

Domáca úloha č. 1

2-AIN-205, Leto 2022

Termín: 22.3.2022, 12:00

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Nepodarené mince.** Jednocentové a dvojcentové mince sú drahšie na výrobu, ako je ich hodnota. Preto vrabce na strome čvirkajú, že v blízkej budúcnosti Európska komisia rozhodne o ich zrušení. Keďže v pokladniciach ostane voľná priehradka, namiesto nich sa uvažuje o zavedení 25 centovej mince. Výsledkom teda bude, že budeme mať mince o hodnote 5, 10, 20, 25, 50, 100 a 200 centov a všetky sumy sa budú zaokrúhľovať na najbližších 5 centov.

Predavačky v obchodoch sú dnes zvyknuté vydávať jednoduchým greedy algoritmom, to znamená že opakovane vyplácajú vždy najvyššiu mincu, ktorá ešte nepresiahne sumu, ktorú treba vyplatiť. Tento spôsob doteraz viedol k tomu, že zákazník dostal svoj výdavok rozmenený na najmenší možný počet mincí.

- a) Ukážte, že po zavedení novej 25 centovej mince už greedy metóda nepovedie k vyplateniu najmenším možným počtom mincí.
- b) Dokážte, že to nie je až také zlé: Vždy vyplatíme nanajvýš o jednu mincu viac, ako je optimálny počet.
2. [20 bodov] **O byrokratoch.** V tejto úlohe budeme rozdeľovať prácu medzi k úradníkov. Je potrebné vykonať n administratívnych úkonov, pričom sú dané čísla a_1, \dots, a_n , kde číslo a_i reprezentuje dĺžku i -teho administratívneho úkonu. Úkony možno vykonávať v ľubovoľnom poradí.

Našou úlohou je prideliť úkony úradníkom takým spôsobom, aby všetky úkony boli dokončené čo najskôr. Napríklad ak by sme mali rozdeliť 7 úkonov s dĺžkami 1, 4, 10, 7, 14, 2, 2 medzi 3 úradníkov, tak v optimálnom riešení by prvý úradník dostal jeden úkon s dĺžkou času 14, druhý úradník tri úkony s dĺžkami 10, 2, 2 a tretí úradník tri úkony s dĺžkami 7, 4, 1. Optimálne riešenie má teda trvanie 14.

V tejto úlohe budeme uvažovať nasledujúci algoritmus A :

Usporiadajme úkony od najdlhšieho po najkratší. V tomto poradí pridelujeme úkony úradníkom s tým, že ďalší úkon vždy priradíme úradníkovi, ktorý má najmenej práce. (Ak je takých úradníkov viac, dostane úkon ľubovoľný z nich.)

- a) Algoritmus A nedáva vždy optimálne riešenie. Nájdite taký príklad. (Uveďte aj výsledok algoritmu A a optimálne riešenie pre váš príklad.)
- b) Existujú však situácie, keď vieme naopak dokázať, že algoritmus A dá vždy optimálne riešenie. Dokážte nasledujúce tvrdenie: Nech t^* je trvanie optimálneho riešenia. Potom ak pre všetky $1 \leq i \leq n$ platí $a_i > t^*/3$, tak algoritmus A vráti vždy optimálne riešenie.
- c) S použitím tvrdenia z časti b) ukážte, že algoritmus A je $4/3$ -aproximačný.
3. [20 bodov] **Programátorská úloha** Na vstupe je zadaný kompletný orientovaný graf. Vašou úlohou je z neho odstrániť čo najmenej vrcholov tak, aby výsledný graf bol acyklický. Vaše riešenie môže použiť najviac trikrát viac vrcholov ako optimálne riešenie.

Formát vstupu: Na prvom riadku je počet vrcholov grafu n . Nasleduje $n(n-1)/2$ riadkov, na každom z nich sú dve čísla a, b , ktoré hovoria, že z vrchola a ide hrana do vrchola b .

Formát výstupu: Na prvý riadok vypíšte počet odstránených vrcholov k . Na druhý riadok vypíšte k medzerou oddelených čísel, čo sú čísla odstránených vrcholov.

Obmedzenia a bodovanie: Na získanie plného počtu bodov je nutné, aby váš program dal správnu odpoveď pre vstupy, kde n je najviac 200.

Príklad vstupu:

4
1 2
2 3
3 1
1 4
2 4
3 4

Príklad výstupu:

2
1 2

Pozn.: Stačí odstrániť aj jeden vrchol (napr. 2).

Hint: Určite treba odstrániť všetky cykly dĺžky 3. Čo s ostatnými cyklami? Spomeňte si na 2-aproximačný algoritmus pre vrcholové pokrytie.

Všeobecné pokyny

Písomné úlohy. Písomné úlohy odovzdávajte do *Google Classroom* ako PDF súbory v stanovenom termíne. **Každý príklad odovzdajte v osobitnom PDF súbore.** Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať.

Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezapodíňte na analýzu zložitosti algoritmu.

Programátorské úlohy. Pri programátorských úlohách je vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie <https://testovac.ksp.sk/tasks/>, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Na odovzdávanie riešení je nutné sa na stránke zaregistrovať (vľavo na stránke testovača). Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii "Čo odovzdávať?".