počet registrov — **povedzme** $< 1000$

# Ďalší nevypočítateľný problém: Koľko pamäte program používa?

$$\text{IS_BIG}_{10000}(P,x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } P \text{ použije} > 10000 \text{ na vstupe } x \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

**Tvrdenie:** Funkcia $\text{IS_BIG}_{10000}$ nie je vypočítateľná.
**Dôkaz:** Redukciou z $\mathrm{HALT}$
(t.j. chceme ukázať $\mathrm{HALT} \leq^T \text{IS_BIG}_{10000}$)

- **Chceme:** RAM program pre $\mathrm{HALT}$ s $\text{IS_BIG}_{10000}$ ako procedúrou.

```
HALT(P,x):
  Q:=encoding of the program
       ‘‘Q(x): SIM(P,x); increment R1,...,R10001;’’
  return IS_BIG_10000(Q,x);
```

# $\text{IS_BIG}_{10000}$ pokr.

```
HALT(P,x):
  Q:=encoding of the program
       ``Q(x): SIM(P,x); increment R1,...,R10001;''
  return IS_BIG_10000(Q,x);
```

- - **Predpokladajme $P$ zastaví na vstupe $x$.**
    Potom $\text{SIM}(P,x)$ tiež zastaví a teda
    program $Q$ zastaví a použije $\geq 10001$ registrov.
    $\Rightarrow \text{IS_BIG}_{10000}(Q,x) = 1$
  - **Predpokladajme $P$ nezastaví na vstupe $x$.**
    Potom sa $\text{SIM}(P,x)$ zacyklí a použije len malý počet registov
    $\Rightarrow \text{IS_BIG}_{10000}(Q,x) = 0$
- Teda $\mathrm{HALT} \leq^T \text{IS_BIG}_{10000}$ a keďže $\mathrm{HALT}$ nie je vypočítateľná, $\text{IS_BIG}_{10000}$ takisto nie je vypočítateľná.

# Férovejší prístup k otázke "Koľko pamäte program používa"?

**Def:** Program $P$ **pretečie** na vstupe $x$ ak použije $> 10000$ registrov alebo **použije hodnotu** $> 10000$ **v jednom z registrov**.

$$\text{IS_BIG}_{10000,10000}(P,x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } P \text{ pretečie na } x \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

**Dobrá správa:** Táto funkcia je vypočítateľná!
**Myšlienka:** Ak by sme vedeli, že sa $P$ vždy zastaví, tak by sme ho mohli simulovať a počas behu kontrolovať pretečenie.

# Zacyklenie bez pretečenia

**Tvrdenie:** Ak program $P$ s $k$ riadkami beží na vstupe $x$ bez pretečenia $> k.10000^{10001}$ krokov, tak:

- sa zacyklí a
- nikdy nepretečie.

**Dôkaz:**

- Stav RAMu je jednoznačne daný:
  - obsahom všetkých neulových registrov
  - riadkom, ktorý sa práve vykonáva
- Ak vieme stav $S_i$ RAMu v čase $i$, potom stav $S_{i+1}$ v čase $i+1$ vieme jednoznačne určiť.

# Zacyklenie bez pretečenia

- **Teda:** Ak sa rovnaký stav RAMu vyskytne v dvoch rôznych časoch $i < j$, potom sa postupnosť stavov:

$$S_i, S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots, S_{j-1}$$

  bude donekonečna opakovať a program sa zacyklí.
- **Koľko existuje "nepretečených" stavov RAMu?**

$$M = k \cdot 10000^{10001}$$

- Takže po $M + 1$ krokoch, ak RAM nepretiekol alebo sa nezastavil, **tak stav $S_{M+1} = S_i$ pre niektoré $i \leq M$.** (Dirichletov princíp)
- $\Rightarrow$ **program sa bude cykliť donekonečna a nikdy nepretečie.**

# $IS_BIG_{10000,10000}$ je vypočítateľná!

```
IS_BIG_10000,10000(P,x):
  k := number of lines of P;
  SIM(P,x,k.10000^10001+1);

  if P did overflow during simulation
     return 1;
  else
     return 0;
```

