

## Vrcholové pokrytie (znova)

**Úloha:** Daný je graf  $G = (V, E)$

Nájdite vrcholové pokrytie  $C$  s minimálnym počtom vrcholov

Triviálne riešenie: Vyskúšať všetky možné podmnožiny  $V$   
( $O(2^n)$  možností)

Jednoduchý greedy algoritmus: 2-aproximácia

**Čo riešenia, ktoré fungujú rýchlo pre inštalácie, ktoré majú malé vrcholové pokrytie -  $k$  vrcholov?**

Prvotná idea: vyskúšať všetky podmnožiny  $V$  o veľkosti  $k$   
(rádovo  $O(n^k)$  možností)

**Ukážeme si algoritmus, ktorý funguje v čase  $O(2^k n)$**

**Idea:** pre každú hranu  $e = \{u, v\}$ , buď vrchol  $u$  alebo vrchol  $v$   
**musí byť vo vrcholovom pokrytí**

Prehľadávací strom má hĺbku max.  $k$  úrovní.

**Časová zložitosť:**  $O(2^k n)$

## Problémy riešiteľné so zafixovateľným parametrom

Problém je riešiteľný so **zafixovateľným parametrom**  $k$ , ak existuje algoritmus s časovou zložitou

$O(f(k).n^c)$  (1. typ) resp.  $O(f(k) + n^c)$  (2. typ)

kde  $n$  je veľkosť inštancie problému

$f(k)$  je (potenciálne exponenciálna) funkcia nezávislá od  $n$

$c$  je konštanta

Poznámka: ak existuje riešenie 1. typu, existuje aj riešenie 2. typu (nekonštruktívny / neužitočný dôkaz)

Parametrom zložitosti môže byť všeličo:

- veľkosť riešenia
- maximálny stupeň vrchola / tree-width parameter
- dimensionalita geometrického problému
- ...

## Hľadanie cesty dĺžky $k$

Daný graf  $G$ , konštant  $k$ ,  
počiatočný vrchol  $s$ , koncový vrchol  $t$

Nájdite cestu (bez opakovania vrcholov) z vrcholu  $s$  do vrcholu  $t$  s  $k$  vnútornými vrcholmi.

(Ak  $k = n - 2$ , potom Hamiltonovská cesta  $\Rightarrow$  NP-ťažký)

### Randomizovaný algoritmus:

1. Náhodne zafarbíme vrcholy  $k$  farbami
2. Hľadáme “pestrofarebnú” cestu, ktorá použije všetkých  $k$  farieb (v čase  $O(k!m)$ )

## Analýza algoritmu:

### Ak neexistuje cesta s $k$ vnútornými vrcholmi:

Potom neexistuje ani “pestrofarebná” cesta  
(nech vrcholy ofarbíme akokoľvek)  $\Rightarrow$  správna odpoveď nie

### Ak existuje cesta s $k$ vnútornými vrcholmi:

Pravdepodobnosť, že vrcholy ofarbíme tak, aby bola “pestrofarebná”:

$$k!/k^k \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k / k^k = \frac{1}{e^k} \Rightarrow \text{s pravdepodobnosťou } \geq 1/e^k$$

### Znížime chybu / opakujeme $e^k$ krát:

Pravdepodobnosť že urobíme chybu  $e^k$  krát po sebe:

$$(1 - 1/e^k)^{e^k} < (1/e^{1/e^k})^{e^k} = 1/e$$

(lebo  $1 - p < 1/e^p$ )

### Celková časová zložitosť: $O(e^k k! m)$