

Domáca úloha č. 5

1-AIN-105, Zima 2019

Termín: na prvej skúške resp. mailom do termínu prvej skúšky

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Polynomiálne redukcie.** V tejto úlohe sa budeme zaoberať niekoľkými párami problémov A, B , pre ktoré ste na prednáškach alebo cvičeniach videli redukciu $A \leq_p B$ (všetky tieto redukcie sú spísané v poznámkach na stránke predmetu). Pre každý pár je zadaný vstup x pre problém A a vašou úlohou je:

- Zostrojiť vstup $f(x)$ pre problém B podľa konštrukcie prezentovanej v poznámkach.
- Zistiť, či $f(x)$ je pozitívna alebo negatívna inštancia problému B .
- Ak je odpoveď “áno”, nájdite príslušný kombinatorický objekt, ktorý demonštruje riešenie problému B pre vstup $f(x)$ a ukážte, ako sa toto riešenie vzťahuje k riešeniu problému A pre vstup x .
Napríklad pre $A = \text{HAM}$, $B = \text{TSP-D}$, ukážte obchádzku obchodného cestujúceho pre graf $f(x)$ s požadovanou dĺžkou a ukážte, ako sa táto obchádzka zmení na Hamiltonovskú kružnicu v pôvodnom grafe.
- Ak je odpoveď “nie”, zdôvodnite ju.

- a) $A = \text{HAM}$, $B = \text{TSP-D}$, x je neorientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$
- b) $A = \text{3-SAT}$, $B = \text{VC}$, $x = (u_1 \vee u_2 \vee \neg u_3) \wedge (u_1 \vee \neg u_2 \vee u_4) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee \neg u_4) \wedge (u_3 \vee u_1 \vee \neg u_2)$
- c) $A = \text{3-SAT}$, $B = \text{SUBSET-SUM}$, $x = (u_1 \vee u_2 \vee \neg u_3) \wedge (u_1 \vee \neg u_2 \vee u_4) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_2 \vee \neg u_4) \wedge (u_3 \vee u_1 \vee \neg u_2)$
- d) $A = \text{SUBSET-SUM}$, $B = \text{COIN}$, x : set $S = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, cieľová suma $T = 9$

2. [20 bodov] **Najdlhšia jednoduchá cesta.** Uvažujme nasledujúci problém: Daný je neorientovaný ohodnotený graf $G = (V, E)$ a dva vrcholy u a v . Váhy hrán môžu byť kladné aj záporné. Úlohou je nájsť najdlhšiu jednoduchú cestu z vrcholu u do vrcholu v . (Jednoduchá cesta je taká cesta, v ktorej sa žiaden vrchol neopakuje.)

- a) Sformulujte tento problém ako rozhodovací problém.
- b) Ukážte, že váš rozhodovací problém je v NP.
- c) Ukážte, že váš rozhodovací problém je NP-ťažký.

3. [20 bodov] **Programátorská úloha.** Uvažujme nasledujúce dva rozhodovacie problémy:

CLIQUE: Vstupom je graf a číslo k . Obsahuje graf kliku veľkosti k ? (Klika je taká množina vrcholov, kde je každý vrchol susedný s každým.)

VERTEX-COVER: Vstupom je graf a číslo k' . Dá sa vybrať podmnožina vrcholov X s veľkosťou najviac k' tak, aby každá hrana mala aspoň jeden z koncov v X ?

Dostanete vstup pre problém **CLIQUE**. Vašou úlohou je prerobiť ho na vstup pre **VERTEX-COVER** tak, aby odpoveď pre oba vstupy bola rovnaká.

Formát vstupu: Na prvom riadku sú čísla n, m, k , kde n je počet vrcholov grafu, m je počet hrán a k je požadovaná veľkosť kliky. Nasleduje m riadkov. Každý z nich obsahuje dve čísla—čísla koncových vrcholov jednej hrany. Vrcholy grafu majú čísla $1, 2, \dots, n$. Môžete predpokladať, že graf neobsahuje násobné hrany a sľučky.

Formát výstupu: Na prvý riadok vypíšte čísla n', m', k' , kde n' je počet vrcholov nového grafu, m' je počet jeho hrán a k' je maximálny počet vrcholov pre množinu pokrývajúcu hrany. Následne vypíšte m' riadkov. Každý z nich má obsahovať dve čísla—čísla koncových vrcholov jednej hrany. Vrcholy grafu majú čísla $1, 2, \dots, n'$. Váš graf môže mať najviac 60 vrcholov a nesmie obsahovať hrany a sľučky. Taktiež k' musí byť nezáporné celé číslo.

Obmedzenia a bodovanie: Na získanie plného počtu bodov je nutné, aby váš program dal správnu odpoveď pre vstupy, kde n je najviac 40.

Príklad vstupu:

```
4 4 3
1 2
1 3
2 3
4 3
```

Príklad výstupu:

```
4 3 2
1 2
2 3
3 4
```

Vo vstupnom grafe existuje klika veľkosti 3 (vrcholy 1, 2, 3), taktiež tam existujú kliky veľkosti 0, 1, 2. Hrany výstupného grafu sa dajú pokryť pomocou vrcholov 1 a 2. Takže odpoveď na oba vstupy je áno.

Všeobecné pokyny

Písomné úlohy. Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezabudnite na analýzu zložitosti algoritmu.

Písomné úlohy odovzdávajte *na papieri* (či už vytlačené alebo písané rukou) pod dvere kancelárie M-163 v stanovenom termíne. Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať. Nezabudnite jasne napísať svoje plné meno a priezvisko na prvú stranu a svoje riešenia pevne zopnúť spinkovacím strojčekom.

Programátorské úlohy. Pri programátorských úlohách je vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie (link na stránke predmetu s domácimi úlohami), kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Navyše si dajte pozor, či v systéme máte správne vyplnené meno a priezvisko (sekcia Môj účet). Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii Návod.