# Vypočítateľnosť: Zhrnutie

- Churchova-Turingova téza: všetko je Turingov stroj (...alebo RAM)
- Niektoré problémy (napr. HALT) nie sú vypočítateľné
- Nevypočítateľnosť môžeme dokazovať pomocou Turingových redukcií
- Niekedy malá zmena môže znamenať rozdiel medzi vypočítateľnou a nevypočítateľnou funkciou.
- Univerzálne RAMy nám môžu pomôcť pre dokazovaní, že funkcia je vypočítateľná aj pri dokazovaní, že funkcia nie je vypočítateľná.

# "Vzor" dôkazu správnosti greedy algoritmu

**Lema:** Predpokladajme, že greedy algoritmus vráti riešenie $G$. Potom existuje optimálne riešenie, ktoré sa s riešením $G$ zhoduje na prvých $k$ voľbách.

**Dôkaz: Matematickou indukciou podľa $k$.**

Báza indukcie. Pre $k = 0$ – ľubovoľné optimálne riešenie.

Indukčný krok. (Prepokladajme, že sme neurobili chybu pri prvých $k$ voľbách, potom aj $(k+1)$-vá voľba je OK.)

- Predpokladajme, že existuje optimálne riešenie $OPT$, ktoré sa zhoduje s $G$ na prvých $k$ voľbách.
- Vyrobíme riešenie $OPT'$:
  - $OPT'$ má rovnakú hodnotu ako $OPT$ (a preto je tiež optimálne)
  - $OPT'$ súhlasí s $G$ na jednej ďalšej $(k+1)$-vej voľbe.

# Dynamické programovanie

1. Určíme podproblém.
   - aké sú rozmery matice, ktorú budeme vypĺňať?
   - aký je presný význam každého políčka matice?
   - kde v matici nájdeme riešenie pôvodnej úlohy?
2. Vyriešime podproblém za pomoci iných podproblémov.
   Ako vypočítame jedno políčko matice z iných políčiek matice?
3. Bázové podproblémy. Ktoré políčka nemožno vypočítať pomocou vzťahov z predchádzajúceho kroku? Aké hodnoty by mali obsahovať?
4. Vyberieme poradie vypĺňania. V akom poradí musíme maticu vypĺňať tak, aby sme v každom kroku mali vypočítané všetky políčka, ktoré potrebujeme na výpočet daného políčka?

# Master theorem

Nech $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, $T(1) = \Theta(1)$. Nech $k = \log_b a$.
Potom:

1. Ak $\boxed{f(n) \in O(n^{k-\varepsilon})}$ pre niektoré $\varepsilon > 0$, potom $\boxed{T(n) \in \Theta(n^k)}$.
2. Ak $\boxed{f(n) \in \Theta(n^k)}$, potom $\boxed{T(n) \in \Theta(f(n) \log n)}$.
3. Ak $\boxed{f(n) \in \Omega(n^{k+\varepsilon})}$ pre niektoré $\varepsilon > 0$ a platí podmienka regularity, potom $\boxed{T(n) \in \Theta(f(n))}$.

## Podmienka regularity:

Existuje $c < 1$ také, že pre všetky dostatočne veľké $n$ platí $af(n/b) \leq cf(n)$.

## Poznámka:

Veta platí aj v prípade rozumných usporiadaní dolných a horných celých častí - viď napr. CLRS2 4.4.2.

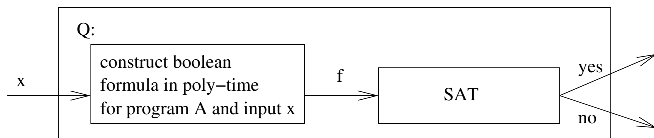
# Nedeterministický algoritmus pre riešenie TSP-D

```
function TSP-D
  visited[i]:=false for all vertices;
  last_visited:=1; visited[1]:=true;
  length:=0;
  repeat n-1 times
    choose next_visited between 1 and n;
    if visited[next_visited] then reject;
    //we cannot visit a single vertex twice
    visited[next_visited]:=true;
    length:=length+w(last_visited,next_visited);
    last_visited:=next_visited;
  length:=length+w(last_visited,1);
  if length<=B then accept;
               else reject;
```

