

Domáca úloha č. 4

2-AIN-205, Leto 2022

Termín: 24.5.2022, 23:59
alebo pred termínom skúšky (čokoľvek je skôr)

Skôr ako sa pustíte do riešenia domácej úlohy, oboznámte sa so všeobecnými pokynmi, ktoré sú priložené na konci tohto dokumentu. Riešenia, ktoré odovzdáte, musia byť vaše vlastné. Neopisujte a nesnažte sa nájsť riešenia v literatúre alebo na internete!

1. [20 bodov] **Kariérny postup.** V nemenovanej firme majú n zamestnancov a množstvo kariérnych stupňov očíslovaných $1, 2, 3, \dots$. Zamestnanec môže byť z kariérneho stupňa i povýšený do kariérneho stupňa $i - 1$, z kariérneho stupňa 1 zamestnanec postupuje do správnej rady, kde sa môže tváriť múdro a dostávať až do smrti rozprávkový plat bez toho, aby čo i len pohl prstom. Nech a_i označuje počet zamestnancov na kariérnom stupni i .

Kariérny postup funguje nasledovne: odborári každý rok navrhnu množinu S zamestnancov určených na kariérny postup. Správna rada si preštuduje návrh a vyberie jednu z dvoch alternatív: zamestnancov z množiny S povýši a všetkých ostatných zamestnancov prepustí alebo zamestnancov z množiny S prepustí a všetkých ostatných zamestnancov povýši. Cieľom odborárov je dostať aspoň jedného zamestnanca do správnej rady. Naopak, hlavnou úlohou správnej rady je nepripustiť do svojich radov ďalších členov.

Ide o hru, kde obaja hráči majú úplnú informáciu (počty zamestnancov na jednotlivých kariérnych stupňoch). Keďže hra nepozná remízu, musí mať pre každý počiatočný stav a_1, a_2, \dots jeden z hráčov víťaznú stratégiu (t.j. vyhrá bez ohľadu na to, čo robí druhý hráč).

- a) Predpokladajme, že pre niektoré k platí $a_k \geq 2^k$. Ukážte, že v takom prípade majú odborári víťaznú stratégiu.
b) Predpokladajme, že správna rada rozhoduje náhodne, t.j. s pravdepodobnosťou $1/2$ množinu S povýši a s pravdepodobnosťou $1/2$ množinu S prepustí. Aká je pravdepodobnosť, že sa zamestnanec, ktorý začne na kariérnom stupni k , napokon dostane do správnej rady?
c) Ukážte, že stredná hodnota počtu zamestnancov, ktorí sa dostanú do správnej rady je v takomto prípade $\sum_k a_k / 2^k$.
d) (bonus) Argumentujte, že ak na začiatku $\sum_k a_k / 2^k < 1$, tak správna rada má víťaznú stratégiu.
Hint: Aká by bola stredná hodnota z časti c), ak by mali vyhrávajúcu stratégiu odborári?

2. [20 bodov] **Z Monte Carlo do Las Vegas.** Predstavme si, že máme Monte Carlo algoritmus, ktorého časová zložitosť je $T(n)$ a ktorý vráti chybnú odpoveď s pravdepodobnosťou p . Súčasne nám algoritmus vráti aj doplňujúcu informáciu, ktorá nám poslúži na to, aby sme vedeli určiť správnosť alebo nesprávnosť vrátenej odpovede v čase $T'(n)$. Ukážte, že v takom prípade vieme zostaviť Las Vegas algoritmus, ktorého očakávaná časová zložitosť bude $(T(n) + T'(n)) / (1 - p)$.

3. [20 bodov] **Programátorská úloha** (viď všeobecné pokyny). Na vstupe máte n reťazcov zložených zo znakov 0, 1. Vašou úlohou je povedať, či majú spoločnú vybranú podpostupnosť dĺžky aspoň k .

Formát vstupu: V prvom riadku vstupu je počet reťazcov n a číslo k . V ďalších n riadkoch sa nachádza n reťazcov.

Formát výstupu: Pokiaľ dané reťazce majú spoločnú vybranú podpostupnosť, vypíšte YES, ináč vypíšte NO.

Obmedzenia a bodovanie: Na získanie plného počtu bodov je potrebné, aby váš program dal korektný výsledok pre vstupy, kde $n \leq 10$, $k \leq 18$ a dĺžka reťazcov je najviac 1000.

Príklad vstupu:

```
3 3
01010
00000
10100
```

Príklad výstupu:

```
YES
```

Poznámka: Spoločná vybraná podpostupnosť je 000.

Všeobecné pokyny

Písomné úlohy. Písomné úlohy odovzdávajte *do Google Classroom* ako PDF súbory v stanovenom termíne. **Každý príklad odovzdajte v osobitnom PDF súbore.** Na neskoro odovzdané riešenia sa nebude prihliadať.

Píšte riešenia takým spôsobom, aby obsahovali všetku potrebnú informáciu na pochopenie vášho riešenia, ale súčasne aby boli stručné a ľahko pochopiteľné. Všetky tvrdenia je potrebné zdôvodniť (a to aj v prípade, že to nie je explicitne napísané v zadaní).

Ak sa v zadaní požaduje vyriešenie algoritmickej úlohy, odovzdajte najlepší algoritmus, aký viete navrhnúť. Základným kritériom na hodnotenie bude *správnosť algoritmu*, druhým kritériom bude jeho *časová, prípadne pamäťová zložitosť*. Správny ale pomalý algoritmus dostane podstatne viac bodov ako algoritmus, ktorý je síce rýchly, ale nedá správnu odpoveď na každý vstup. Neefektívne algoritmy spĺňajúce podmienky zadania dostanú cca 50% bodov. Súčasťou vášho riešenia musia byť nasledujúce časti:

- Najprv popíšte hlavnú myšlienku algoritmu.
- Vyjadrite algoritmus formou pseudokódu.
- Ak to nie je zrejmé na prvý pohľad, ukážte že váš algoritmus je správny.
- Nezabudnite na analýzu zložitosti algoritmu.

Programátorské úlohy. Pri programátorských úlohách je vašou úlohou odovzdať len funkčný program, nie je vyžadované písomné riešenie. Riešenie odovzdávate cez webové rozhranie <https://testovac.ksp.sk/tasks/>, kde bude okamžite otestované na niekoľkých vstupoch a dozviete sa koľko bodov získalo (body získate, keď všetky vstupy z danej sady vyriešite správne v časovom limite). Riešenie môžete odovzdávať aj viackrát, hodnotí sa posledné riešenie odovzdané v stanovenom termíne. Na odovzdávanie riešení je nutné sa na stránke zaregistrovať (vľavo na stránke testovača). Podrobnosti o tom, ako má váš program vyzeráť (vrátane povolených programovacích jazykov), nájdete v sekcii "Čo odovzdávať?".