# SAT je NP-ťaždký: zhrnutie

Vyššieuvedeným postup skonštruujeme pre daný algoritmus $A$ a vstup $x$ formulu $f$:

- Postup možno zrealizovať v polynomiálnom čase v závislosti od $n$.
- Výsledná formula má polynomiálnu veľkosť v závislosti od $n$.
- $f$ je splniteľná $\iff$ $A$ akceptuje $x$




$\Rightarrow$ **Ukázali sme: $Q \leq_p \mathrm{SAT}$ pre ľubovoľné $Q \in NP$**

# Ako dokázať, že problém $Q$ je NP-ťažký?

1. Vyberme si problém $N$ o ktorom už vieme, že je NP-úplný
2. Ukážeme $N \leq_P Q$:
   - Navrhneme polynomiálny algoritmus, ktorý prerobí vstup $x$ pre problém $N$ na vstup $f(x)$ pre problém $Q$.
   - Dokážeme: Ak je $x$ pozitívny vstup pre $N$, potom

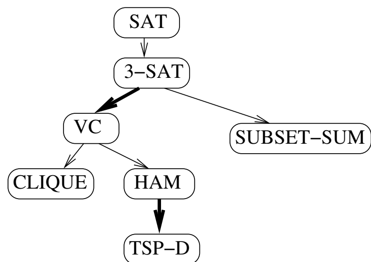
     $f(x)$ je pozitívny vstup pre $Q$
   - Dokážeme: Ak je $x$ negatívny vstup pre $N$, potom

     $f(x)$ je negatívny vstup pre $Q$

     —ALEBO—

     Ak $f(x)$ je pozitívny vstup pre $Q$, potom

     $x$ je pozitívny vstup pre $N$
3. Keďže $N$ je NP-úplný, $Q$ musí byť NP-ťažký.




A ⟶ B means reduction A to B

➡ means reduction shown already

# Diagonalizácia

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | [X] | X | | X | | ... |
| 1 | X | [X] | X | X | X | ... |
| 2 | | | [ ] | | | ... |
| 3 | | X | X | [X] | | ... |
| 4 | | X | X | X | [ ] | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

| NOTHALT | | | X | | X | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|

$H(i,j)$ – X, ak sa program $i$ zastaví na vstupe $j$

# Ako dokážete, že vaša obľúbená funkcia $Q$ nie je rekurzívna?

**Definícia:** Funkcia $A$ je **reducibilná (v Turingovom zmysle) na funkciu** $B$ (alebo $A \leq^T B$) ak existuje algoritmus, ktorý vypočíta $A$ tak, že používa $B$ ako procedúru.
**Note:** Rozdiely medzi $A \leq^T B$ a $A \leq_P B$:

- $\leq^T$ pre všetky problémy, nie len rozhodovacie.
- Žiadne obmedzenia na zložitosť.
- Žiadne obmedzenia na počet volaní funkcie $B$.

**Lema:** Ak $A$ nie je rekurzívna (nie je vypočítateľná) a $A \leq^T B$, potom $B$ nie je rekurzívna.

# Univerzálny RAM

**Univerzálny RAM** (alebo SIM) je RAM program, ktorý dostane na vstupe program $P$ a číslo $x$ and:

- ak sa $P$ zacyklí na $x$, SIM$(P, x)$ sa zacyklí
- ak $P$ zastaví na $x$ and vráti $y$, SIM$(P, x)$ zastaví a vráti $y$

**Univerzálny RAM je rekurzívny.**

- RAM program je v zásade jednoduchý asemblér
- Napíšeme simulátor v nejakom "rozumnom" jazyku
- Z Churchovej tézy—existuje RAM implementujúci to isté

**Možné modifikácie univerzálneho RAM.**

- simuluj iba prvých $t$ krokov (SIM$(P, x, t)$)
- môže odpovedať rôzne otázky o stave simulovaného RAMu po $t$ krokoch